Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Е. Иванов, Наиболее удаленные точки и сильная выпуклость множеств, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 3, 382–395

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4428>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 17:09:10

Наиболее удаленные точки и сильная выпуклость множеств

Г. Е. Иванов

Рассматриваются вопросы существования и единственности точки заданного множества A в банаховом пространстве E , наиболее удаленной от заданной точки x пространства E . Предполагается, что A – выпуклое, замкнутое и ограниченное множество в равномерно выпуклом банаховом пространстве E с дифференцируемой по Фреше нормой. Показано, что для любой достаточно удаленной от множества A точки x наиболее удаленная от x точка множества A существует, единственна и непрерывно зависит от точки x тогда и только тогда, когда множество A в сумме Минковского с некоторым другим множеством дает шар. При этом наиболее удаленная от x точка множества A непрерывно зависит и от множества A в смысле метрики Хаусдорфа. В случае, если шар нормы пространства E является порождающим множеством, указанные условия на множество A эквивалентны его сильной выпуклости.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. В задачах оптимизации возникает вопрос, при каких условиях на множество A существует и единственна точка множества A , наиболее удаленная от заданной точки x пространства. Отображение, ставящее в соответствие точке x и множеству A наиболее удаленную от x точку множества A , называется *метрической антипроекцией*. При реализации численных методов оптимизации весьма важно определить условия, при которых метрическая антипроекция точки x на множество A непрерывна относительно точки x и множества A .

Свойства метрической антипроекции рассматривались в работах [1]–[5]. В работе [4] исследована взаимосвязь непрерывности метрической антипроекции и гладкости функции уклонения. В статье [5] в гильбертовом пространстве доказано, что совокупность условий существования, единственности и липшицевой зависимости от x метрической антипроекции x на множество A для точек x , достаточно удаленных от множества A , эквивалентна сильной выпуклости множества A . В настоящей работе результаты работы [5] обобщены на равномерно выпуклые банаховы пространства с дифференцируемой по Фреше нормой. При этом вместо липшицевой зависимости метрической проекции рассматривается ее непрерывная зависимость, а вместо сильной выпуклости множества A требуется, чтобы множество A в сумме Минковского с некоторым другим множеством давало бы шар.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00156) и АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант № 2.1.1/500).

Рассматриваемая здесь задача нахождения метрической антипроекции имеет много общего с задачей о нахождении метрической проекции, которая, в свою очередь, является важной задачей теории приближений [6]–[9]. В этом смысле свойство существования и единственности метрической антипроекции точки x на множество A для любой точки x , достаточно удаленной от A , соответствует свойству множества обладать чебышевским слоем [10]. Свойство анτισолнечности множества соответствует свойству солнечности [6]–[9]. Сильная выпуклость множества [11] соответствует проксимальной гладкости [12], [13].

Пусть E – нормированное пространство. Будем обозначать границу множества $A \subset E$ символом ∂A . Через $\langle p, x \rangle$ будем обозначать значение функционала $p \in E^*$ на векторе $x \in E$. Для вектора $a \in E$ и функционала $p_0 \in E^*$ через $\mathfrak{B}_R(a)$ и $\mathfrak{B}_R^*(p_0)$ будем обозначать замкнутые шары радиуса R в пространствах E и E^* соответственно:

$$\mathfrak{B}_R(a) = \{x \in E : \|x - a\| \leq R\}, \quad \mathfrak{B}_R^*(p_0) = \{p \in E^* : \|p - p_0\|_* \leq R\}.$$

Уклонением множества $A \subset E$ от точки $x \in E$ называется

$$f_A(x) = \sup_{a \in A} \|x - a\|.$$

Множеством наиболее удаленных от точки $x \in E$ точек множества A называется

$$F_A(x) = \{a \in A : \|x - a\| = f_A(x)\}.$$

Отображение $x \mapsto F_A(x)$ называется метрической антипроекцией.

