Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Ким, Гиперцикличность и хаотичность операторов обобщенной свертки, порождаемых операторами Гельфонда–Леонтьева, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 6, 849–856

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4427>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:06:42

Гиперцикличность и хаотичность операторов обобщенной свертки, порождаемых операторами Гельфонда–Леонтьева

В. Э. Ким

Рассматриваются операторы обобщенной свертки, порождаемые операторами обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева. В статье доказано, что любой такой оператор, не совпадающий с оператором умножения на константу, является гиперциклическим и хаотическим на пространстве всех целых функций. Этот результат обобщает ранее известные результаты, относящиеся к классическим операторам свертки, а также к операторам обобщенной свертки, построенным с помощью оператора Данкла.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Пусть $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k z^k$ является целой функцией порядка ρ и типа σ , где $0 < \rho < \infty$, $0 < \sigma < \infty$, и удовлетворяет условиям

$$t_k \neq 0, \quad k \geq 0, \quad \exists \lim_{k \rightarrow \infty} k^{1/\rho} \sqrt[k]{|t_k|} = (\sigma \rho)^{1/\rho}. \quad (1.1)$$

Оператор обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева D_G , построенный по функции G , действует на целую функцию $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ следующим образом:

$$D_G^n[f](z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{t_{k-n}}{t_k} z^{k-n}.$$

Этот оператор был введен в работе Гельфонда и Леонтьева [1]. Оператор D_G действует линейно и непрерывно из $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$ (здесь и далее $H(\mathbb{C})$ обозначает пространство всех целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах). Более подробные сведения об этом операторе можно найти в монографии [2].

С помощью оператора D_G введем на $H(\mathbb{C})$ оператор обобщенного сдвига

$$\tilde{T}_z[f](w) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n D_G^n[f](z) w^n, \quad z, w \in \mathbb{C}. \quad (1.2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00779) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3081.2008.1).

Обозначим через $H'(\mathbb{C})$ пространство, сопряженное к $H(\mathbb{C})$. Пусть $S \in H'(\mathbb{C})$. Определим на $H(\mathbb{C})$ оператор обобщенной свертки

$$\widetilde{M}_S[f](z) = \langle S, \widetilde{T}_z[f] \rangle. \quad (1.3)$$

Пусть X является топологическим векторным пространством. Линейный непрерывный оператор $\Phi: X \rightarrow X$ называется *гиперциклическим*, если существует такой элемент $x \in X$ (называемый *гиперциклическим вектором* оператора Φ), что его орбита $\{\Phi^n x, n = 0, 1, 2, \dots\}$ плотна в X . Термин “гиперциклический” в данном значении был впервые предложен в работе [3]. Введение этого термина было мотивировано следующим хорошо известным в теории операторов определением: оператор Φ называется *циклическим*, если существует $x \in X$ такой, что множество $\text{span}\{\Phi^n x, n = 0, 1, 2, \dots\}$ плотно в X . Таким образом, из гиперциклическости оператора вытекает его циклическость. Интересный обзор по теории гиперциклических операторов содержится в работе [4].

Приведем теперь определение хаотического оператора из теории динамических систем, следуя Девани [5]: оператор $\Phi: X \rightarrow X$ на метрическом пространстве (X, d) называется *хаотическим*, если выполняются следующие условия.

УСЛОВИЕ (А). Оператор Φ обладает существенной зависимостью от начальных условий. Это означает, что существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in X$ и любой окрестности $U(x)$ найдутся $y \in U$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что $d(\Phi^n x, \Phi^n y) > \delta$.

УСЛОВИЕ (В). Оператор Φ является топологически транзитивным. Это означает, что для любой пары U, V открытых подмножеств в X , найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\Phi^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

УСЛОВИЕ (С). Множество периодических точек оператора Φ является плотным подмножеством в X . Элемент $x \in X$ называется *периодической точкой* оператора Φ , если найдется число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\Phi^n x = x$.

Условимся называть оператор $\Phi: X \rightarrow X$ *нетривиальным*, если Φ не совпадает с оператором умножения на константу.

Сформулируем теперь основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 1. *Любой нетривиальный оператор (1.3) является гиперциклическим и хаотическим на $H(\mathbb{C})$.*

Доказательство теоремы 1 приводится в п. 5 данной статьи. В п. 2 показывается, что теорема 1 обобщает ранее известные результаты, относящиеся к классическим операторам свертки, а также к операторам обобщенной свертки, построенным с помощью оператора Данкла. В пп. 3 и 4 доказываются некоторые вспомогательные результаты.

