Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Шапошников, О внутренних оценках соболевских норм решений эллиптических уравнений, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 2, 316–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4423>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 18:31:10

О внутренних оценках соболевских норм решений эллиптических уравнений

С. В. Шапошников

В этой работе изучаются решения $u \in W^{q,1}(\Omega)$ эллиптического уравнения

$$\partial_{x_i}(a^{ij}\partial_{x_j}u + b^i u) - c^i \partial_{x_i}u - du = f - \partial_{x_i}e^i \quad (1)$$

на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, причем $q \geq 2$. Уравнение (1) понимается в смысле интегрального тождества

$$\int_{\Omega} \varphi_{x_i}(a^{ij}u_{x_j} + b^i u + e^i) + \varphi(c^i u_{x_i} + du + f) dx = 0$$

для каждой функции $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, где ведется суммирование по повторяющимся индексам. Для коэффициентов a^{ij} , b , c и d уравнения (1) выполняются следующие условия $H(q)$:

(а) $a^{ij} \in C^{0,\delta}(\Omega)$, $a^{ij} = a^{ji}$ и существуют такие константы $m, M > 0$, что

$$m|y|^2 \leq \sum_{i,j} a^{ij}(x)y_i y_j \leq M|y|^2 \quad \text{для любых } x \in \Omega, y \in \mathbb{R}^n;$$

(б) $b, c \in L^n(\Omega)$ и $d \in L^{n/2}(\Omega)$ при $2 \leq q < n$;

(с) $b, c \in L^s(\Omega)$ и $d \in L^{s/2}(\Omega)$ для некоторого $s > n$ при $2 \leq q = n$;

(д) $b, c \in L^q(\Omega)$, $d \in L^{nq/(n+q)}(\Omega)$ при $q > n$.

Наша цель – получить оценку $W^{q,1}$ -нормы решения уравнения (1) на внутренней области $\Omega' \subset \Omega$ через нормы функций e , f и L^1 -норму решения на большей области Ω . Эта оценка является уточнением результата, который был сформулирован Морри в его книге [1; с. 156] не вполне корректным образом: с $\Omega' = \Omega$, что неверно, например, для уравнения Лапласа на круге. Доказательство оценки Морри с исследованием зависимости константы от коэффициентов было дано в [2], где допущена такая же неточность, как и в книге Морри. Рассуждения из [2] будут верными для решений с нулевым граничным условием. Мы будем предполагать несколько более сильные условия на коэффициенты уравнения, чем в [1] и [2].

Через $W^{q,1}(\Omega)$ обозначим соболевское пространство функций, которые принадлежат $L^q(\Omega)$ вместе с их обобщенными частными производными первого порядка. Это пространство наделяется стандартной нормой

$$\|f\|_{W^{q,1}(\Omega)} := \|f\|_{q,1} := \|f\|_{L^q(\Omega)} + \|\nabla f\|_{L^q(\Omega)},$$

где $\|\cdot\|_{L^q(\Omega)} = \|\cdot\|_q$ обозначает $L^q(\Omega)$ -норму скалярных или векторных функций. Через $W^{q,-1}(\Omega)$ обозначим сопряженное пространство к $W^{q',1}(\Omega)$, где $q' = q(q-1)^{-1}$, а через $\|\cdot\|_{W^{q,-1}} := \|\cdot\|_{q,-1}$ обозначим норму этого пространства. Пусть $C^{0,\delta}(\Omega)$ – пространство всех функций (возможно, векторных или матричных) на Ω , являющихся гёльдеровыми порядка δ . Для матричнозначного отображения A на Ω положим

$$\|A\|_{C^{0,\delta}} := \sup_{x \in \Omega} \|A(x)\| + \sup_{x,y \in \Omega} \frac{\|A(x) - A(y)\|}{|x - y|^\delta}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00-536), ГФЕН (грант № 06-01-39-003), DFG 436 RUS 113/343/0(R) и SFB 701 при университете Билефельда.

При $\gamma \geq 1, r > 0$ и $g \in L^\gamma(\Omega)$, положим

$$\Theta_{\gamma,g}(r) = \sup_{x \in \Omega} \left(\int_{B(x,r) \cap \Omega} |g(y)|^\gamma dy \right)^{1/\gamma}.$$

Через $B(x, r)$ обозначаем шар с центром в x и радиусом r , а через $|B(x, r)|$ — его объем.

