Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Романов, О неэквивалентности различных определений направлений дифференцируемости для векторных мер, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 4, 528–534

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm442>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 04:44:51

УДК 519.53+517.987

О НЕЭКВИВАЛЕНТНОСТИ РАЗЛИЧНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ НАПРАВЛЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ МЕР

В. А. Романов

В работе доказано, что для различных топологий – топологии сходимости на системе измеримых множеств, топологии сходимости относительно полувариации и топологии сходимости по вариации – определения направлений дифференцируемости для векторных мер в общем случае попарно неэквивалентны, а также доказано, что для мер со значениями в банаховом пространстве, в котором выполняется свойство Радона–Никодима, соответствующие определения эквивалентны.

Библиография: 5 названий.

Известно [1], [2], что направления дифференцируемости относятся к наиболее существенным аспектам взаимосвязи между структурами меры и пространства. Для скалярных мер можно рассматривать определения дифференцируемости по направлению в трех топологиях (в порядке их усиления): в топологии τ_f слабой сходимости мер, в топологии τ_s сходимости на всех измеримых множествах и в топологии τ_v сходимости по вариации [1, с. 170], а для векторных мер естественно рассматривать определение дифференцируемости еще и в топологии τ_{sv} сходимости относительно полувариации (более сильной по сравнению с τ_s , но более слабой по сравнению с τ_v). Известно, что для скалярных мер определения дифференцируемости в топологиях τ_s и τ_v эквивалентны между собой [1, гл. 4, теорема 2.1], но являются строго более сильными по сравнению с дифференцируемостью в топологии τ_f [1, с. 176]. Цель данной статьи – установление того факта, что для векторных мер в общем случае попарно неэквивалентными являются уже все четыре определения дифференцируемости, а также доказательство того, что для мер со значениями в банаховом пространстве со свойством Радона–Никодима определения дифференцируемости относительно топологий τ_s и τ_v (а поэтому и τ_{sv}) остаются эквивалентными.

1. Обозначения и терминология. Пусть Y – банахово пространство. Под Y -значными мерами понимаем счетно аддитивные функции множества конечной полной вариации, определенные на σ -алгебре всех борелевских подмножеств сепарабельного банахова пространства X и принимающие значения в пространстве Y . Для меры m , вектора h из X и действительного числа t под сдвинутой мерой m_{th} понимаем меру, задаваемую на измеримых подмножествах E пространства X формулой $m_{th}(E) = m(E + th)$. Пусть τ – одна из топологий $\tau_s, \tau_{sv}, \tau_v$ в пространстве Y -значных мер, определенных на X .

В соответствии с [1], [2] мера m называется *дифференцируемой по направлению h в топологии τ* , а мера $d_h m$ называется ее *дифференциалом при приращении h* , если в данной топологии имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} (m_{th} - m) - d_h m \right) = 0. \quad (1)$$

В соответствии с [3] мера m называется *непрерывной по направлению h (h -непрерывной)* в топологии τ , если в этой топологии имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} (m_{th} - m) = 0.$$

Если функция f определена на подпространстве L пространства X , а вектор h принадлежит этому подпространству, то под функцией f_{th} понимаем функцию, задаваемую на элементах x из L формулой

$$f_{th}(x) = f(x + th).$$

Через $v(m)$ обозначаем вариацию меры m . Значение вариации на всем пространстве X обозначаем через $\text{Var } m$, а значение полувариации на всем пространстве – через $\|m\|$.

Пусть a и b – два различных действительных числа и вектор h пространства X не равен нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. T -*функцией отрезка $D = [ah; bh]$ пространства X* называется определенная на порожденном вектором h одномерном подпространстве L финитная функция с носителем D , значение которой в любой точке отрезка D равно расстоянию от этой точки до ближайшего к ней конца отрезка.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из определения T -функции сразу следует ее кусочная линейность, а также треугольный вид ее подграфика (этим обстоятельством и объясняется введенное название), причем треугольник подграфика равнобедренный и прямоугольный, а его гипотенузой служит отрезок D .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поскольку T -функция отрезка D абсолютно непрерывна, а ее дифференциал при приращении h (существующий всюду, кроме трех точек – концов отрезка и его середины) суммируем, то из замечания 3.2.3 работы [2] вытекает, что скалярная мера, имеющая T -функцию своей плотностью, дифференцируема по направлению h в топологиях τ_s и τ_v .