2. Связь с предыдущими результатами. Первый пример гиперциклического оператора был фактически найден в работе Биркхофа [6] в 1929 г. В этой работе было доказано, что существует целая функция f такая, что множество сдвигов $\{f(z + n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ плотно в $H(\mathbb{C})$. Следующий пример был получен в 1952 г. в работе МакЛейна [7], в которой было доказано, что существует функция $f \in H(\mathbb{C})$ такая, что множество производных $\{f^{(n)}(z), n = 0, 1, 2, \dots\}$ плотно в $H(\mathbb{C})$.

Таким образом, оператор сдвига $T_1[f](z) = f(z+1)$ и оператор дифференцирования являются гиперциклическими операторами на пространстве $H(\mathbb{C})$.

Значительное обобщение результатов Биркхоффа и МакЛейна было получено в 1991 г. в работе Годфри и Шапиро [8]. Рассмотрим на $H(\mathbb{C})$ оператор сдвига

$$T_z[f](w) = f(w+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} f^{(n)}(z), \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Любой функционал $S \in H'(\mathbb{C})$ определяет линейный и непрерывный оператор свертки

$$M_S[f](z) = \langle S, T_z[f] \rangle, \quad f \in H(\mathbb{C}). \quad (2.1)$$

Отметим, что оператор T_1 и оператор дифференцирования являются частными случаями оператора (2.1). В работе [8] было, в частности, доказано, что любой нетривиальный оператор (2.1) является гиперциклическим на $H(\mathbb{C})$.

В работе [9] аналогичный результат был получен для операторов обобщенной свертки на $H(\mathbb{C})$, порождаемых операторами Данкла. Операторы Данкла [10] – это дифференциально-разностные операторы, связанные с конечными группами отражений в некотором евклидовом пространстве. Эти операторы играют важную роль в различных задачах математики и физики (см., например, обзор [11]). В работе [9] рассматривался одномерный оператор Данкла на пространстве $H(\mathbb{C})$:

$$\Lambda_\alpha f(z) = f'(z) + \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{f(z) - f(-z)}{z} \right), \quad \alpha \geq -\frac{1}{2}. \quad (2.2)$$

Единственным целым решением уравнения $\Lambda_\alpha f = f$ с условием $f(0) = 1$ является функция

$$E_\alpha(z) = j_\alpha(iz) + \frac{z}{2(\alpha+1)} j_{\alpha+1}(iz),$$

где j_α – нормированная функция Бесселя порядка α ,

$$j_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha+1) z^{2k}}{4^k \Gamma(k+1) \Gamma(k+\alpha+1)}.$$

Отметим, что

$$\Lambda_\alpha^k E_\alpha(\lambda z) = \lambda^k E_\alpha(\lambda z) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Оператор Λ_α порождает на $H(\mathbb{C})$ оператор обобщенного сдвига

$$T_{z,\alpha}[f](w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,\alpha} \Lambda_\alpha^n f(z) w^n,$$

где $b_{n,\alpha}$ – коэффициенты ряда Тейлора $E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,\alpha} z^n$, и оператор обобщенной свертки

$$M_{S,\alpha}[f](z) = \langle S, T_{z,\alpha}[f] \rangle, \quad S \in H'(\mathbb{C}). \quad (2.3)$$

Отметим, что $E_{-1/2}(z) \equiv \exp(z)$, $M_{S,-1/2} = M_S$. В [9] было показано, что любой нетривиальный оператор (2.3) является гиперциклическим и хаотическим на $H(\mathbb{C})$.

Очевидно, что в случае $G(z) \equiv \exp(z)$ оператор Гельфонда–Леонтьева D_G совпадает с обычным оператором дифференцирования. Заметим также, что в случае $G(z) \equiv E_\alpha(z)$ оператор D_G совпадает с оператором Данкла (2.2). Действительно, $\Lambda_\alpha[z^n] = p_n z^{n-1}$, где $p_n = n + (\alpha + 1/2)(1 - (-1)^n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. Так как $\Lambda_\alpha E_\alpha = E_\alpha$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n,\alpha} p_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1,\alpha} z^{n-1}.$$

Отсюда вытекает, что $p_n = b_{n-1,\alpha}/b_{n,\alpha}$. Следовательно, $\Lambda_\alpha = D_{E_\alpha}$. Это означает, что операторы (2.1) и (2.3) являются частными случаями оператора (1.3). Таким образом, теорема 1 устанавливает новый широкий класс гиперциклических и хаотических операторов на пространстве целых функций, включающий в себя некоторые ранее известные классы.

