Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Г. Хессами Пилеруд, Х. Хессами Пилеруд, Об одной гипотезе Эрдеша, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 2, 312–315

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4422>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:55:30

Об одной гипотезе Эрдеша

Т. Хессами Пилеруд, Х. Хессами Пилеруд

В работе будут использоваться следующие стандартные обозначения: $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}$ и $\overline{\mathbb{Q}}$ – поля рациональных и алгебраических чисел соответственно, $\varphi(q)$ – функция Эйлера, $\omega(q)$ – количество различных простых делителей числа q .

В 1960-х гг. Эрдеш высказал следующее предположение [1; с. 430], которое до сих пор не доказано и не опровергнуто: для любого натурального q и произвольной числовой функции $f(n)$ с периодом q , принимающей значения $+1, -1$ при $n = 1, 2, \dots, q-1$ и 0 при $n = q$, сумма сходящегося ряда

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n}$$

отлична от нуля. Заметим, что необходимым и достаточным условием сходимости ряда является равенство

$$\sum_{n=1}^q f(n) = \sum_{n=1}^{q-1} f(n) = 0,$$

влекущее нечетность q .

В 1969 г. Чоула поставил вопрос о существовании периодической функции $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ с простым периодом q , для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n} = 0.$$

Отрицательный ответ на этот и даже более общий вопрос был дан в работе Бейкера, Берча и Вирзинга [2]. Ими было доказано, что если q -периодическая, не равная тождественно нулю функция $g: \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $g(r) = 0$ при $1 < (r, q) < q$;
- 2) если круговой многочлен Φ_q неприводим над $\mathbb{Q}(g(1), \dots, g(q))$, то сумма сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} g(n)/n$ отлична от нуля.

В 1982 г. Окада [3], используя [2], сформулировал теорему, описывающую все q -периодические функции $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, для которых $\sum_{n=1}^{\infty} g(n)/n = 0$, при условии, что круговой многочлен Φ_q неприводим над $\mathbb{Q}(g(1), \dots, g(q))$. Указанным критерием явилась система $\varphi(q) + \omega(q)$ однородных линейных уравнений с рациональными коэффициентами от неизвестных $g(1), \dots, g(q)$. С помощью этого критерия в [3] удалось дать частичный положительный ответ на предположение Эрдеша, заключающийся в том, что сумма $S \neq 0$, если $2\varphi(q) \geq q$, т.е. для всех тех натуральных q , для которых $\omega(q) \leq 2$. Используя работу [3], Тайдеман [4] доказал справедливость гипотезы Эрдеша для всех мультипликативных функций f . Результат Окады был улучшен Сарадой в [5], показавшей, что $S \neq 0$, если $2\varphi(q) \geq q(1 - 1/h)$, где $h = \max_{1 \leq i \leq k} (p_i^{t_i})$ и $q = p_1^{t_1} \cdots p_k^{t_k}$. В той же работе был исследован вопрос о справедливости предположения Эрдеша при $\omega(q) = 3$ и 4.

Заметим, что если g – q -периодическая функция, то сумма сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n)/n$$

Работа выполнена при поддержке Института исследований по теоретической физике и математике (гранты №№ 86110020 (первый автор) и 86110025 (второй автор)).

может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=1}^q \frac{g(p)}{qk+p} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=2}^q g(p) \left(\frac{1}{kq+p} - \frac{1}{kq+1} \right) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{p=2}^q g(p) \left(\psi\left(\frac{1}{q}\right) - \psi\left(\frac{p}{q}\right) \right) = \frac{-1}{q} \sum_{p=1}^q g(p) \psi\left(\frac{p}{q}\right),\end{aligned}\quad (1)$$

где

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right)$$

является логарифмической производной гамма-функции, а $\gamma = -\psi(1)$ – константа Эйлера. Из представления (1) легко следует, что предположение Эрдеша равносильно тому, что *любая линейная комбинация вида*

$$\sum_{p=1}^{q-1} (\pm 1) \psi\left(\frac{p}{q}\right), \quad \text{где } q - \text{нечетное число},$$