2. Вспомогательные результаты.

ЛЕММА 1. Пусть f – T -функция отрезка $[ah; bh]$, L – порожденное вектором h одномерное пространство. Тогда при выполнении условия $|t| < |b - a|/2$ функция g_t , задаваемая на подпространстве L формулой

$$g_t(x) = \left| \frac{1}{t} (f_{th} - f)(x) - d_h f(x) \right|, \quad (2)$$

есть финитная функция, ее носитель совпадает с объединением трех имеющих одинаковую длину $|t| \cdot \|h\|$ отрезков:

$$D_1 = [(a - t)h; ah], \quad D_2 = \left[\left(\frac{b - a}{2} - t \right) h; \frac{b - a}{2} h \right], \quad D_3 = [(b - t)h; bh],$$

причем на отрезках D_1 и D_3 подграфик функции g_t имеет вид треугольников с высотой $\|h\|$, а на отрезке D_2 подграфик имеет вид треугольника с высотой $2\|h\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Носитель функции f_{th} получается из носителя функции f сдвигом на вектор $(-th)$. Поэтому носитель функции g_t включается в объединение самого отрезка D и его сдвига на указанный вектор. Это объединение можно разбить на пять частей: на указанные в формулировке леммы отрезки D_1, D_2, D_3 , а также на отрезки

$$D_4 = \left[ah; \left(\frac{b-a}{2} - t \right) h \right], \quad D_5 = \left[\frac{b-a}{2} h; (b-t)h \right].$$

Ясно, что на каждом из отрезков D_4 и D_5 функции f_{th} и f отличаются друг от друга на константу (свою для каждого из этих отрезков, но с общим модулем $|t| \cdot \|h\|$). Ясно также, что функция $d_h f$ кусочно-постоянна и принимает (кроме нулевого) только два отличающихся знаком значения, модуль которых равен $\|h\|$, причем на каждом из отрезков D_4 и D_5 эти значения совпадают с соответствующими значениями функции $(f_{th} - f)/t$. Поэтому из формулы (2) следует, что во всех точках отрезков D_4 и D_5 функция g_t обращается в нуль. Что же касается подграфика функции g_t на каждом из отрезков D_1, D_2 и D_3 , то указанный в формулировке вид подграфика получается из кусочной линейности функций f и f_{th} (на крайних отрезках D_1 и D_3 одна из них вообще обращается в нуль), а также из кусочного постоянства функции $d_h f$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из леммы 1 следует, что при выполнении условия $|t| < |b-a|/2$ (т.е. когда величина $|t| \cdot \|h\|$ меньше половины длины носителя T -функции) площадь подграфика функции g_t равна $2|t| \cdot \|h\|^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из определения T -функции легко следует, что для нее выполняется неравенство

$$|f(x+th) - f(x)| \leq |t| \cdot \|h\|.$$

С учетом того, что для дифференциала этой функции выполняется неравенство

$$|d_h f(x)| \leq \|h\|,$$

отсюда получаем, что для любых значений t (уже без ограничения $|t| < |b-a|/2$) все значения функции g_t , задаваемой формулой (2), не превосходят числа $2\|h\|$.

