Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. И. Голощапова, Л. Л. Оридорога, Одномерный оператор Шрёдингера с точечными δ - и δ' -взаимодействиями, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 1, 127–131

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4424>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:21:00

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Одномерный оператор Шрёдингера с точечными δ - и δ' -взаимодействиями

Н. И. Голощапова, Л. Л. Оридорога

1. Введение. В последнее время значительная литература посвящена изучению оператора Шрёдингера с точечными δ - и δ' -взаимодействиями [1]–[9] вида:

$$L_{X,\alpha} = -\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \delta(x - x_k), \quad (1)$$

$$L_{X,\beta} = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{k=1}^n \beta_k \delta'(x - x_k), \quad (2)$$

где δ – функция Дирака. В недавних работах [4], [5] решалась задача определения числа отрицательных собственных значений $\kappa_-(L_{X,\alpha})$ и $\kappa_-(L_{X,\beta})$ одномерного оператора Шрёдингера вида (1) и (2). Ее решение для оператора с конечным числом точечных взаимодействий выражается в терминах расстояний между точками взаимодействия и интенсивностей (см. [1]–[6]). В [5] получен критерий того, что одномерный оператор Шрёдингера $L_{X,\beta}$ имеет число отрицательных собственных значений, равное числу взаимодействий.

В настоящей заметке предлагается другой подход к изучению операторов $L_{X,\alpha}$ и $L_{X,\beta}$. Именно, операторы (1) и (2) включаются в схему теории расширений, а затем исследуются с помощью аппарата граничных троек [10] и соответствующих функций Вейля [11]. В рамках этого подхода мы переводим исходную задачу на матричный язык, и как получаем результаты работ [4], [5], так и усиливаем их. В случае δ' -взаимодействий получен следующий результат: количество отрицательных собственных значений $\kappa_-(L_{X,\beta})$ оператора Шрёдингера с δ' -взаимодействиями равно числу отрицательных интенсивностей β_k . Этот результат обобщает результат Альбеверио и Нижника [5] и совпадает с ним при $k = n$.

2. Оператор Шрёдингера с δ -взаимодействиями. Одномерный оператор Шрёдингера $L_{X,\alpha}$ с точечными δ -взаимодействиями на конечном множестве $X = \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$, состоящем из точек взаимодействия, и с интенсивностями $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{R}^n$ определен дифференциальным выражением $-d^2/dx^2$ на функциях из пространства Соболева $W_2^1(\mathbb{R}^1 \setminus X)$, которые в точках взаимодействия удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \psi(x_k + 0) &= \psi(x_k - 0), \\ \psi'(x_k + 0) - \psi'(x_k - 0) &= \alpha_k \psi(x_k). \end{aligned} \quad (3)$$

Хорошо известно, что оператор $L_{X,\alpha}$ самосопряжен на $L_2(\mathbb{R}^1 \setminus X)$. Его спектр состоит из положительной полуоси и не более чем n отрицательных собственных значений [2].

3. Метод теории расширений. Опишем решение задачи на языке теории расширений симметрических операторов. Заметим, что оператор $L_{X,\alpha}$ является самосопряженным расширением минимального оператора $L_{\min}$, определенного дифференциальным выражением $-d^2/dx^2$ на функциях из пространства Соболева $W_2^2(\mathbb{R}^1 \setminus X)$, которые в точках взаимодействия удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\psi(x_k + 0) = \psi(x_k - 0) = \psi'(x_k + 0) = \psi'(x_k - 0) = 0,$$

т.е.

$$L_{\min} = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \text{dom}(L_{\min}) = W_2^2(\mathbb{R}^1 \setminus X). \quad (4)$$

Напомним необходимые сведения теории граничных троек (см. [10], [12]). Пусть A – замкнутый симметрический оператор с равными индексами дефекта и плотной областью определения в $\mathfrak{H}$, а A^* – сопряженный к нему оператор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [10]. Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, Γ_0 и Γ_1 – ограниченные линейные отображения из $\text{dom } A^*$ в $\mathcal{H}$, называется *граничной тройкой оператора A^** , если выполнены следующие условия:

i) справедлива формула Грина

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \text{dom } A^*; \quad (5)$$

ii) отображение $\Gamma = \{\Gamma_0, \Gamma_1\}: \text{dom } A^* \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ сюръективно.

Отметим, что граничная тройка существует для каждого оператора A с равными индексами дефекта и определяется неоднозначно.