Расстоянием Хаусдорфа между двумя множествами $A, B \subset E$ называется

$$h(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\}.$$

Модуль выпуклости $\delta_E: (0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ нормированного пространства E определяется формулой

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{1}{2} \|x + y\| : x, y \in E, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}.$$

Нормированное пространство E называется *равномерно выпуклым*, если $\delta_E(\varepsilon) > 0$ для любого $\varepsilon \in (0; 2]$. Нормированное пространство E называется *строго выпуклым*, если единичная сфера $\partial \mathfrak{B}_1(0)$ не содержит отрезков, и *локально равномерно выпуклым*, если для любой последовательности $\{x_k\} \subset \partial \mathfrak{B}_1(0)$ и любой точки $x \in \partial \mathfrak{B}_1(0)$ соотношение $\|x_k + x\| \rightarrow 2$ влечет $x_k \rightarrow x$. Непосредственно из определений следует, что любое равномерно выпуклое пространство является локально равномерно выпуклым, а любое локально равномерно выпуклое пространство – строго выпуклым.

Будем говорить, что нормированное пространство E имеет дифференцируемую по Фреше норму, если в любой точке $x \in E \setminus \{0\}$ норма пространства E дифференцируема по Фреше.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если пространство E рефлексивно и локально равномерно выпукло, то согласно [14; следствие 1 (ii), § 2, гл. 2] пространство E^* имеет дифференцируемую по Фреше норму.

Для множества A в нормированном пространстве E и числа $r > 0$ определим множество

$$T_r(A) = \{x \in E : f_A(x) > r\}.$$

Пусть задано число $r > 0$. Множество A в нормированном пространстве E называется r -антисолнцем, если оно замкнуто, ограничено и $a \in F_A(a + r(x - a)/\|x - a\|)$ для любых векторов $x \in T_r(A)$ и $a \in F_A(x)$.

Легко видеть, что если множество A является r -антисолнцем и $F_A(x) \neq \emptyset$ при некотором $x \in T_r(A)$, то чебышевский радиус $\inf\{t > 0 : \exists a \in E \ A \subset \mathfrak{B}_t(a)\}$ множества A не превосходит числа r .

Множество A в нормированном пространстве E называется *сильно выпуклым* с константой $r > 0$, если существует множество $A_1 \subset E$ такое, что

$$A = \bigcap_{a \in A_1} \mathfrak{B}_r(a).$$

Для множества $A \subset E$ и функционала $p \in E^*$ через $s(p, A)$ обозначим значение *опорной функции* множества A :

$$s(p, A) = \sup_{x \in A} \langle p, x \rangle.$$

Для множеств $A, C \subset E$ через $A + C$ обозначим их *сумму Минковского*:

$$A + C = \{a + c : a \in A, c \in C\}.$$

Пусть E – рефлексивное банахово пространство. Выпуклое замкнутое ограниченное множество $M \subset E$ называется *порождающим*, если для любого множества $A_1 \subset E$ такого, что множество $A = \bigcap_{a \in A_1} (M + a)$ не пусто, найдется выпуклое замкнутое множество $C \subset E$ такое, что $A + C = M$.

Свойства порождающих и сильно выпуклых множеств рассмотрены, например, в [11].

2. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть E – рефлексивное, локально равномерно выпуклое банахово пространство, имеющее дифференцируемую по Фреше норму. Пусть заданы число $r > 0$ и выпуклое замкнутое ограниченное множество $A \subset E$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (a) функция уклонения f_A дифференцируема по Фреше на $T_r(A)$;
- (b) для любого вектора $x \in T_r(A)$ любая последовательность $\{a_k\} \subset A$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k - x\| = f_A(x)$, сходится;
- (c) метрическая антипроекция однозначна и непрерывна на $T_r(A)$;
- (d) метрическая антипроекция однозначна на $T_r(A)$ и для любого вектора $x \in T_r(A)$ из любой последовательности $\{a_k\} \subset A$ такой, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k - x\| = f_A(x)$, можно выделить сходящуюся подпоследовательность;
- (e) метрическая антипроекция однозначна на $T_r(A)$, и множество A является r -антисолнцем.

ТЕОРЕМА 2. Пусть дополнительно к предположениям теоремы 1 пространство E равномерно выпукло. Тогда каждое из следующих условий эквивалентно любому из условий (a)–(e):

- (f) множество A является r -антисолнцем;

- (g) для любого $R > r$ метрическая антипроекция однозначна и равномерно непрерывна на $T_R(A)$;
- (h) существует выпуклое замкнутое множество $C \subset E$ такое, что $A + C = \mathfrak{B}_r(0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если дополнительно к предположениям теоремы 1 множество A компактно, то каждое из условий (a)–(e) эквивалентно следующему условию:

- (i) метрическая антипроекция однозначна на $T_r(A)$.