ЛЕММА 2. Пусть Y -значная мера t непрерывна по направлению h в топологии τ_s . Тогда ее вариация $v(t)$ есть непрерывная по направлению h скалярная мера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v_1 - h$ -непрерывная компонента в разложении вариации $v(t)$ в сумму h -непрерывной и вполне разрывной мер [4, с. 65]. Тогда для любого функционала y^* из единичного шара сопряженного к Y пространства скалярная мера $y^* t$ h -непрерывна и мажорируется мерой v_1 . Но тогда и сама векторная мера t мажорируется мерой v_1 . Следовательно, и вариация $v(t)$ мажорируется мерой v_1 . Поэтому вариация $v(t)$ совпадает со своей h -непрерывной компонентой v_1 и, следовательно, h -непрерывна. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть Y -значная мера t дифференцируема по направлению h в топологии τ_s . Тогда мера $d_h t$ абсолютно непрерывна по мере $v(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для каждого функционала y^* из единичного шара сопряженного к Y пространства скалярная мера y^*t дифференцируема по направлению h в топологии τ_s , то из теоремы 2.6.5 работы [2] следует, что дифференциал этой скалярной меры при приращении h абсолютно непрерывен по мере $v(y^*t)$, а поэтому и по мере $v(t)$. Следовательно, дифференциал векторной меры t также абсолютно непрерывен по мере $v(t)$. Лемма доказана.

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $Y = \ell_\infty$ и h – ненулевой элемент сепарабельного банахова пространства X . Тогда на σ -алгебре всех борелевских подмножеств пространства X существует такая Y -значная мера t , которая дифференцируема по направлению h в топологии τ_{sv} , но не дифференцируема по данному направлению в топологии τ_v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – одномерное подпространство, порожденное вектором h . Рассмотрим для каждого натурального p T -функции отрезков

$$\left[\frac{k-1}{p}h; \frac{k}{p}h \right], \quad k = 1, \dots, p.$$

Занумеруем все эти функции подряд в одну бесконечную последовательность (f_n) и рассмотрим на L скалярные меры t_n , плотности которых по одномерной мере Лебега совпадают с функциями f_n .

Заметим, что равномерно ограниченными являются как сами плотности f_n (все они не превосходят половины длины отрезков, T -функциями которых служат), так и их дифференциалы $d_h f_n$ (модули последних не превосходят $\|h\|$). Поэтому из предложения 3 работы [3] вытекает, что ℓ_∞ -значные функции множества t и $d_h t$, компонентами которых служат скалярные меры на L с плотностями соответственно f_n и $d_h f_n$, являются ℓ_∞ -значными мерами.

Для каждого действительного числа t рассмотрим еще одну ℓ_∞ -значную меру, а именно меру $(m_{th} - m)/t - d_h m$. Применим к ней вторую часть того же предложения 3 работы [3]. В результате получаем равенства

$$\left\| \frac{1}{t}(m_{th} - m) - d_h m \right\| = \sup_n \int_L \left| \frac{1}{t}(f_n(x+th) - f_n(x)) - d_h f_n(x) \right| dx, \quad (3)$$

$$\text{Var} \left(\frac{1}{t}(m_{th} - m) - d_h m \right) = \int_L \sup_n \left| \frac{1}{t}(f_n(x+th) - f_n(x)) - d_h f_n(x) \right| dx. \quad (4)$$

Подынтегральная функция в правой части равенства (3) отлична от нуля лишь на таком множестве, лебеговская мера которого не превосходит удвоенной длины носителя плотности f_n , а эта длина стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, в соответствии с замечанием 4 подынтегральные функции равномерно ограничены по модулю (числом $2\|h\|$). Следовательно, для больших значений n (начиная с некоторого n_0) интегралы в правой части равенства (3) можно сделать сколь угодно малыми равномерно относительно t . Для остальных значений n (не превосходящих числа n_0) малость интегралов можно обеспечить за счет того, что $t \rightarrow 0$. Следовательно, при $t \rightarrow 0$ правая часть равенства (3) имеет нулевой предел. Поэтому в топологии τ_{sv} для векторной меры t

выполняется равенство (1), т.е. в этой топологии наша векторная мера дифференцируема по направлению h .

Осталось доказать отсутствие дифференцируемости векторной меры m по направлению h в топологии τ_v .