С каждой граничной тройкой $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ естественным образом связаны два самосопряженных расширения $A_i := A_i^* \upharpoonright \ker \Gamma_i$, $i = 0, 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [12]. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка оператора A^* . Оператор-функция $M(\lambda)$, определяемая равенством

$$M(\lambda)\Gamma_0 f_\lambda = \Gamma_1 f_\lambda, \quad f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda := \ker(A^* - \lambda I), \quad \lambda \in \rho(A_0), \quad (6)$$

называется *функцией Вейля оператора A , соответствующей граничной тройке Π* .

Знание граничной тройки и функции Вейля позволяет описывать как все самосопряженные расширения $\tilde{A}$ оператора A , так и их спектральные свойства. Например, в случае оператора A с конечными индексами дефекта ($n_\pm(A) = n$) все самосопряженные расширения $\tilde{A}$ оператора A описываются равенствами

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \tilde{A}_{C,D} = A^* \upharpoonright \text{dom } \tilde{A}_{C,D}, \\ \text{dom } \tilde{A}_{C,D} &= \ker\{C\Gamma_1 - D\Gamma_0\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $C, D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – матрицы, удовлетворяющие условиям (см. [13])

$$\begin{aligned} DC^* &= CD^*, \\ \det(CC^* + DD^*) &\neq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 3 [12]. Количество отрицательных собственных значений операторов $\tilde{A}_{C,D}$ и $T := CD^* - DM(0)D^*$ совпадают, т.е. $\kappa_-(\tilde{A}_{C,D}) = \kappa_-(CD^* - DM(0)D^*)$.

В нашей задаче симметрическому оператору A соответствует оператор $L_{\min}$ вида (4), а $\tilde{A}_{C,D}$ соответствует $L_{X,\alpha}$. Теорема 3 позволяет получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. Оператор $L_{X,\alpha}$ вида (1) имеет не более n отрицательных собственных значений или $\kappa_-(L_{X,\alpha}) \leq n$. При этом количество отрицательных собственных значений оператора $L_{X,\alpha}$ совпадает с количеством отрицательных собственных значений матрицы

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \frac{1}{x_2 - x_1} & \frac{-1}{x_2 - x_1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-1}{x_2 - x_1} & \alpha_2 + \frac{1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{x_3 - x_2} & \frac{-1}{x_3 - x_2} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{-1}{x_3 - x_2} & \alpha_3 + \frac{1}{x_3 - x_2} + \frac{1}{x_4 - x_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n + \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Поясним, что матрица $T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ из теоремы 3 имеет вид

$$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где матрица $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ вида (9). Это позволяет предложить эффективный алгоритм определения числа отрицательных квадратов, используя обобщенный критерий Сильвестра (лемма 4 в [11]). В результате получена следующая

ТЕОРЕМА 5. Число отрицательных собственных значений оператора $L_{X,\alpha}$ равно числу отрицательных чисел в наборе $\{\gamma_k\}_{k=1}^n$, где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha_1 + \frac{1}{x_2 - x_1}, \\ \gamma_k &= \alpha_k + \frac{1}{x_{k+1} - x_k} + \frac{1}{x_k - x_{k-1}} - \frac{1}{(x_k - x_{k-1})^2 \gamma_{k-1}}, \quad 2 \leq k \leq n-1, \\ \gamma_n &= \alpha_n + \frac{1}{x_n - x_{n-1}} - \frac{1}{(x_n - x_{n-1})^2 \gamma_{n-1}}. \end{aligned} \quad (11)$$

4. Оператор Шрёдингера с δ' -взаимодействиями. Одномерный оператор Шрёдингера $L_{X,\beta}$ с точечными δ' -взаимодействиями на конечном множестве $X = \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$, состоящем из точек взаимодействия, и с интенсивностями $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \in \mathbb{R}^n$ определен дифференциальным выражением $-d^2/dx^2$ на функциях из пространства Соболева $W_2^2(\mathbb{R}^1 \setminus X)$, которые в точках взаимодействия удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \psi'(x_k + 0) &= \psi'(x_k - 0), \\ \psi(x_k + 0) - \psi(x_k - 0) &= \beta_k \psi'(x_k). \end{aligned} \quad (12)$$

Хорошо известно, что оператор $L_{X,\beta}$ самосопряжен в $L_2(\mathbb{R}^1 \setminus X)$. Его спектр состоит из положительной полуоси и не более чем n отрицательных собственных значений [1]. Оператор $L_{X,\beta}$ является самосопряженным расширением минимального оператора $L_{\min}$ вида (4). Матрица $T = CD^* - DM(0)D^*$, введенная в теореме 3, представима в блочном виде

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21}^* & T_{22} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $T_{ij} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, $i, j = 1, 2$,

$$T_{11} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 + \frac{\beta_2^2}{x_2 - x_1} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_n + \frac{\beta_n^2}{x_n - x_{n-1}} \end{pmatrix},$$

$$T_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\beta_2}{x_2 - x_1} & \frac{-\beta_2}{x_2 - x_1} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\beta_n}{x_n - x_{n-1}} & \frac{-\beta_n}{x_n - x_{n-1}} \end{pmatrix},$$