3. Обобщенное преобразование Лапласа. Обозначим через $E[\rho, \infty)$ класс целых функций порядка меньше ρ или порядка ρ и конечного типа. Пусть $S \in H'(\mathbb{C})$, $f \in H(\mathbb{C})$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Тогда $\langle S, f \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s_k$, где $s_k = \langle S, z^k \rangle$. Хорошо известно, что преобразование Лапласа

$$\check{S}(\lambda) = \langle S, \exp(\lambda z) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{k!} \lambda^k$$

устанавливает изоморфизм между пространством $H'(\mathbb{C})$ и пространством $E[1, \infty)$. Отметим, что последовательность $\{s_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ определяет функционал $S \in H'(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|s_k|} =: \sigma_S < \infty. \quad (3.1)$$

Обозначим $G_\lambda(z) \equiv G(\lambda z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Введем обобщенное преобразование Лапласа функционала S :

$$\hat{S}(\lambda) = \langle S, G_\lambda \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} s_k t_k \lambda^k.$$

ТЕОРЕМА 2. *Обобщенное преобразование Лапласа $L: S \rightarrow \hat{S}$ осуществляет изоморфизм между пространствами $H'(\mathbb{C})$ и $E[\rho, \infty)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $S \in H'(\mathbb{C})$. Покажем, что $\hat{S} \in E[\rho, \infty)$. С учетом условий (1.1), (3.1) имеем

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} k^{1/\rho} \sqrt[k]{|s_k| |t_k|} = \sigma_S (\sigma \epsilon \rho)^{1/\rho} = (\tilde{\sigma} \epsilon \rho)^{1/\rho},$$

где $\tilde{\sigma} = \sigma \sigma_S^\rho$. Следовательно, $\hat{S}$ является целой функцией порядка ρ и типа $\tilde{\sigma}$, т.е. принадлежит пространству $E[\rho, \infty)$.

2) Пусть $g \in E[\rho, \infty)$, $g(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \lambda^k$. Тогда найдется число $a > 0$ такое, что

$$p_a(g) := \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{|g(\lambda)|}{e^{a|\lambda|^\rho}} < \infty.$$

Функционал $L^{-1}(g)$ определяется последовательностью $\{b_k/t_k\}_{k=0}^{\infty}$. Покажем, что $L^{-1}(g) \in H'(\mathbb{C})$. Для этого достаточно доказать, что $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_k/t_k|} < \infty$. Для любого $R > 0$ имеем

$$\left| \frac{b_k}{t_k} \right| = \left| \frac{1}{t_k} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{g(w)}{w^{n+1}} dw \right| \leq \frac{1}{|t_k| R^k} p_a(g) e^{aR^\rho}.$$

Положим $R = k^{1/\rho}$. Тогда

$$\left| \frac{b_k}{t_k} \right| \leq \frac{p_a(g) e^{a k^{1/\rho}}}{|t_k| k^{k/\rho}}.$$

Тогда, учитывая (1.1), получаем

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{b_k}{t_k} \right|} \leq \frac{e^a}{(\sigma e \rho)^{1/\rho}} < \infty.$$

Следовательно, $L^{-1}(g) \in H'(\mathbb{C})$.

4. Оператор обобщенной свертки. Для произвольной функции $f \in H(\mathbb{C})$ обозначим $m_r(f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Покажем, что оператор обобщенной свертки (1.3) корректно определен на $H(\mathbb{C})$. Для этого докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Имеет место включение $\tilde{T}_z[f] \in H(\mathbb{C})$ для всех $z \in \mathbb{C}$, $f \in H(\mathbb{C})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in H(\mathbb{C})$. Зафиксируем произвольное $z \in \mathbb{C}$. Пусть $|z| = r$. Известно [2], что

$$|D_G^k[f](z)| < \frac{C_{\varepsilon, \sigma_1}}{d_k} m_{r_1}(f), \quad k \geq 0, \quad (4.1)$$

где $\sigma_1 > 0$, $\varepsilon > 0$ – произвольные константы, $r_1 = (r^\rho + (\sigma_1 + \varepsilon)/\sigma)^{1/\rho}$, а последовательность положительных чисел $\{d_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} k^{1/\rho} \sqrt[k]{d_k} = (\sigma_1 e \rho)^{1/\rho}.$$

Зафиксируем произвольное $R > 0$. Выберем $\sigma_1 > \sigma R^\rho$. Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|t_k| |D_G^k f(z)| R^k} < R \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{|t_k| m_{r_1}(f) C_{\varepsilon, \sigma_1}}{d_k}} = R \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} \right)^{1/\rho} < 1.$$

Отсюда следует, что ряд (1.2) сходится абсолютно и равномерно на компактах в $\mathbb{C}$. Таким образом, $\tilde{T}_z[f] \in H(\mathbb{C})$.