С учетом того, что длины отрезков, по которым построены T -функции f_n , стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, можно сделать вывод о том, что при любом ненулевом фиксированном t найдется натуральное число n_0 такое, что при выполнении условия $n > n_0$ каждое значение функции f_n по модулю не превосходит величину $|t| \cdot \|h\|/4$. Поскольку модуль дифференциала T -функции при приращении h принимает на своем носителе, совпадающем с носителем самой T -функции, значение $\|h\|$, то отсюда получаем, что при $n > n_0$ во всех точках носителя плотности f_n значения функции, задаваемой формулой (2), не меньше величины $\|h\|/2$. Поскольку объединение всех таких носителей (при всех $n > n_0$) совпадает с отрезком $[0; h]$, то отсюда следует, что во всех точках этого отрезка значения подынтегральной функции из правой части равенства (4) не меньше положительной константы $\|h\|/2$. Поэтому правая часть равенства (4) не стремится к нулю при $t \rightarrow 0$. Следовательно, в топологии τ_v для векторной меры m равенство (1) не выполняется, т.е. в указанной топологии наша векторная мера не дифференцируема по направлению h . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $Y = \ell_\infty$ и h – ненулевой элемент сепарабельного банахова пространства X . Тогда на σ -алгебре всех борелевских подмножеств пространства X существует такая Y -значная мера m , которая дифференцируема по направлению h в топологии τ_s , но не дифференцируема по данному направлению в топологии τ_{sv} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, как и в доказательстве теоремы 1, L есть одномерное подпространство, порожденное вектором h . На этот раз для каждого натурального числа n зададим плотность f_n несколько иначе, а именно как сумму n T -функций отрезков

$$\left[\frac{2k}{2n}h; \frac{2k+1}{2n}h \right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Эти плотности, как и их дифференциалы при приращении h , снова являются равномерно ограниченными. Поэтому ℓ_∞ -значные функции множества m и $d_h m$, компонентами которых служат скалярные меры на L с плотностями (относительно одномерной меры Лебега) соответственно f_n и $d_h f_n$, суть ℓ_∞ -значные меры.

Поскольку каждое измеримое подмножество одномерного подпространства L можно сколь угодно точно в смысле меры симметрической разности аппроксимировать множествами, составленными из конечного числа интервалов, то для доказательства дифференцируемости векторной меры m по направлению h в топологии τ_s достаточно обосновать равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup_n \int_E \left(\frac{1}{t} (f_n(x+th) - f_n(x)) - d_h f_n(x) \right) dx = 0 \quad (5)$$

лишь для случая, когда множество E является интервалом.

Для T -функции отрезка длины $\|h\|/(2n)$ существует отрезок длины $(1/(2n) + |t|) \cdot \|h\|$, который включает в себя носитель как самой T -функции (а поэтому и носитель дифференциала этой функции), так и носитель ее сдвига на вектор $(-th)$. Интеграл по

этому отрезку от разности между самой T -функцией и ее сдвигом на вектор $(-th)$, а также интеграл от дифференциала функции при приращении h равны нулю. С учетом этих обстоятельств и с учетом того, что плотность f_n равна сумме n T -функций отрезков длины $\|h\|/(2n)$, можно сделать вывод о том, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют натуральное число n_0 и положительное число δ такие, что при выполнении условий $n > n_0$ и $|t| < \delta$ найдутся n отрезков (не обязательно дизъюнктивных) длины $(1/(2n) + |t|) \cdot \|h\|$ каждый, объединение A которых имеет следующие свойства: во-первых, лебеговская мера симметрической разности множеств E и A меньше ε и, во-вторых, при замене множества E в формуле (5) на множество A соответствующий интеграл обратится в нуль. Поскольку подынтегральные функции в формуле (5) ограничены по модулю числом $2\|h\|$, то отсюда получаем, что при выполнении условий $n > n_0$ и $|t| < \delta$ модули интегралов, фигурирующих в формуле (5), меньше числа $2\varepsilon \cdot \|h\|$. Для остальных значений n (не превосходящих числа n_0) малость указанных интегралов можно обеспечить за счет того, что $t \rightarrow 0$. Следовательно, равенство (5) выполняется.

