Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О слоениях, определяемых гармоническими функциями, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 1, 132–135

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4425>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:06:49

О слоениях, определяемых гармоническими функциями

Е. В. Жужома, В. С. Медведев

1. Введение. Основная цель данной заметки – привлечь внимание к одной проблеме, сформулированной Капланом в работе [1] и дать ее частичное решение. Напомним некоторые определения и зафиксируем обозначения.

Гармонические функции. Комплексная плоскость, которую иногда мы будем отождествлять с евклидовой плоскостью $\mathbb{R}^2$, обозначается через $\mathbb{C}$. Пусть $D \subseteq \mathbb{C}$ – некоторая область. Функция $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ называется *голоморфной*, если $\partial f / \partial \bar{z}$ существует для всех $z \in D$. Эквивалентное условие:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0, \quad \text{где} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ называется *гармонической*, если

$$\Delta f \equiv 0, \quad \text{где} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

– оператор Лапласа. Известно, что действительная и мнимая части голоморфной функции являются гармоническими функциями.

Римановы поверхности. Двумерное связное многообразие S называется *римановой поверхностью*, если S наделено комплексным атласом $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ с биголоморфными функциями $z_\alpha z_\beta^{-1}$ (там, где они определены). Максимальный атлас задает *конформную структуру* на S . Римановы поверхности S_1, S_2 называются *конформно эквивалентными*, если существует конформный гомеоморфизм $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ с конформным обратным.

Комплексная плоскость $\mathbb{C}$ является римановой поверхностью. Ее конформная структура определяется атласом, единственной картой которого является тождественное отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Любая открытая связная область $D \subseteq \mathbb{C}$ естественным образом тоже становится римановой поверхностью. Знаменитая теорема об униформизации гласит, что любая некомпактная односвязная риманова поверхность конформно эквивалентна либо $\mathbb{C}$, либо верхней полуплоскости, которая конформно эквивалентна открытому единичному диску $D_1 = \{|z| < 1\}$.

Пусть S – риманова поверхность с конформной структурой $\{U_\alpha, z_\alpha\}$. Функция $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ называется *гармонической на S* , если для любой карты U_α функция $f \circ z_\alpha^{-1}$ гармоническая на $z_\alpha(U_\alpha)$.

Каплан [1] доказал следующий замечательный результат: пусть $\mathcal{F}$ – слоение без особенностей на плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда существует конформная структура, превращающая $\mathbb{R}^2$ в риманову поверхность S , и гармоническая функция f на S такие, что слои слоения $\mathcal{F}$ являются линиями уровня функции f . Следуя [1], будем называть слоение $\mathcal{F}$ *параболическим* (соответственно *гиперболическим*), если S конформно эквивалентна $\mathbb{C}$ (соответственно D_1). Каплан [1] доказал, что любое слоение без особенностей на плоскости $\mathbb{R}^2$ гиперболическое, и существует счетное множество гиперболических слоений попарно различных топологических типов, которые не являются параболическими. В связи с этими результатами Каплан сформулировал несколько проблем, одна из которых относилась к вопросу о мощности топологических типов параболических слоений.

Мы показываем, что существует счетное семейство попарно топологически не эквивалентных параболических слоений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00547а, 05-01-00501).

ТЕОРЕМА. *Существует счетное семейство попарно топологически не эквивалентных параболических слоений $\mathcal{F}_n$ без особенностей.*

2. Доказательство теоремы. Следуя [2; § 15], введем понятия орбитно-устойчивых и орбитно-неустойчивых слоев слоения (в [2] аналогичные понятия определены для траекторий потока). Далее $N_\varepsilon(A)$ означает ε -окрестность множества A .

Пусть на компактном метрическом пространстве R задано одномерное слоение $\mathcal{F}$. Под слоем слоения мы будем понимать либо одномерный слой, либо особенность слоения (которую можно рассматривать как нульмерный слой). Пусть x_0 – точка на слое l слоения $\mathcal{F}$ (если l – особенность, то $x_0 = l$). Слой l называется *орбитно-устойчивым в точке x_0* , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что все слои, проходящие через $N_\delta(x_0)$, лежат в $N_\varepsilon(l)$. Из теоремы о непрерывной зависимости слоев от начальных условий вытекает, что если слой орбитно-устойчив в одной точке, то он орбитно-устойчив в любой своей точке. Поэтому можно говорить об *орбитно-устойчивом* слое, если он орбитно-устойчив в любой своей точке. В противном случае слой называется *орбитно-неустойчивым*.