Докажем теперь следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Оператор (1.3) действует линейно и непрерывно из $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что оператор (1.3) можно переписать в виде

$$\tilde{M}_S[f](z) = \langle S, \tilde{T}_z[f] \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} s_k t_k D_G^k[f](z). \quad (4.2)$$

Тогда для любого $r > 0$ из (4.1) следует оценка

$$m_r(\widetilde{M}_S[f]) \leq C_{\varepsilon, \sigma_1} m_{r_1}(f) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k| |t_k|}{d_k}.$$

Из этой оценки вытекает утверждение леммы (заметим, что числовой ряд в правой части последнего неравенства сходится, если выбрать $\sigma_1 > \sigma_S^\rho$).

Характеристической функцией оператора (1.3), (4.2) назовем функцию $\widehat{S}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k t_k \lambda^k$. Из теоремы 2 следует, что $\widehat{S} \in E[\rho, \infty)$. Отметим, что оператор (1.3), (4.2) является тривиальным тогда и только тогда, когда $\widehat{S}(\lambda) \equiv \text{const}$.

Прежде чем приступить к доказательству основной теоремы, приведем еще одну вспомогательную лемму.

ЛЕММА 3. Пусть множество $V \subset \mathbb{C}$ является множеством единственности для $H(\mathbb{C})$. Тогда множество $\text{span}\{G_\lambda(z), \lambda \in V\}$ плотно в $H(\mathbb{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы проводится аналогично доказательству теоремы 7.3 из [12].

5. Доказательство основной теоремы. Этот пункт посвящен доказательству теоремы 1. Докажем вначале, что любой нетривиальный оператор (1.3), (4.2) является гиперциклическим на $H(\mathbb{C})$. Поскольку $H(\mathbb{C})$ является пространством Фреше, то можно воспользоваться следующей теоремой из работы [13].

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – пространство Фреше, $\Phi: X \rightarrow X$ – линейный непрерывный оператор. Если найдутся P, Q – плотные подмножества в X и отображение $\Psi: Q \rightarrow Q$ такие, что

- 1) $\Phi^n p \rightarrow 0$ для любого $p \in P$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $\Psi^n q \rightarrow 0$ для любого $q \in Q$ при $n \rightarrow \infty$;
- 3) композиция $\Phi \circ \Psi$ является тождественным оператором на Q ,

то Φ является гиперциклическим оператором на X .

С помощью характеристической функции $\widehat{S}(\lambda)$ оператора (1.3) определим следующие множества:

$$V = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\widehat{S}(\lambda)| < 1\}, \quad W = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\widehat{S}(\lambda)| > 1\}.$$

Так как функция $\widehat{S}(\lambda)$ не равна тождественно константе, то V и W являются непустыми открытыми подмножествами в $\mathbb{C}$ и, следовательно, множествами единственности для $H(\mathbb{C})$. Определим множества

$$P = \text{span}\{G_\lambda(z), \lambda \in V\}, \quad Q = \text{span}\{G_\lambda(z), \lambda \in W\}.$$

Согласно лемме 3 P и Q являются плотными подмножествами в $H(\mathbb{C})$. Заметим, что

$$D_G^k[G_\lambda](z) = \lambda^k G_\lambda(z), \quad \widetilde{T}_z[G_\lambda](w) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k z^k \lambda^k G_\lambda(w) = G_\lambda(z) G_\lambda(w),$$

$$\widetilde{M}_S[G_\lambda](z) = \langle S, \widetilde{T}_z[G_\lambda](w) \rangle = \langle S, G_\lambda(z) G_\lambda(w) \rangle = \widehat{S}(\lambda) G_\lambda(z).$$

Определим оператор $\Psi: Q \rightarrow Q$ следующим образом:

$$\Psi[G_\lambda](z) = \frac{G_\lambda(z)}{\widehat{S}(\lambda)} \quad \forall G_\lambda \in Q.$$

Тогда выполняются следующие условия:

- 1) $\widetilde{M}_S^n[G_\lambda](z) = (\widehat{S}(\lambda))^n G_\lambda(z) \rightarrow 0$ для всех $G_\lambda \in P$ равномерно на компактах по z ;
- 2) $\Psi^n[G_\lambda](z) = G_\lambda(z)/(\widehat{S}(\lambda))^n \rightarrow 0$ для всех $G_\lambda \in Q$ равномерно на компактах по z ;
- 3) $\widetilde{M}_S \circ \Psi[G_\lambda](z) \equiv G_\lambda(z)$ для всех $G_\lambda \in Q$.

