Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Голиков, В. П. Маслов, О точном решении четырехрядной матрицы, отвечающей уравнениям в вариациях для ультравторично квантованных задач, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 2, 305–309

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4420>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:15:06

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О точном решении четырехрядной матрицы, отвечающей уравнениям в вариациях для ультратворично квантованных задач

Д. С. Голиков, В. П. Маслов

Потенциал взаимодействия, зависящий от разности своих аргументов, представляется в виде ряда Фурье:

$$NV(\sqrt[3]{N}x) = \sum_p v_p e^{ipx}, \quad v_p = \frac{1}{L_1 L_2^2} \int_{\mathbf{T}} dx NV(\sqrt[3]{N}x) e^{-ipx}, \quad v_p = v_{-p}.$$

где p – вектор вида

$$2\pi \left(\frac{n_1}{L_1}, \frac{n_2}{L_2}, \frac{n_3}{L_2} \right), \quad (1)$$

n_1, n_2, n_3 – целые числа, суммирование производится по всем значениям n_1, n_2, n_3 .

Исследование соответствующей ультратворично квантованной задачи [1] проведено в статье [2]. Аналогично получаем матрицу для определения собственных значений уравнений в вариациях.

Задача на собственные значения системы уравнений в вариациях сводится к нахождению собственных значений уравнения

$$\tilde{\lambda} X = M X. \quad (2)$$

Здесь

$$\tilde{\lambda} = \lambda + \frac{\hbar^2}{m} k_1(k_2 + l),$$

X – вектор-столбец вида

$$X = \begin{pmatrix} u_{1,l} \\ u_{2,l} \\ v_{1,l} \\ v_{2,l} \end{pmatrix},$$

M – матрица

$$M = \begin{pmatrix} B_1 & V & V_1 & 0 \\ V & B_2 & 0 & V_2 \\ M_1 & F & -B_1 & -V \\ F & M_2 & -V & -B_2 \end{pmatrix}$$

с элементами

$$\begin{aligned} B_1 &= B_{k_2,l} + \frac{v_{l-k_2}}{2}, & B_2 &= B_{k_2,l+2k_2} + \frac{v_{l+3k_2}}{2}, \\ V &= \frac{v_{2k_2} + v_{l+k_2}}{2}, & V_1 &= -\frac{v_{l+k_2} + v_{l-k_2}}{2}, & V_2 &= -\frac{v_{l+k_2} + v_{l+3k_2}}{2}, \\ M_1 &= 2(v_0 + v_{l-k_2})\varphi_{k_2,l}, & M_2 &= 2(v_0 + v_{l+3k_2})\varphi_{k_2,l+2k_2}, \\ F &= (v_{2k_2} + v_{l+k_2})(\varphi_{k_2,l} + \varphi_{k_2,l+2k_2}), \end{aligned} \quad (3)$$

где числа $B_{k_2,l}$, $\varphi_{k_2,l}$ имеют вид

$$\begin{aligned} B_{k_2,l} &= \frac{\hbar^2}{2m}(l^2 - k_2^2) + (v_{l-k_2} + v_{l+k_2})\varphi_{k_2,l} - \frac{v_{2k_2}}{2}, \\ \varphi_{k_2,l} &= -\frac{b_l}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b_l^2 - 1}, \quad b_l \equiv \frac{(\hbar^2/m)(l^2 - k_2^2) - (v_0 + v_{2k_2})}{v_{l-k_2} + v_{l+k_2}}, \end{aligned} \quad (4)$$

а k_1 , k_2 , l – трехмерные векторы вида (1).

Линейная система уравнений (2) имеет нетривиальное решение, если детерминант соответствующей матрицы равен нулю. Равенство

$$\det(M - \tilde{\lambda}E) = 0, \quad (5)$$

где E – единичная матрица четвертого порядка, представляет собой уравнение для определения спектра.