Остается показать, что в топологии τ_{sv} построенная векторная мера m не дифференцируема по направлению h .

Еще раз воспользуемся тем, что плотность f_n n -й компоненты m_n нашей векторной меры равна сумме n T -функций отрезков длины $\|h\|/(2n)$. Обозначим $t_n = 1/(6n)$. Тогда величина $|t_n| \cdot \|h\|$ меньше половины длины упомянутых отрезков. Поэтому с учетом замечания 3 получаем, что для n -й компоненты выполняется равенство

$$\left\| \frac{1}{t_n} ((m_n)_{t_n h} - m_n) - d_h m_n \right\| = (2|t_n| \cdot \|h\|^2) n = \frac{1}{3} \|h\|^2.$$

Следовательно, для самой векторной меры выполняется неравенство

$$\left\| \frac{1}{t_n} (m_{t_n h} - m) - d_h m \right\| \geq \frac{1}{3} \|h\|^2.$$

Поскольку правая часть этого неравенства не стремится к нулю, а $t_n \rightarrow 0$, то отсюда получаем, что в топологии τ_{sv} соотношение (1) не выполняется, т.е. в указанной топологии векторная мера не дифференцируема по направлению h . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из построения плотностей f_n в доказательствах теорем 1 и 2 нетрудно убедиться в том, что обе эти теоремы останутся в силе, если пространство ℓ_∞ ограниченных последовательностей заменить пространством c_0 сходящихся к нулю последовательностей.

ТЕОРЕМА 3. Пусть банахово пространство Y обладает свойством Радона-Никодима, h — ненулевой элемент сепарабельного банахова пространства X , m — Y -значная мера, определенная на σ -алгебре борелевских подмножеств пространства X и дифференцируемая по направлению h в топологии τ_s . Тогда векторная мера m дифференцируема по направлению h и в топологии τ_v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку векторная мера m дифференцируема по направлению h в топологии τ_s , то она тем более непрерывна по направлению h . Согласно лемме 2 из непрерывности самой векторной меры вытекает непрерывность по данному направлению ее вариации $v(m)$, а из леммы 3 получаем, что дифференциал $d_h m$ абсолютно непрерывен по мере $v(m)$. Поскольку пространство Y , в котором принимают значения как

сама векторная мера m , так и ее дифференциал $d_h m$, имеет свойство Радона–Никодима, то отсюда вытекает, что дифференциал $d_h m$ можно представить как произведение некоторой интегрируемой по Бохнеру Y -значной функции и непрерывной по направлению h скалярной меры $v(m)$ с неотрицательными значениями. Рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1 работы [5], показывают, что тогда дифференциал $d_h m$ нашей векторной меры непрерывен по направлению h в топологии τ_v . Следовательно, при $t \rightarrow 0$ стремится к нулю выражение в правой части неравенства

$$\text{Var} \left(\frac{1}{t} (m_{th} - m) - d_h m \right) \leq \sup_{|s| \leq |t|} \text{Var} ((d_h m)_{sh} - d_h m).$$

Это неравенство является аналогом соответствующего неравенства для скалярных мер [1, с. 171, неравенство (2.4)] и доказывается таким же способом. Но тогда при $t \rightarrow 0$ выражение в левой части неравенства тем более имеет нулевой предел. Это означает, что векторная мера m дифференцируема по направлению h в топологии τ_v . Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.
- [2] Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. I. Дифференцируемые меры // Тр. ММО. 1971. Т. 24. С. 133–174.
- [3] Романов В. А. О неэквивалентности трех определений непрерывных направлений для векторных мер // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 2. С. 310–312.
- [4] Романов В. А. О разложении меры в линейном пространстве в сумму H -непрерывной и вполне H -разрывной мер // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1976. Т. 31. № 4. С. 63–66.
- [5] Романов В. А. Об H -непрерывных мерах в гильбертовом пространстве // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1977. Т. 32. № 1. С. 81–85.

Кировоградский государственный педагогический университет, Украина

Поступило
23.11.2000