Это следует из того, что в случае компактности множества A условия (d) и (i) эквивалентны.

ТЕОРЕМА 3. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство. Пусть заданы числа $r > 0$, $R > r$. Пусть $\Omega(r, R)$ – множество всех пар (x, A) таких, что $A \subset E$ является r -антисолнцем, точка $x \in E$ удовлетворяет неравенству $f_A(x) \geq R$. Тогда отображение $(x, A) \mapsto F_A(x)$ однозначно и равномерно непрерывно на множестве $\Omega(r, R)$ в смысле метрики

$$\rho((x_1, A_1), (x_2, A_2)) = h(A_1, A_2) + \|x_1 - x_2\|, \quad (x_i, A_i) \in \Omega(r, R), \quad i = 1, 2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если выпуклое замкнутое множество A в банаховом пространстве E удовлетворяет условию (h) теоремы 2, то множество A сильно выпукло с константой r . Это следует из теоремы об отделимости.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В рефлексивном банаховом пространстве любое сильно выпуклое с константой r множество A удовлетворяет условию (h) теоремы 2 тогда и только тогда, когда шар нормы пространства является порождающим множеством. Это непосредственно следует из определений сильно выпуклого и порождающего множеств.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Так как шар в гильбертовом пространстве является порождающим множеством [11], то в гильбертовом пространстве условия (a)–(h) теорем 1, 2 эквивалентны сильной выпуклости множества A с константой r .

3. Доказательство основных результатов.

ЛЕММА 1. Для любого замкнутого подмножества A банахова пространства E условия (b) и (d) теоремы 1 эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (d) очевидно следует из условия (b). Докажем обратное.

Пусть выполнено условие (d) теоремы 1. Предположим, что условие (b) теоремы 1 не выполнено, т.е. существуют вектор $x \in T_r(A)$ и расходящаяся последовательность $\{a_k\} \subset A$ такие, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k - x\| = f_A(x)$. В силу условия (d) множество $F_A(x)$ состоит из единственного элемента $a_0 \in E$. Поскольку последовательность $\{a_k\}$ расходится, из нее можно выделить подпоследовательность $\{a_{k_j}\}$ такую, что $\|a_{k_j} - a_0\| \geq \varepsilon > 0$ для любого $j \in \mathbb{N}$. В силу условия (d) последовательность $\{a_{k_j}\}$ имеет предельную точку a'_0 . При этом $a'_0 \in F_A(x)$ и $a'_0 \neq a_0$, что противоречит одноэлементности множества $F_A(x)$.

ЛЕММА 2. Пусть в банаховом пространстве E задано множество A , и пусть $a \in F_A(x)$. Тогда для любого вектора $y \in E$ такого, что $x \in [a; y]$, справедливо включение $a \in F_A(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО элементарно.

ЛЕММА 3 [14; теорема 1, § 2, гл. 2]. Пусть E – банахово пространство. Пусть для любого вектора $x \in \partial \mathfrak{B}_1(0)$ существует $p(x)$ – производная Фреше нормы пространства E в точке x . Тогда

- 1) функция $p: \partial \mathfrak{B}_1(0) \rightarrow E^*$ непрерывна;
- 2) для любого вектора $x \in \partial \mathfrak{B}_1(0)$ и функционала $p \in E^*$ равенства $\langle p, x \rangle = \|p\|_* = 1$ эквивалентны равенству $p = p(x)$.