Так как непрерывное отображение компактного пространства равномерно непрерывно, то имеет место следующая лемма (теорема 36 [2]; хотя формально эта теорема доказана для потоков на сфере или ограниченной области плоскости, доказательство дословно повторяется для слоений).

ЛЕММА 1. *Пусть слоения $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ топологически эквивалентны посредством гомеоморфизма $\varphi: R \rightarrow R$. Тогда φ переводит орбитно-устойчивые слои в орбитно-устойчивые, а орбитно-неустойчивые – в орбитно-неустойчивые.*

Обозначим через $B(\mathcal{F})$ множество орбитно-неустойчивых слоев (включая, особенно-сти) слоения $\mathcal{F}$, и предположим, что $B(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Ясно, что множество $B(\mathcal{F})$ инвариантное, т.е. является объединением нульмерных и (целых) одномерных слоев. Поэтому $B(\mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} R_1$ можно рассматривать как носитель слоения $\mathcal{F}|_{R_1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_1$. Топология на R_1 индуцируется топологией пространства $R \stackrel{\text{def}}{=} R_0$, как на подмножестве. Теперь можно определить множество $B(\mathcal{F}_1)$ орбитно-неустойчивых слоев слоения $\mathcal{F}_1$. Продолжая этот процесс, получим цепочку инвариантных подмножеств

$$R_0 \supseteq R_1 \supseteq \dots \supseteq R_n \supseteq \dots$$

Если для некоторого k выполняется равенство $R_k = R_{k+1}$, то $R_{k+1} = R_{k+i}$ для всех $i \geq 1$. Наименьшее k с таким свойством называется *глубиной орбитно-неустойчивого центра*, а соответствующее R_k – *орбитно-неустойчивым центром слоения $\mathcal{F}$* . Обозначим глубину орбитно-неустойчивого центра через $D(\mathcal{F})$. Отметим, что мы не исключаем случая, когда $R_k = \emptyset$, т.е. слоение может иметь пустой орбитно-неустойчивый центр. Можно привести примеры слоений с любым $D(\mathcal{F}) \geq 0$ и либо пустым, либо непустым орбитно-неустойчивым центром.

Непосредственно из леммы 1 вытекает следующий результат (означающий, что глубина орбитно-неустойчивого центра является топологическим инвариантом).

ЛЕММА 2. *Пусть слоения $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ топологически эквивалентны и имеют конечные глубины $D(\mathcal{F}_1), D(\mathcal{F}_2)$ орбитно-неустойчивых центров соответственно. Тогда имеем $D(\mathcal{F}_1) = D(\mathcal{F}_2)$.*

Пусть $f(z) = \exp z$, и положим $f(f(\dots(z))\dots) = f^n(z)$. Поскольку $f^n(z)$ является целой функцией, линии уровня ее мнимой части $\text{Im } f^n(z)$ определяют параболическое слоение, которое мы обозначим через $\mathcal{F}_n$. Так как $f^n(z) \neq 0$, то слоение $\mathcal{F}_n$ не имеет особенностей. Покажем, что слоения $\mathcal{F}_n$ попарно топологически не эквивалентны. Для этого будет удобно продолжить $\mathcal{F}_n$ на сферу $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, считая присоединенную “бесконечную” точку особенностью s_0 . Обозначим продолженное слоение на S^2 через $\widetilde{\mathcal{F}}_n$. Поскольку гомеоморфизм, осуществляющий топологическую эквивалентность слоений, переводит особенность в особенность, эквивалентность слоений $\mathcal{F}_n$ равносильна эквивалентности слоений $\widetilde{\mathcal{F}}_n$.

Множество $\text{Im } f^n(z) = c$ обозначим через $\mathcal{L}_c^n$. Оно состоит из не более чем счетного семейства слоев слоения $\mathcal{F}_n$, которые будут записываться в виде $L_{c,i}^n$.