Напомним неравенство Юнга. Пусть $x > 0, y > 0, \varepsilon > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$, тогда

$$xy \leq \varepsilon \frac{x^\alpha}{\alpha} + \varepsilon^{1-\beta} \frac{y^\beta}{\beta}. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область и для коэффициентов a^{ij}, b, c и d уравнения (1) выполняются условия $H(q)$, причем $q \geq 2$. Пусть $e \in L^q(\Omega)$ и $f \in L^p(\Omega)$, где $p = nq/(n+q)$ при $q \neq n$ и $p > n/2$ при $q = n$. Тогда, если функция $u \in W^{q,1}(\Omega)$ является решением уравнения (1) на Ω , то для всякой области Ω' с замыканием в Ω выполняется оценка*

$$\|u\|_{W^{q,1}(\Omega')} \leq C(\|u\|_{L^1(\Omega)} + \|e\|_{L^q(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}),$$

где константа C зависит от $\Omega, \Omega', n, m, M, q, \|A\|_{C^{0,\delta}}$ и от величин $\Theta_{n,b}, \Theta_{n,c}, \Theta_{n/2,d}$ при $2 \leq q < n$, от числа s и норм $\|b\|_{L^s}, \|c\|_{L^s}, \|d\|_{L^{s/2}}$ при $q = n$ и норм $\|b\|_{L^q}, \|c\|_{L^q}, \|d\|_{L^{nq/(n+q)}}$ при $q > n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = B(a, r)$ — шар с замыканием в Ω , причем $0 < r < 1$, и пусть функция ζ из $C_0^\infty(B)$ такова, что $0 \leq \zeta \leq 1, \zeta(x) > 0$ внутри B и $\zeta(x) = 1$ на шаре $B(a, r/2)$, причем

$$J(s) := \sup_x |\nabla \zeta(x)| \zeta(x)^{-s} + \sup_{i,j,x} |\partial_{x_i} \partial_{x_j} \zeta(x)| \zeta(x)^{-s} < \infty, \quad 0 < s < 1.$$

Эти условия легко обеспечить, взяв $\zeta(x) = \psi(|x|/r)$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(y) = 0$ при $|y| \geq 1$, $\psi(y) > 0$ при $|y| < 1$, $\psi(y) = 1$ при $|y| \leq 1/2$ и $\psi(y) = \exp[(y^2 - 1)^{-1}]$ вблизи точек -1 и 1 . Всюду в теореме мы будем использовать в качестве срезающей функции только такую функцию ζ .

1. Докажем теорему при $q = 2$. Для этого оценим $\|u\zeta\|_{W^{2,1}(B)}$. Домножим уравнение (1) на функцию $u\zeta^2$ и проинтегрируем. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [a^{ij} u_{x_j} u_{x_i} \zeta^2 dx + 2a^{ij} u_{x_j} u \zeta \zeta_{x_i} + b^i u_{x_i} u \zeta^2 + 2b^i u^2 \zeta_{x_i} \zeta \\ + e^i u_{x_i} \zeta^2 + 2e^i u \zeta \zeta_{x_i} + c^i u_{x_i} u \zeta^2 + d u^2 \zeta^2 + f u \zeta^2] dx = 0. \end{aligned}$$

Используя неравенство (2) при $\alpha = \beta = 2$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$ и условие (а) из $H(q)$, имеем

$$\|\zeta \nabla u\|_{L^2}^2 \leq C_1 (\|u \nabla \zeta\|_{L^2}^2 + \|b u \zeta\|_{L^2}^2 + \|c u \zeta\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{|d|} u \zeta\|_{L^2}^2 + \|e \zeta\|_{L^2}^2 + \|f u \zeta^2\|_{L^1}), \quad (3)$$

где $C_1 = C_1(n, m, M)$. Оценим слагаемые в правой части неравенства по отдельности. Положим $t = n$ при $n > 2$ и $t = (s+2)/2$ при $n = 2$. Ясно, что $2 < t < s$ при $n = 2$. Для того, чтобы оценить $\|g u \zeta\|_{L^2}$, где g равно b, c или $\sqrt{|d|}$, применим неравенство Гёльдера с параметром $t/2$ и теорему вложения Соболева $W^{2,1} \subset L^{2t/(t-2)}$. Имеем

$$\|g u \zeta\|_2 \leq \|g\|_t \|u \zeta\|_{2t/(t-2)} \leq C(n, t) \|g\|_t \|u \zeta\|_{2,1}, \quad (4)$$