ЛЕММА 4 [4; лемма 2.2 (b)]. Пусть в банаховом пространстве E задано множество A ; пусть $x \in E$, $a \in F_A(x)$. Пусть функционал $p \in E^*$ является производной Гато функции f_A в точке x . Тогда

$$\|p\|_* = 1, \quad \langle p, x - a \rangle = \|x - a\|.$$

ЛЕММА 5. Пусть A – ограниченное и замкнутое множество в банаховом пространстве E , пространство E^* имеет дифференцируемую по Фреше норму. Пусть функция f_A дифференцируема по Фреше в точке $x_0 \in E$. Тогда

- (1) любая последовательность $\{a_k\} \subset A$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k - x_0\| = f_A(x_0)$, сходится;
- (2) если последовательность $\{x_k\} \subset E$ сходится к x_0 и $a_k \in F_A(x_k)$ для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то последовательность $\{a_k\}$ сходится к a_0 ;
- (3) множество $F_A(x_0)$ одноэлементно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (1) доказано [4; следствие 2.7 (b)]. Утверждения (2) и (3) следуют из (1).

ЛЕММА 6. Пусть E – строго выпуклое банахово пространство, а множество $A \subset E$ ограничено и замкнуто. Пусть функция f_A дифференцируема по Гато в точке $z \in E$. Пусть

$$D = \{x \in E : f_A(x) \leq f_A(z)\},$$

$y \in E \setminus D$, $\|z - y\| = \inf_{x \in D} \|x - y\|$, $a \in F_A(z)$. Тогда $z \in [a; y]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p – производная Гато функции f_A в точке z . Обозначим $w_0 = (y - z)/\|y - z\|$. Покажем, что

$$\langle p, w_0 \rangle \geq \langle p, w \rangle \quad \text{для любого } w \in \mathfrak{B}_1(0). \quad (3.1)$$

Предположим, что соотношение (3.1) не выполнено, т.е. существует вектор $w \in \mathfrak{B}_1(0)$ такой, что $\langle p, w_0 - w \rangle < 0$. Отсюда и из формулы Тейлора

$$f_A(z + t(w_0 - w)) = f_A(z) + t\langle p, w_0 - w \rangle + o(t)$$

при $t \rightarrow +0$ получаем существование числа $t_0 > 0$ такого, что $f_A(z + t(w_0 - w)) < f_A(z)$ для любого $t \in (0; t_0)$. Поэтому при $t \in (0; t_0)$ точка $z + t(w_0 - w)$ является внутренней точкой множества D . Так как $\|z - y\| = \inf_{x \in D} \|x - y\|$, то

$$\|z + t(w_0 - w) - y\| > \|z - y\| \quad \text{при } t \in (0; t_0).$$

Отсюда и из включения $w \in \mathfrak{B}_1(0)$ следует, что $\|z - y + tw_0\| > \|z - y\| - t$ при $t \in (0; t_0)$, что вместе с равенством $w_0 = (y - z)/\|y - z\|$ дает противоречие при достаточно малом t . Полученное противоречие доказывает соотношение (3.1).

Так как при $z = a$ утверждение леммы тривиально выполнено, то будем предполагать, что $z \neq a$. Согласно лемме 4 справедливы равенства

$$\left\langle p, \frac{z - a}{\|z - a\|} \right\rangle = \|p\|_* = 1.$$

Отсюда в силу соотношения (3.1) имеем

$$\langle p, w_0 \rangle = \max_{w \in \mathfrak{B}_1(0)} \langle p, w \rangle = \|p\|_* = 1.$$

Поэтому в силу строгой выпуклости пространства E получаем

$$\frac{z - a}{\|z - a\|} = w_0 = \frac{y - z}{\|y - z\|}.$$

Отсюда следует, что $z \in [a; y]$.

ЛЕММА 7. Пусть E – рефлексивное и локально равномерно выпуклое банахово пространство, множество $A \subset E$ ограничено и замкнуто. Пусть функция f_A дифференцируема по Фреше в некоторой окрестности точки $x_0 \in E \setminus A$. Пусть $a_0 \in F_A(x_0)$. Тогда существует число $t_0 > 0$ такое, что $a_0 \in F_A(x_0 + t_0(a_0 - x_0))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию доказываемой леммы существует число $\delta > 0$ такое, что функция f_A дифференцируема по Фреше в $\mathfrak{B}_{3\delta}(x_0)$. Пусть функционал $p_0 \in E^*$ является производной Фреше функции f_A в точке x_0 . Тогда

$$f_A(x_0 + \tau(a_0 - x_0)) - f_A(x_0) = \tau \langle p_0, a_0 - x_0 \rangle + o(\tau)$$