Как показывает непосредственный подсчет определителя, уравнение (5) может быть записано в форме

$$\tilde{\lambda}^4 - \xi_{k_2,l}\tilde{\lambda}^2 + \eta_{k_2,l} = 0.$$

Коэффициенты $\xi_{k_2,l}$, $\eta_{k_2,l}$ выражаются через элементы матрицы M следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_{k_2,l} &= B_1^2 + B_2^2 + 2V^2 + V_1M_1 + V_2M_2, \\ \eta_{k_2,l} &= B_1^2B_2^2 + B_1^2V_2M_2 + B_2^2V_1M_1 - 2V^2B_1B_2 + V^4 \\ &\quad + V^2(V_1M_2 + V_2M_1) - 2VF(B_1V_2 + B_2V_1) - V_1V_2F^2 + M_1M_2V_1V_2. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (3), (4), получим

$$\begin{aligned} \xi_{k_2,l} &= a^2((l_1^2 - k_2^2)^2 + (l^2 - k_2^2)^2) \\ &\quad + a(l_1^2(v_{l+3k_2} - v_{2k_2}) + l^2(v_{l-k_2} - v_{2k_2}) - k_2^2(v_{l-k_2} + v_{l+3k_2} - 2v_{2k_2})) \\ &\quad - \frac{1}{2}(v_{l+k_2} + v_{2k_2})(v_{l+3k_2} + v_{l-k_2} - 2v_{2k_2}), \\ \eta_{k_2,l} &= a(2a(k_2^4 - k_2^2(l_1^2 + l^2) + l_1^2l^2) - (l_1^2 + l^2 - 2k_2^2)(v_{l+k_2} + v_{2k_2})) \\ &\quad \times \frac{1}{4}(2a^2(k_2^4 - k_2^2(l_1^2 + l^2) + l_1^2l^2) \\ &\quad + a(l_1^2(2v_{l-k_2} + v_{l+k_2} - v_{2k_2}) + l^2(2v_{l+3k_2} + v_{l+k_2} - v_{2k_2}) \\ &\quad - 2k_2^2(v_{l+3k_2} + v_{l-k_2} + v_{l+k_2} - v_{2k_2})) \\ &\quad + 2(v_{l+3k_2} - v_{2k_2})(v_{l-k_2} - v_{2k_2}) + (v_{l+k_2} + v_{2k_2})(v_{l+3k_2} + v_{l-k_2} - 2v_{2k_2})), \end{aligned}$$

где для сокращения введены обозначения:

$$a = \frac{\hbar^2}{2m}, \quad l_1 = l + 2k_2.$$

Следовательно, задача на собственные значения (2) позволяет записать собственные значения уравнений в вариациях:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,k_1,k_2,l} &= -\frac{\hbar^2}{m}k_1(k_2 + l) \pm \sqrt{\frac{\xi_{k_2,l} + \sqrt{\xi_{k_2,l}^2 - 4\eta_{k_2,l}}}{2}}, \\ \lambda_{2,k_1,k_2,l} &= -\frac{\hbar^2}{m}k_1(k_2 + l) \pm \sqrt{\frac{\xi_{k_2,l} - \sqrt{\xi_{k_2,l}^2 - 4\eta_{k_2,l}}}{2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что в предельном случае при $k_2 \rightarrow 0$ имеют место спектры

$$\lambda_{k_1,0,l} = -2alk_1 \pm \sqrt{a^2l^4 + al^2(v_l - v_0) + \frac{v_0^2 - v_l^2}{2} \pm \left| (v_l + v_0) \left(al^2 + \frac{v_l - v_0}{2} \right) \right|}.$$

Раскрывая модуль, получим:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,k_1,l} &= -\frac{\hbar^2}{m} k_1 l \pm \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 l^2}{2m} + v_l \right)^2 - v_l^2}, \\ \lambda_{2,k_1,l} &= -\frac{\hbar^2}{m} k_1 l \pm \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 l^2}{2m} - v_0 \right)^2 - v_l^2}. \end{aligned}$$

Зависимость энергии элементарного возбуждения $\lambda_{1,k_1,l}$ от волнового вектора l представляет собой знаменитый спектр сверхтекучести Боголюбова [3].