отлична от нуля. В противоположность этому при четном q существование аналогичной линейной комбинации

$$\sum_{p=1}^{36} (\pm 1) \psi\left(\frac{p}{36}\right) = 0$$

было недавно доказано Тенгели [6]. Более точно, им была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Существует функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 1\}$ с периодом 36, для которой*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} = 0.$$

Доказательство Тенгели основано на обширном компьютерном переборе и предъявлении функции $f(n) = 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, 1$ при $n = 1, 2, \dots, 36$, которая удовлетворяет критерию Окады [3; теорема 10]. Кроме того, им было показано, что 36 – это минимальный период функции f , указанной в теореме.

Мы дадим здесь другое элементарное доказательство теоремы 1, основанное на следующем функциональном соотношении для логарифмической производной гамма-функции [7; § 1.7.1]:

$$\psi(mz) = \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \psi\left(z + \frac{r}{m}\right) + \log m. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим соотношение (2) при $m = 6$:

$$6\psi(6z) = \sum_{r=0}^5 \psi\left(z + \frac{r}{6}\right) + 6 \log 6. \quad (3)$$

Беря разность двух тождеств, полученных из (3) при подстановке $z = 1/36$ и $z = 5/36$, имеем

$$\sum_{r=0}^5 \left(\psi\left(\frac{1+6r}{36}\right) - \psi\left(\frac{5+6r}{36}\right) \right) = 6\psi\left(\frac{1}{6}\right) - 6\psi\left(\frac{5}{6}\right). \quad (4)$$

Рассматривая соотношение (2) при $m = 3$ и подставляя последовательно $z = 1/18$ и $z = 5/18$, получим

$$3\psi\left(\frac{1}{6}\right) - 3\psi\left(\frac{5}{6}\right) = \sum_{r=0}^2 \left(\psi\left(\frac{1+6r}{18}\right) - \psi\left(\frac{5+6r}{18}\right) \right). \quad (5)$$

Аналогично из (2) при $m = 2$, $z = 1/12$ и $z = 5/12$ находим

$$2\psi\left(\frac{1}{6}\right) - 2\psi\left(\frac{5}{6}\right) = \sum_{r=0}^1 \left(\psi\left(\frac{1+6r}{12}\right) - \psi\left(\frac{5+6r}{12}\right) \right). \quad (6)$$

Окончательно из (4)–(6) получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^5 \left(\psi\left(\frac{1+6r}{36}\right) - \psi\left(\frac{5+6r}{36}\right) \right) \\ &= \sum_{r=0}^2 \left(\psi\left(\frac{1+6r}{18}\right) - \psi\left(\frac{5+6r}{18}\right) \right) \\ &+ \sum_{r=0}^1 \left(\psi\left(\frac{1+6r}{12}\right) - \psi\left(\frac{5+6r}{12}\right) \right) + \psi\left(\frac{1}{6}\right) - \psi\left(\frac{5}{6}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Далее из (2) при $m = 2$, $z = 1/6$ и $z = 1/3$ находим

$$3\psi\left(\frac{1}{3}\right) - 3\psi\left(\frac{2}{3}\right) = \psi\left(\frac{1}{6}\right) - \psi\left(\frac{5}{6}\right). \quad (8)$$

С другой стороны, подставляя в (2) $m = 3$, $z = 1/9$ и $z = 2/9$, имеем

$$3\psi\left(\frac{1}{3}\right) - 3\psi\left(\frac{2}{3}\right) = \sum_{r=0}^2 \left(\psi\left(\frac{1+3r}{9}\right) - \psi\left(\frac{2+3r}{9}\right) \right). \quad (9)$$