при $\tau \rightarrow 0$. В силу леммы 4 имеем $\langle p_0, a_0 - x_0 \rangle = -\|x_0 - a_0\| < 0$. Поэтому существует число $t > 0$ такое, что для вектора

$$x_t = x_0 + t(a_0 - x_0)$$

справедливы неравенства

$$f_A(x_t) < f_A(x_0), \quad \|x_t - x_0\| < \delta.$$

Определим замкнутое множество

$$D = \{x \in E : f_A(x) \leq f_A(x_t)\}.$$

В силу теоремы Конягина [15] существует последовательность векторов $y_k \in \mathfrak{B}_\delta(x_0)$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = x_0$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ существует z_k – ближайшая к y_k точка множества D , т.е. $z_k \in D$ и $\|z_k - y_k\| = \inf_{x \in D} \|x - y_k\|$. Заметим, что

$$\|z_k - y_k\| = \inf_{x \in D} \|x - y_k\| \leq \inf_{x \in D} \|x - x_0\| + \|x_0 - y_k\| \leq \|x_0 - x_t\| + \|x_0 - y_k\| < 2\delta,$$

$$\|z_k - x_0\| \leq \|z_k - y_k\| + \|x_0 - y_k\| < 3\delta.$$

Следовательно, функция f_A дифференцируема по Фреше в точках z_k . Поэтому согласно замечанию 1 и лемме 5, (3) существуют векторы $a_k \in E$ такие, что

$$a_k \in F_A(z_k) \quad \text{для любого } k \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Так как $f_A(x_t) < f_A(x_0)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = x_0$, то существует индекс k_0 такой, что $f_A(x_t) < f_A(y_k)$ при $k \geq k_0$. Поэтому $y_k \notin D$ при $k \geq k_0$. Покажем, что

$$z_k \in [a_k; y_k] \quad \text{для любого } k \geq k_0. \quad (3.3)$$

Зафиксируем произвольный индекс $k \geq k_0$. Поскольку $y_k \notin D$ и $\|z_k - y_k\| = \inf_{x \in D} \|x - y_k\|$, то $z_k \in \partial D$. Следовательно, $f_A(z_k) = f_A(x_t)$ и

$$D = \{x \in E : f_A(x) \leq f_A(z_k)\}.$$

Применяя лемму 6 для $a = a_k$, $y = y_k$, $z = z_k$, получаем включение (3.3). В силу леммы 2 и соотношений (3.2), (3.3) получаем включение

$$a_k \in F_A(y_k) \quad \text{для любого } k \geq k_0.$$

Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = x_0$, то в силу леммы 5, (2) имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a_0. \quad (3.4)$$

Из включения (3.3) получаем равенство

$$z_k = a_k + \frac{\|z_k - a_k\|}{\|y_k - a_k\|}(y_k - a_k).$$

Поскольку $\|z_k - a_k\| = f_A(z_k) = f_A(x_t)$, то $z_k = a_k + f_A(x_t)(y_k - a_k)/\|y_k - a_k\|$. Отсюда и из соотношений $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = x_0$, (3.4) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0, \quad \text{где } z_0 = a_0 + \frac{f_A(x_t)}{\|x_0 - a_0\|}(x_0 - a_0).$$

Обозначим $t_0 = 1 - f_A(x_t)/\|x_0 - a_0\|$. Так как $f_A(x_t) < f_A(x_0) = \|x_0 - a_0\|$, то $t_0 > 0$. Поскольку $a_k \in F_A(z_k)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a_0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0$, то $a_0 \in F_A(z_0)$. Используя равенство $z_0 = x_0 + t_0(a_0 - x_0)$, получаем доказываемое утверждение.

ЛЕММА 8. Пусть E – рефлексивное и локально равномерно выпуклое банахово пространство, множество $A \subset E$ ограничено и замкнуто. Пусть функция f_A дифференцируема по Фреше на множестве $T_r(A)$. Пусть $x \in T_r(A)$, $a_0 \in F_A(x)$. Тогда

$$a_0 \in F_A\left(a_0 + \frac{r}{\|x - a_0\|}(x - a_0)\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого числа t определим $a_t = a_0 + t(x - a_0)/\|x - a_0\|$. Предположим, что доказываемое утверждение не выполнено, т.е. $a_0 \notin F_A(a_r)$. Определим

$$t_* = \sup\{t > 0 : a_0 \notin F_A(a_t)\}.$$

В силу леммы 2

$$a_0 \notin F_A(a_t) \quad \text{для любого } t < t_*. \quad (3.5)$$

Так как $a_0 \in F_A(x)$ и $x = a_t$ при $t = \|x - a_0\|$, то $t_* \leq \|x - a_0\| < \infty$.