Следовательно, согласно теореме 3 оператор (1.3) является гиперциклическим на пространстве $H(\mathbb{C})$.

Докажем теперь, что оператор (1.3) является хаотическим на $H(\mathbb{C})$. Для этого нам нужно показать, что оператор (1.3) удовлетворяет условиям (A), (B), (C) (см. введение). Однако, как было показано в работе [14], условие (A) в определении хаоса, сформулированном Девани, является излишним, так как оно вытекает из условий (B) и (C). Известно также (см., например, [15; глава 6]), что если X является пространством Фреше, то для линейного непрерывного оператора $\Phi: X \rightarrow X$ топологическая транзитивность (условие (B)) равносильна гиперциклическости. Таким образом, нам остается показать, что оператор (1.3) удовлетворяет условию (C).

Рассмотрим множество

$$Y = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\widehat{S}(\lambda))^n = 1, \exists n \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда множество $U = \text{span}\{G_\lambda(z), \lambda \in Y\}$ состоит из периодических точек оператора (1.3). Действительно

$$\forall G_\lambda \in U \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad \widetilde{M}_S^n[G_\lambda](z) = (\widehat{S}(\lambda))^n G_\lambda(z) = G_\lambda(z).$$

Так как функция $\widehat{S}(\lambda)$ не равна тождественно константе, то найдется некоторый компакт $K \subset \mathbb{C}$ такой, что в K содержится бесконечно много точек из множества Y (см., например, [16; предложение 3.7]). Следовательно, множество $Y \subset \mathbb{C}$ содержит предельную точку и, таким образом, является множеством единственности для $H(\mathbb{C})$. Тогда согласно лемме 3 U является плотным подмножеством в $H(\mathbb{C})$. Это означает, что оператор (1.3) удовлетворяет условию (C) и, следовательно, является хаотическим оператором на пространстве $H(\mathbb{C})$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. О. Гельфонд, А. Ф. Леонтьев, “Об одном обобщении ряда Фурье”, *Матем. сб.*, **29**:3 (1951), 477–500.
- [2] А. Ф. Леонтьев, *Обобщения рядов экспонент*, Наука, М., 1981.
- [3] B. Beauzamy, “Un opérateur, sur l’espace de Hilbert, dont tous les polynômes sont hypercycliques”, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.*, **303**:18 (1986), 923–925.
- [4] K.-G. Grosse-Erdmann, “Universal families and hypercyclic operators”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **36**:3 (1999), 345–381.
- [5] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Stud. Nonlinearity, Addison-Wesley Publ., Redwood City, CA, 1989.

- [6] G. D. Birkhoff, “Démonstration d’un théorème élémentaire sur les fonctions entières”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **189** (1929), 473–475.
- [7] G. R. MacLane, “Sequences of derivatives and normal families”, *J. Analyse Math.*, **2**:1 (1952), 72–87.
- [8] G. Godefroy, J. H. Shapiro, “Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds”, *J. Funct. Anal.*, **98**:2 (1991), 229–269.
- [9] J. J. Betancor, M. Sifi, K. Trimèche, “Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with the Dunkl operators on $\mathbb{C}$ ”, *Acta Math. Hungar.*, **106**:1–2 (2005), 101–116.
- [10] C. F. Dunkl, “Differential-difference operators associated with reflections groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **311**:1 (1989), 167–183.
- [11] M. Rösler, “Dunkl operators: theory and applications”, *Orthogonal Polynomials and Special Functions* (Leuven, 2002), Lecture Notes in Math., **1817**, Springer-Verlag, Berlin, 2003, 93–135.
- [12] А. Ф. Леонтьев, *Целые функции. Ряды экспонент*, Наука, М., 1983.
- [13] R. M. Gethner, J. H. Shapiro, “Universal vectors for operators on space of holomorphic functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **100**:2 (1987), 281–288.
- [14] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, “On Devaney’s definition of chaos”, *Amer. Math. Monthly*, **99**:4 (1992), 332–334.
- [15] Р. М. Кроновер, *Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории*, Постмаркет, М., 2000.
- [16] J. J. Betancor, J. D. Betancor, J. M. Méndez, “Hypercyclic and chaotic convolution operators in Chébli–Trimèche hypergroups”, *Rocky Mountain J. Math.*, **34**:4 (2004), 1207–1237.

В. Э. Ким

Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН

E-mail: kim@matem.anrb.ru

Поступило

15.01.2008