а матрица T_{22} имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x_2 - x_1} & \frac{-1}{x_2 - x_1} & & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-1}{x_2 - x_1} & \frac{1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{x_3 - x_2} & \frac{-1}{x_3 - x_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{-1}{x_3 - x_2} & \frac{1}{x_3 - x_2} + \frac{1}{x_4 - x_3} & \frac{-1}{x_4 - x_3} & \dots & 0 \\ \vdots & & \dots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{x_{n-1} - x_{n-2}} & \frac{1}{x_{n-1} - x_{n-2}} + \frac{1}{x_n - x_{n-1}} & \frac{-1}{x_n - x_{n-1}} \\ 0 & & \dots & 0 & \frac{-1}{x_n - x_{n-1}} & \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Используя структуру матрицы T и теорему 3, мы доказываем следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. *Оператор $L_{X,\beta}$ вида (2) имеет не более n отрицательных собственных значений, т.е. $\kappa_-(L_{X,\beta}) \leq n$. При этом количество собственных значений оператора $L_{X,\beta}$ в точности равно количеству отрицательных чисел в наборе $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \in \mathbb{R}^n$.*

Доказательство теоремы опирается на следующий факт: матрица T распадается в сумму диагональной $2n \times 2n$ матрицы (с главной диагональю из β_k и n нулей) и некоторого неотрицательного оператора.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Одномерный оператор Шрёдингера $L_{X,\alpha}$ с точечными δ - и δ' -взаимодействиями исследовался Альбеверии и Нижником в [3]–[5]. В [4] ими доказана теорема, утверждающая, что число отрицательных собственных значений оператора Шрёдингера с δ -взаимодействиями равно числу нулей некоторого специального решения задачи

$$L_{X,\alpha}\varphi = 0, \quad \varphi(x) = 1 \quad \text{при } x < x_1. \quad (14)$$

Ответ дается авторами в терминах значений специального решения в точках взаимодействия, которые имеют простую связь с минорами матрицы (9)

$$\Delta_k = \frac{\varphi(x_k)}{d_{k-1} \cdots d_1}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (15)$$

где $d_k = |x_{k+1} - x_k|$ и Δ_k — k -й главный минор матрицы (9). В работе [4] из других соображений доказываются критерии равенства $\kappa_-(L_{X,\alpha}) = n$ и $\kappa_-(L_{X,\beta}) = n$. Наш подход

позволяет исследовать оба оператора с единой точки зрения и существенно дополнить результаты работ [4], [5]. В частности, критерий равенства $\kappa_-(L_{X,\beta}) = n$ является частным случаем теоремы 6, а необходимое и достаточное условия $\kappa_-(L_{X,\alpha}) = n$ вытекают из условий теоремы 5.

В заключение авторы выражают благодарность М. М. Маламуду за постоянное внимание и поддержку в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, New York, 1988. [2] S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular Perturbations of Differential Operators*, Solvable Schrödinger Type Operators, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **271**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000. [3] S. Albeverio, L. Niznik, *Ukrainian Math. J.*, **52**:5 (2000), 582–589. [4] S. Albeverio, L. Niznik, *Lett. Math. Phys.*, **65**:1 (2003), 27–35. [5] S. Albeverio, L. Niznik, *Methods Funct. Anal. Topology*, **9**:4 (2003), 273–286. [6] D. Buschmann, *Eindimensionale Schrödingeroperatoren mit lokalen Punktwechselwirkungen*, Diploma thesis, Universität Frankfurt, 1994. [7] F. Gesztesy, W. Kirsch, *J. Reine Angew. Math.*, **362** (1985), 28–50. [8] Л. П. Нижник, *Функц. анализ и его прил.*, **37**:1 (2003), 85–88. [9] C. S. Christ, G. Stolz, *J. Math. Anal. Appl.*, **184**:3 (1994), 491–516. [10] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Наукова думка, Киев, 1984. [11] М. М. Маламуд, *Укр. матем. журн.*, **44**:2 (1992), 215–233. [12] V. A. Derkach, M. M. Malamud, *J. Funct. Anal.*, **95**:1 (1991), 1–95. [13] Н. И. Ахизер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, т. 2, Вища школа, Харьков, 1978.

Н. И. Голощапова

Донецкий национальный университет

E-mail: ng85@bk.ru

Поступило

29.12.2007

Л. Л. Оридорога

Донецкий национальный университет

E-mail: oridoroga@skif.net