В пределе при $N \rightarrow \infty$ мы получаем приближенные решения матрицы M , приведенные в [2]. Формулы (6) переходят в спектры

$$\begin{aligned} \lambda_{1,k_1,k_2,l} &= -\frac{\hbar^2}{m} k_1(k_2 + l) \\ &\pm \frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{k_2^4 + \frac{l^4}{2} + \frac{l_1^4}{2} - k_2^2(l^2 + l_1^2) + \frac{1}{2}(l^2 + l_1^2 - 2k_2^2) \sqrt{(l^2 - l_1^2)^2 + \left(\frac{4mV_0}{\hbar^2} \right)^2}}, \\ \lambda_{2,k_1,k_2,l} &= -\frac{\hbar^2}{m} k_1(k_2 + l) \\ &\pm \frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{k_2^4 + \frac{l^4}{2} + \frac{l_1^4}{2} - k_2^2(l^2 + l_1^2) - \frac{1}{2}(l^2 + l_1^2 - 2k_2^2) \sqrt{(l^2 - l_1^2)^2 + \left(\frac{4mV_0}{\hbar^2} \right)^2}}, \end{aligned}$$

где

$$V_0 = \frac{1}{L_1 L_2^2} \int_{\mathbf{R}^3} V(y) dy.$$

Для системы тождественных ферми-частиц задача на собственные значения системы уравнений в вариациях аналогично сводится к нахождению собственных значений уравнения

$$\tilde{\lambda}X = MX. \quad (7)$$

Здесь

$$\tilde{\lambda} = \lambda + \frac{\hbar^2}{m} k_1(k_2 + l),$$

X – вектор-столбец вида

$$X = \begin{pmatrix} u_{1,l} \\ u_{2,l} \\ v_{1,l} \\ v_{2,l} \end{pmatrix},$$

M – матрица

$$M = \begin{pmatrix} B_1 & V & V_1 & 0 \\ V & B_2 & 0 & V_2 \\ M_1 & F & -B_1 & -V \\ F & M_2 & -V & -B_2 \end{pmatrix}$$

с элементами

$$\begin{aligned}
 B_1 &= B_{k_2, l} + \frac{v_{l-k_2}}{2}, & B_2 &= B_{k_2, l+2k_2} + \frac{v_{l+3k_2}}{2}, \\
 V &= \frac{v_{l+k_2} - v_{2k_2}}{2}, & V_1 &= \frac{v_{l-k_2} - v_{l+k_2}}{2}, & V_2 &= \frac{v_{l+3k_2} - v_{l+k_2}}{2}, \\
 M_1 &= 2i(v_{l-k_2} - v_0)\varphi_{k_2, l}, & M_2 &= 2i(v_0 - v_{l+3k_2})\varphi_{k_2, l+2k_2}, \\
 F &= i(v_{2k_2} - v_{l+k_2})(\varphi_{k_2, l+2k_2} - \varphi_{k_2, l}),
 \end{aligned} \tag{8}$$

где числа $B_{k_2, l}$, $\varphi_{k_2, l}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 B_{k_2, l} &= \frac{\hbar^2}{2m}(l^2 - k_2^2) + i(v_{l+k_2} - v_{l-k_2})\varphi_{k_2, l} - \frac{v_{2k_2}}{2}, \\
 \varphi_{k_2, l} &= -\frac{ib_{k_2, l}}{2} \pm \frac{i\sigma_l}{2} \sqrt{b_{k_2, l}^2 - 1}, & b_{k_2, l} &\equiv \frac{(\hbar^2/m)(l^2 - k_2^2) + (v_0 - v_{2k_2})}{v_{l-k_2} - v_{l+k_2}},
 \end{aligned} \tag{9}$$

а k_1 , k_2 , l – трехмерные векторы вида (1).

Линейная система уравнений (7) имеет нетривиальное решение, если детерминант соответствующей матрицы равен нулю. Равенство

$$\det(M - \tilde{\lambda}E) = 0, \tag{10}$$

где E – единичная матрица четвертого порядка, представляет собой уравнение для определения спектра.