причем $\|g\|_t = \Theta_{n,g}(r)$, если $t = n$, $\|g\|_t \leq |B(a, r)|^{1-t/s} \|g\|_s$, если $2 < t < s$. Применяя неравенство Гёльдера с показателями $p, p' = p(p-1)^{-1}$, где $p = 2n(n+2)^{-1}$ при $n > 2$ и

$p > 1$ при $n = 2$, неравенство (2) с $\alpha = \beta = 2$ и теорему вложения Соболева $W^{2,1} \subset L^{p'}$, получаем

$$\|fu\zeta^2\|_1 \leq \|f\zeta\|_p \|u\zeta\|_{p'} \leq C(n, p) \|f\zeta\|_p \|u\zeta\|_{2,1} \leq \varepsilon^2 \|u\zeta\|_{2,1}^2 + \varepsilon^{-2} C(n, p)^2 \|f\zeta\|_p^2.$$

Оценим $\|u\nabla\zeta\|_{L^2}$. Пусть $l = 4(n+2)^{-1}$ при $n > 2$ и $0 < l < 1$ при $n = 2$. Заметим, что ввиду теоремы вложения Соболева $W^{2,1} \subset L^{(2-l)/(1-l)}$. Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned} \|u\nabla\zeta\|_2 &= \|u\zeta^{(2-l)/2} \zeta^{-(2-l)/2} \nabla\zeta\|_2 \leq J\left(1 - \frac{l}{2}\right) \left(\int_B |u\zeta|^{2-l} |u|^l dx\right)^{1/2} \\ &\leq J\left(1 - \frac{l}{2}\right) \|u\|_1^{l/2} \|u\zeta\|_{(2-l)/(1-l)}^{(2-l)/2} \leq J\left(1 - \frac{l}{2}\right) C(n, l) \|u\|_1^{l/2} \|u\zeta\|_{2,1}^{(2-l)/2}. \end{aligned}$$

Применив неравенство Юнга (2) с $\alpha = 2/l$ и $\beta = 2/(2-l)$, получаем

$$\|u\nabla\zeta\|_2 \leq \varepsilon \|u\zeta\|_{2,1} + \varepsilon^{-l/(2-l)} C(n, l) \|u\|_{L^1}.$$

Согласно оценке (4) с $g = 1$, имеем $\|u\zeta\|_{L^2(B(a,r))} \leq C(n, t) |B(a, r)|^{1/t} \|u\zeta\|_{2,1}$. Подставляя полученные оценки в (3) и учитывая, что согласно формуле Лейбница $\|u\zeta\|_{2,1} \leq \|u\nabla\zeta\|_2 + \|\zeta\nabla u\|_2 + \|u\zeta\|_2$, находим

$$\begin{aligned} \|u\zeta\|_{W^{2,1}(B)} &\leq C_2 (\|b\|_{L^t(B)} + \|c\|_{L^t(B)} + (\|d\|_{L^{t/2}(B)})^{1/2} + |B(a, r)|^{1/t} + \varepsilon) \|u\zeta\|_{W^{2,1}(B)} \\ &\quad + C_2 \varepsilon^{-1} (\|u\|_{L^1(B)} + \|e\|_{L^2(B)} + \|f\|_{L^p(B)}), \end{aligned}$$

где $C_2 = C_2(n, p, t, m, M)$. Выбирая $r > 0$ и $\varepsilon > 0$ так, что

$$C_2 (\|b\|_{L^t(B(a,r))} + \|c\|_{L^t(B(a,r))} + (\|d\|_{L^{t/2}(B(a,r))})^{1/2} + |B(a, r)|^{1/t} + \varepsilon) < \frac{1}{2},$$

приходим к оценке $\|u\zeta\|_{2,1} \leq 2C_2 \varepsilon^{-1} (\|u\|_1 + \|e\|_2 + \|f\|_p)$. Используя гладкое разбиение единицы, ассоциированное с конечным покрытием области Ω' шарами радиуса r с замыканием в Ω , получаем требуемую оценку.