Поскольку

$$\text{Im } f(z) = \text{Im } \exp z = \exp x \sin y = c,$$

слоение $\mathcal{F}_1$ состоит из слоений Рэба в бесконечных полосах с граничными слоями $L_{0,k}^1 = \{y = \pi k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, см. рис.

Рис.

Непосредственно проверяется, что $D(\widetilde{\mathcal{F}}_1) = 1$.

Покажем, что слоение $\mathcal{F}_{n+1}$ определяется равенствами

$$f(\text{Re } f^n(z)) \sin(\text{Im } f^n(z)) = c, \quad (1)$$

где c пробегает множество действительных чисел. Действительно,

$$\begin{aligned} \text{Im } f^{n+1}(z) &= \text{Im } \exp(f^n(z)) = \text{Im } \exp(\text{Re } f^n(z) + i \text{Im } f^n(z)) \\ &= \exp(\text{Re } f^n(z)) \sin(\text{Im } f^n(z)) = f(\text{Re } f^n(z)) \sin(\text{Im } f^n(z)). \end{aligned}$$

Из (1) следует, что

$$\mathcal{L}_{\pi k}^n \subset \mathcal{L}_0^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

В частности,

$$\mathcal{L}_{\pi k}^1 \subset \mathcal{L}_0^2 \subset \dots \subset \mathcal{L}_0^n \dots$$

Сосредоточим наше внимание на полосе S_1 , ограниченной прямыми $y = 2\pi$ и $y = 3\pi$, которые в силу (2) являются слоями всех слоений $\mathcal{F}_n$. Поскольку ограничение $f|_{\text{int } S_1}$ отображения f на внутренность $\text{int } S_1$ полосы S_1 есть диффеоморфизм на верхнюю полуплоскость, пересечение $S_1 \cap f^{-1}(S_1) \stackrel{\text{def}}{=} S_2$ является областью в S_1 , гомеоморфной S_1 .

Из (1) получаем, что слоение $\mathcal{F}_2$ определяется равенствами $f(\text{Re } f^2(z)) \sin(\text{Im } f^2(z)) = c$. Так как отображение f имеет вид $x' = \text{Re } f(z)$, $y' = \text{Im } f(z)$, то $f|_{S_2}$ переводит слоение $\mathcal{F}_2$ на полосу S_2 в слоение $\mathcal{F}_1$ на полосу S_1 . Таким образом, $\mathcal{F}_2$ на S_2 является слоением Рэба в бесконечной полосе. Следовательно, ограничивающие S_2 слои $L_{2\pi,0}^1$, $L_{3\pi,0}^1$ слоения $\mathcal{F}_2$ орбитно-неустойчивы. С другой стороны, слои $L_{2\pi,0}^1$, $L_{3\pi,0}^1$ принадлежат множествам $\mathcal{L}_{2\pi}^1$, $\mathcal{L}_{3\pi}^1$ соответственно. Поэтому $L_{2\pi,0}^1$, $L_{3\pi,0}^1$ лежат внутри полосы S_1 и, следовательно, являются орбитно-устойчивыми слоями слоения $\mathcal{F}_1$. Отсюда получаем, что $D(\widetilde{\mathcal{F}}_2) \geq D(\widetilde{\mathcal{F}}_1) + 1$. Полностью аналогично показывается, что

$$D(\widetilde{\mathcal{F}}_{n+1}) \geq D(\widetilde{\mathcal{F}}_n) + 1$$

(на самом деле можно показать, что имеет место равенство, но нам достаточно неравенства). Из леммы 2 вытекает, что слоения $\mathcal{F}_n$ попарно топологически не эквивалентны.

Авторы благодарят Д. В. Аносова за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Kaplan, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), 514–522. [2] А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука, М., 1966.

Е. В. Жужома

Нижегородский государственный
педагогический университет

E-mail: zhuzhoma@mail.ru

Поступило

21.01.2008

В. С. Медведев

НИИ прикладной математики и кибернетики,

Нижегородский государственный

университет им. Н. И. Лобачевского