Как и в случае бозонов, уравнение (5) может быть записано в форме

$$\tilde{\lambda}^4 - \xi_{k_2, l}\tilde{\lambda}^2 + \eta_{k_2, l} = 0.$$

Коэффициенты $\xi_{k_2, l}$, $\eta_{k_2, l}$ аналогично выражаются через элементы матрицы M :

$$\begin{aligned}
 \xi_{k_2, l} &= B_1^2 + B_2^2 + 2V^2 + V_1M_1 + V_2M_2, \\
 \eta_{k_2, l} &= B_1^2B_2^2 + B_1^2V_2M_2 + B_2^2V_1M_1 - 2V^2B_1B_2 + V^4 \\
 &\quad + V^2(V_1M_2 + V_2M_1) - 2VF(B_1V_2 + B_2V_1) - V_1V_2F^2 + M_1M_2V_1V_2.
 \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (8), (9), получим

$$\begin{aligned}
 \xi_{k_2, l} &= a^2((l_1^2 - k_2^2)^2 + (l^2 - k_2^2)^2) + \\
 &\quad + a(l_1^2(v_{l+3k_2} - v_{2k_2}) + l^2(v_{l-k_2} - v_{2k_2}) - k_2^2(v_{l-k_2} + v_{l+3k_2} - 2v_{2k_2})) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(v_{l+k_2} - v_{2k_2})(v_{l-k_2} + v_{l+3k_2} - 2v_{2k_2}), \\
 \eta_{k_2, l} &= a(2a(k_2^4 - k_2^2(l_1^2 + l^2) + l_1^2l^2) + (l_1^2 + l^2 - 2k_2^2)(v_{l+k_2} - v_{2k_2})) \\
 &\quad \times \frac{1}{4}(2a^2(k_2^4 - k_2^2(l_1^2 + l^2) + l_1^2l^2) \\
 &\quad + a(l_1^2(2v_{l-k_2} - v_{2k_2} - v_{l+k_2}) + l^2(2v_{l+3k_2} - v_{2k_2} - v_{l+k_2}) \\
 &\quad - 2k_2^2(v_{l+3k_2} + v_{l-k_2} - v_{l+k_2} - v_{2k_2})) \\
 &\quad + 2(v_{l+3k_2} - v_{2k_2})(v_{l-k_2} - v_{2k_2}) - (v_{l+k_2} - v_{2k_2})(v_{l+3k_2} + v_{l-k_2} - 2v_{2k_2})),
 \end{aligned}$$

где для сокращения введены обозначения:

$$a = \frac{\hbar^2}{2m}, \quad l_1 = l + 2k_2.$$

Таким образом, задача на собственные значения (7) позволяет записать собственные значения системы уравнений в вариациях:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,k_1 k_2,l} &= -\frac{\hbar^2}{m} k_1(k_2 + l) \pm \sqrt{\frac{\xi_{k_2,l} + \sqrt{\xi_{k_2,l}^2 - 4\eta_{k_2,l}}}{2}}, \\ \lambda_{1,k_1 k_2,l} &= -\frac{\hbar^2}{m} k_1(k_2 + l) \pm \sqrt{\frac{\xi_{k_2,l} - \sqrt{\xi_{k_2,l}^2 - 4\eta_{k_2,l}}}{2}}.\end{aligned}\quad (11)$$

В пределе при $N \rightarrow \infty$ фурье-образы v_q стремятся к величине

$$V_0 = \frac{1}{L_1 L_2^2} \int_{\mathbf{R}^3} V(y) dy,$$

и точные формулы (11) переходят в спектры

$$\begin{aligned}\lambda_{1,k_1,k_2,l} &= -\frac{\hbar^2}{m} k_1(k_2 + l) \pm \frac{\hbar^2}{2m} (l_1^2 - k_2^2), \\ \lambda_{2,k_1,k_2,l} &= -\frac{\hbar^2}{m} k_1(k_2 + l) \pm \frac{\hbar^2}{2m} (l^2 - k_2^2),\end{aligned}$$

не зависящие от величины V_0 .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. П. Маслов, *Квантование термодинамики и ультравторичное квантование*, РХД, Ижевск, 2000. [2] В. П. Маслов, *ТМФ*, **143**:3 (2005), 307–327. [3] Н. Н. Боголюбов, *Изв. АН СССР. Сер. физ.*, **11**:1 (1947), 77–90.

Д. С. Голиков

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: d.s.golikov@mail.northnet.ru

Поступило
01.08.2007

В. П. Маслов

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: v.p.maslov@mail.ru