Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Мартиросян, С. В. Самарчян, О поперечниках
Колмогорова множеств из экспонент, *Матем. заметки*,
2008, том 83, выпуск 2, 310–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4421>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 18:35:29

О поперечниках Колмогорова множеств из экспонент

М. С. Мартиросян, С. В. Самарчян

Пусть K – компактное подмножество $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, $S_K = \{e^{-\lambda x} : \lambda \in K\} \subset L^2(0, \infty)$ и $d_n(S_K)$ – n -поперечник Колмогорова множества S_K в пространстве $L^2(0, \infty)$. Тогда (см. [1])

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{d_n(S_K)} < 1,$$

для любого компакта $K \subset \Pi_+$.

Данная заметка посвящена следующему результату.

ТЕОРЕМА. *Для выполнения условия*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{d_n(S_K)} = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы логарифмическая емкость множества K равнялась нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ – некоторое счетное подмножество K , а $E_n(f)$ – расстояние функции $f \in L^2(0, \infty)$ от подпространства, порожденное конечной системой $\{e^{-\lambda_k x}\}_1^n$. Если $f \in S_K$, то $E_n(f)$ удобно вычислить методом Мусояна (см. [1; с. 858]), что приводит к формуле

$$E_n(e^{-\lambda x}) = \frac{1}{2\pi} \frac{|(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)|}{\sqrt{2 \operatorname{Re} \bar{\lambda}} |(\lambda + \bar{\lambda}_1)(\lambda + \bar{\lambda}_2) \cdots (\lambda + \bar{\lambda}_n)|}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0. \quad (1)$$

Из этой формулы вытекает достаточность теоремы. Действительно, если K имеет нулевую логарифмическую емкость, то в силу теоремы Фекете–Сегё (см. [2; с. 606–607]) существует треугольная матрица $(\lambda_k^{(n)})_{k \leq n}$, $n = 1, 2, \dots$, точек из K такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sup_{\lambda \in K} |(\lambda - \lambda_1^{(n)}) \cdots (\lambda - \lambda_n^{(n)})|} = 0.$$

Для доказательства необходимости допустим обратное: существуют компакт $K \subset \Pi_+$ положительной логарифмической емкости и матрица $(e_k^{(n)})_{k \leq n} \subset L^2(0, \infty)$ такие, что

$$\rho_n = \sqrt[n]{\sup_{\lambda \in K} \left\| e^{-\lambda x} - \sum_{k=1}^n a_k^{(n)}(\lambda) e_k^{(n)} \right\|_{L^2(0, \infty)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (2)$$

для некоторого набора коэффициентов $a_k^{(n)}(\lambda) \in \mathbb{C}$, $k \leq n$.

Пусть $(\lambda_k^{(n)})_{k \leq n}$ – произвольная матрица точек из K . Так как соответствующая система векторов

$$\{(a_1^{(n)}(\lambda_i^{(n+1)}), \dots, a_n^{(n)}(\lambda_i^{(n+1)}))\}_{i=1}^{n+1}$$

линейно зависима в $\mathbb{C}^n$, то существуют коэффициенты $c_i^{(n+1)}$, $i = 1, \dots, n+1$, такие, что $\max_{1 \leq i \leq n+1} |c_i^{(n+1)}| = 1$ и

$$\sum_{i=1}^{n+1} c_i^{(n+1)} a_k^{(n)}(\lambda_i^{(n+1)}) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим полиномы

$$P_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} c_i^{(n+1)} e^{-\lambda_i^{(n+1)} x} = \sum_{i=1}^{n+1} c_i^{(n+1)} \left(e^{-\lambda_i^{(n+1)} x} - \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} (\lambda_i^{(n+1)}) e_k^{(n)} \right).$$

Согласно (2) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|P_{n+1}\|_{L^2(0, \infty)}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)\rho_n^n} = 0. \quad (3)$$

С другой стороны, учитывая формулу (1), получаем

$$\|P_{n+1}\|_{L^2(0, \infty)} \geq \frac{1}{2\pi} \min_{1 \leq j \leq n+1} \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{Re} \lambda_j}} \prod_{i=1, i \neq j}^{n+1} \left| \frac{\lambda_j^{(n+1)} - \lambda_i^{(n+1)}}{\lambda_j^{(n+1)} + \overline{\lambda_i^{(n+1)}}} \right|$$

и, следовательно,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|P_{n+1}\|_{L^2(0, \infty)}} \geq c \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq j \leq n+1} \sqrt[n]{\prod_{i=1, i \neq j}^{n+1} |\lambda_j^{(n+1)} - \lambda_i^{(n+1)}|},$$

где c – положительная постоянная, не зависящая от набора точек $\lambda_k^{(n)}$.

Наконец, учитывая теорему Фекете–Сегё, точки $\lambda_k^{(n)}$ можно подобрать так, чтобы правая часть последнего неравенства оказалась положительной. Это противоречит оценке (3).

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. Х. Мусоян, *Матем. заметки*, **36:6** (1984), 857–863. [2] G. G. Lorentz, M. V. Golitschek, Y. Makovoz, *Constructive Approximation. Advanced Problems*, Grundlehren Math. Wiss., **304**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

М. С. Мартиросян

Ереванский государственный университет

E-mail: approximation@gmail.com

Поступило

19.09.2006

С. В. Самарчян

Ереванский государственный университет

E-mail: approximation@gmail.com