Следовательно, с учетом (8), (9) мы можем переписать (7) в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^5 \left(\psi\left(\frac{1+6r}{36}\right) - \psi\left(\frac{5+6r}{36}\right) \right) + \sum_{r=0}^2 \left(\psi\left(\frac{5+6r}{18}\right) - \psi\left(\frac{1+6r}{18}\right) \right) \\ &+ \sum_{r=0}^1 \left(\psi\left(\frac{5+6r}{12}\right) - \psi\left(\frac{1+6r}{12}\right) \right) + \sum_{r=0}^2 \left(\psi\left(\frac{2+3r}{9}\right) - \psi\left(\frac{1+3r}{9}\right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя нетривиальную обнуляющуюся линейную комбинацию вида

$$\psi(1) - \psi\left(\frac{1}{3}\right) - \psi\left(\frac{2}{3}\right) - \psi\left(\frac{1}{4}\right) - \psi\left(\frac{3}{4}\right) + \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \psi\left(\frac{1}{6}\right) + \psi\left(\frac{5}{6}\right) = 0,$$

которая может быть получена из (2) при выборе $m = 2$, $z = 1/4$, $z = 1/2$ и $m = 3$, $z = 1/3$, $z = 1/6$, и прибавляя ее к (10), мы получим требуемое тождество

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^5 \left(\psi\left(\frac{1+6r}{36}\right) - \psi\left(\frac{5+6r}{36}\right) \right) + \sum_{r=0}^2 \left(\psi\left(\frac{5+6r}{18}\right) - \psi\left(\frac{1+6r}{18}\right) \right) \\ &+ \sum_{r=0}^1 \left(\psi\left(\frac{5+6r}{12}\right) - \psi\left(\frac{1+6r}{12}\right) \right) + \sum_{r=0}^2 \left(\psi\left(\frac{2+3r}{9}\right) - \psi\left(\frac{1+3r}{9}\right) \right) \\ &+ \psi\left(\frac{1}{6}\right) + \psi\left(\frac{5}{6}\right) - \psi\left(\frac{1}{4}\right) - \psi\left(\frac{3}{4}\right) - \psi\left(\frac{1}{3}\right) - \psi\left(\frac{2}{3}\right) + \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \psi(1) = 0. \end{aligned}$$

В заключение отметим, что все рассмотренные в настоящей заметке бесконечные ненулевые суммы являются трансцендентными числами, как было показано в [8; теорема 1], что также легко следует из представления (1), формулы Гаусса для логарифмической производной гамма-функции [9; § 1.2, с. 14]

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = -\gamma - \log q + \sum_{k=1}^{q-1} \omega^{-kp} \log(1 - \omega^k), \quad \text{где } p, q \in \mathbb{Z}, \quad 0 < p < q, \quad \omega = e^{2\pi i/q},$$

и теории Бейкера о линейных формах от логарифмов алгебраических чисел.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. E. Livingston, *Canad. Math. Bull.*, **8** (1965), 413–432. [2] A. Baker, B. J. Birch, E. A. Wirsing, *J. Number Theory*, **5:3** (1973), 224–236. [3] T. Okada, *Acta Arith.*, **40:2** (1982), 143–153. [4] R. Tijdeman, *Number Theory for the Millennium*, III, A K Peters, Natick, MA, 2002, 261–284. [5] N. Saradha, *The Riemann Zeta Function and Related Themes*, Proceedings of the conference in honour of K. Ramachandra, **2**, Ramanujan Math. Soc., 2006, 121–129; <http://www.math.tifr.res.in/~saradha/papers.html>. [6] R. Tijdeman, *More Sets, Graphs and Numbers*, Bolyai Soc. Math. Stud., **15**, Springer, Berlin, 2006, 381–405; <http://www.math.leidenuniv.nl/~tijdeman/tijbud.ps>. [7] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, G. F. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1. Based, in part, on notes left by Harry Bateman, McGraw-Hill, New York, 1953. [8] S. D. Adhikari, N. Saradha, T. N. Shorey, R. Tijdeman, *Indag. Math. (N.S.)*, **12:1** (2001), 1–14. [9] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Encyclopedia Math. Appl., **71**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

Т. Хессами Пилеруд

Shahrekord University, Iran,

Institute for Studies in Theoretical

Physics and Mathematics (IPM), Iran

E-mail: hessamit@ipm.ir

Поступило

10.04.2007

Х. Хессами Пилеруд

Shahrekord University,

Institute for Studies in Theoretical

Physics and Mathematics (IPM)

E-mail: hessamik@ipm.ir