2. Рассмотрим случай $2 < q < n$. Как и выше, начнем с оценки $\|u\zeta\|_{W^{q,1}(B)}$. Можно считать, что A продолжено на все $\mathbb{R}^n$ с сохранением всех условий. Известно (см., например, [3], [4] или [5]; в последних двух работах условие на A заметно ослаблено), что при достаточно большом $\lambda = \lambda(n, q, m, M, \|A\|_{C^{0,\delta}}) > 0$ найдется такое число $N = N(n, q, m, M, \|A\|_{C^{0,\delta}}) > 1$, что для всякой функции $w \in W^{q,1}(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем функция $\mathcal{A}w = \partial_{x_i}(a^{ij}\partial_{x_j}w) - \lambda w$ удовлетворяет неравенству

$$\|w\|_{W^{q,1}(\mathbb{R}^n)} \leq N \|\mathcal{A}w\|_{W^{q,-1}(\mathbb{R}^n)}. \quad (5)$$

Функция $w = \zeta u$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{A}w = -\lambda\zeta u + a^{ij}\partial_{x_i}\zeta\partial_{x_j}u + \partial_{x_i}(a^{ij}u\partial_{x_j}\zeta) - \zeta\partial_{x_i}(b^i u) + c^i\partial_{x_i}u\zeta + du\zeta - \zeta\partial_{x_i}e^i + f\zeta. \quad (6)$$

Согласно (5) нам достаточно оценить норму правой части в $W^{q,-1}(B)$ через указанные в теореме параметры. Перепишем правую часть (6) в удобном для дальнейшего виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}w &= \partial_{x_i}(a^{ij}u\partial_{x_j}\zeta - b^i u\zeta - e^i\zeta) - \lambda\zeta u + a^{ij}\partial_{x_i}\zeta\partial_{x_j}u \\ &\quad + b^i u\partial_{x_i}\zeta + c^i\partial_{x_i}(u\zeta) - c^i u\partial_{x_i}\zeta + du\zeta + e^i\partial_{x_i}\zeta + f\zeta. \end{aligned} \quad (7)$$

Напомним, что $\|\partial_{x_i} h^i\|_{q,-1} \leq \|h\|_q$ для всякой векторно-значной функции $h \in L^q$ и согласно теореме вложения $L^p \subset W^{q,-1}$ при $p = nq(n+q)^{-1}$. Следовательно, норма правой части оценивается через выражение

$$\begin{aligned} & \|a^{ij} u \partial_{x_j} \zeta\|_q + \|b^i u \zeta\|_q + \|e^i \zeta\|_q + C(n, p) [\lambda \|\zeta u\|_p + \|a^{ij} \partial_{x_i} \zeta \partial_{x_j} u\|_p + \|b^i u \partial_{x_i} \zeta\|_p \\ & + \|c^i \partial_{x_i} (u \zeta)\|_p + \|c^i u \partial_{x_i} \zeta\|_p + \|du \zeta\|_p + \|e^i \partial_{x_i} \zeta\|_p + \|f \zeta\|_p], \end{aligned} \quad (8)$$

где $C = C(n, p)$ – константа из теоремы вложения. Заметим, что $\|a^{ij} u \partial_{x_j} \zeta\|_q \leq M \|u \nabla \zeta\|_q$ и $\|e^i \partial_{x_i} \zeta\|_p \leq \|\nabla \zeta\|_n \|e\|_q$. Применяя неравенство Гёльдера с показателями $n/q, n/(n-q)$ и показателями $(n+q)/q, (n+q)/n$, получаем

$$\begin{aligned} & \|b^i u \zeta\|_q + C(n, p) [\|b^i u \partial_{x_i} \zeta\|_p + \|c^i \partial_{x_i} (u \zeta)\|_p + \|c^i u \partial_{x_i} \zeta\|_p] \\ & \leq C(n, q, p) [(\|b\|_n + \|c\|_n) \|u \zeta\|_{q,1} + (\|b\|_n + \|c\|_n) \|u \nabla \zeta\|_q]. \end{aligned}$$

Неравенство Гёльдера с показателями $(n+q)/2q, (n+q)/(n-q)$ и теорема вложения Соболева дают

$$\lambda \|\zeta u\|_p + \|du \zeta\|_p \leq C(n, q) (\lambda |B(a, r)|^{2q/(n+q)} + \|d\|_{n/2}) \|u \zeta\|_{q,1}.$$

Остается оценить $\|u \nabla \zeta\|_{L^q}$. Пусть $l = q^2/(nq + q - n)$. Заметим, что $0 < l < 1$ и $(q-l)/(1-l) = nq/(n-q)$. Ввиду теоремы вложения Соболева и неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} \|u \nabla \zeta\|_q &= \|\zeta^{1-l/q} u \zeta^{-1+l/q} \nabla \zeta\|_q \leq J \left(1 - \frac{l}{q}\right) \left(\int_B |u \zeta|^{q-l} |u|^l dx\right)^{1/q} \\ &\leq J \left(1 - \frac{l}{q}\right) \|u\|_1^{l/q} \|u \zeta\|_{(q-l)/q}^{(q-l)/q} \leq J \left(1 - \frac{l}{q}\right) C(n, l, q) \|u\|_1^{l/q} \|\zeta u\|_{q,1}^{(q-l)/q}. \end{aligned}$$

Согласно неравенству Юнга (2) с $\alpha = q/l, \beta = q/(q-l)$ получаем

$$\|u \nabla \zeta\|_q \leq \varepsilon \|u \zeta\|_{q,1} + C(n, l, q, \varepsilon) \|u\|_1.$$

Аналогично случаю $q = 2$ выбираем $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ достаточно малыми. Получаем

$$\|u \zeta\|_{q,1} \leq C_3 (\|\nabla u \nabla \zeta\|_p + \|u\|_1 + \|e\|_q + \|f\|_p).$$

Используя разбиение единицы, приходим к следующей оценке:

$$\|u\|_{W^{q,1}(\Omega')} \leq C_4 (\|u\|_{W^{p,1}(\Omega'')} + \|u\|_{L^1(\Omega)} + \|e\|_{L^q(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}),$$

для всякой области $\Omega' \subset \Omega'' \subset \Omega$. Константа C_4 зависит от областей $\Omega', \Omega'', \Omega$ и указанных в условии теоремы величин. Положим $p_k = np_{k-1}(n + p_{k-1})$ и $p_0 = q, p_1 = p$. Так как $p_k/p_{k-1} \leq n/(n+1)$, найдется такое натуральное число K , что $p_K \leq 2$. Пусть $\{\Omega_k\}_{0 \leq k \leq K}$ – такое семейство областей, что $\Omega' \subset \Omega_k \subset \Omega$ и $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$. Тогда по доказанному для каждого $0 \leq k \leq K$ выполняется оценка

$$\|u\|_{W^{p_{k-1},1}(\Omega_{k-1})} \leq C(k) (\|u\|_{W^{p_k,1}(\Omega_k)} + \|u\|_{L^1(\Omega)} + \|e\|_{L^q(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}). \quad (9)$$

Так как $p_k \leq 2$ при $k = K$, оцениваем $\|u\|_{W^{p_K,1}}$ через $\|u\|_{W^{2,1}}$ и используем уже доказанную оценку для случая $q = 2$. Последовательно для каждого k применяем неравенство (9) и получаем оценку $\|u\|_{W^{p_0,1}(\Omega')}$. Это рассуждение завершает доказательство в случае $2 < q < n$. Доказательство в случаях $q = n$ или $q > n$ проводится аналогично. Кроме того, доказательство при $q > n$ можно найти в [6].

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. И. Богачеву за плодотворные обсуждения и замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C. B. Morrey, *Multiple integrals in the calculus of variations*, Grundlehren Math. Wiss., **130**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966. [2] С. В. Шапошников, *Матем. заметки*, **79**:3 (2006), 450–469. [3] A. Lunardi, V. Vespri, *J. Differential Equations*, **94**:1 (1991), 1–40. [4] S.-S. Byun, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357**:3 (2005), 1025–1046. [5] N. V. Krylov, *Comm. Partial Differential Equations*, **32**:1–3 (2007), 453–475. [6] В. И. Богачев, М. Рёкнер, С. В. Шапошников, *Теория вероятн. и ее примен.*, **52**:2 (2007), 240–270.

С. В. Шапошников

Московский государственный

университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: shaposh.st@ru.net, starticle@mail.ru

Поступило

14.06.2007