Поскольку $a_0 \in F_A(a_t)$ для любого $t > t_*$, то $a_0 \in F_A(a_{t_*})$. Отсюда и из условия $a_0 \notin F_A(a_r)$ следует, что $t_* > r$. Поэтому $f_A(a_{t_*}) \geq \|a_{t_*} - a_0\| = t_* > r$, т.е. $a_{t_*} \in T_r(A)$.

Следовательно, функция f_A дифференцируема по Фреше в некоторой окрестности точки $x_0 = a_{t_*}$. В силу леммы 7 существует число $t_0 > 0$ такое, что

$$a_0 \in F_A(x_0 + t_0(a_0 - x_0)) = F_A(a_t), \quad \text{где} \quad t = t_* - t_0 \|x_0 - a_0\| < t_*,$$

что противоречит соотношению (3.5).

ЛЕММА 9. Пусть E – локально равномерно выпуклое банахово пространство, множество $A \subset E$ ограничено и замкнуто. Тогда из условия (е) теоремы 1 следует условие (b) этой теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено условие (е) теоремы 1. Зафиксируем произвольные вектор $x \in T_r(A)$ и последовательность $\{a_k\} \subset A$, удовлетворяющую условию $\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k - x\| = f_A(x)$. Требуется доказать, что последовательность $\{a_k\}$ сходится. Обозначим $R = f_A(x)$. Так как $x \in T_r(A)$, то $R > r$. В силу условия (е) теоремы 1 существует вектор $a_0 \in F_A(x)$ и для вектора $y = a_0 + r(x - a_0)/R$ справедливо включение $a_0 \in F_A(y)$. Отсюда и из равенства $\|y - a_0\| = r$ следует, что $A \subset \mathfrak{B}_r(y)$. Поэтому $\|y - a_k\| \leq r$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$\alpha = \frac{R - r}{R}, \quad x_0 = \frac{a_0 - x}{R}.$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим

$$R_k = \|a_k - x\|, \quad z_k = \frac{a_k - x}{R_k}, \quad \varepsilon_k = \|z_k - \alpha x_0\| - 1 + \alpha.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \left\| \frac{a_k - x}{R_k} - \frac{y - x}{R} \right\| - \frac{r}{R} \\ &\leq \frac{\|y - a_k\|}{R_k} + \|y - x\| \left| \frac{1}{R_k} - \frac{1}{R} \right| - \frac{r}{R} \leq (r + \|y - x\|) \left| \frac{1}{R_k} - \frac{1}{R} \right| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

в силу леммы Стечкина [16; лемма 2] диаметры множеств

$$M_k = \mathfrak{B}_{1-\alpha+\varepsilon_k}(\alpha x_0) \setminus \mathfrak{B}_1(0)$$

стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$. Поскольку векторы z_k и x_0 содержатся в замыкании множества M_k , то $z_k \rightarrow x_0$. Следовательно, $a_k \rightarrow a_0$.

Следующая лемма представляет собой равномерный вариант леммы Стечкина [16; лемма 2].

ЛЕММА 10 [17; лемма 3.4]. Пусть E – банахово пространство с модулем выпуклости δ_E . Пусть заданы точки $x, y, a' \in E$ и число $r > 0$ такие, что $x \neq y$ и $\|y - a'\| \leq r \leq \|x - a'\|$. Пусть $a = y + r(y - x)/\|x - y\|$. Тогда

$$2\delta_E \left(\frac{\|a - a'\|}{r} \right) \min\{r, \|x - y\|\} \leq r + \|x - y\| - \|x - a'\|.$$

ЛЕММА 11. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство с модулем выпуклости δ_E . Пусть множество $A \subset E$ является r -антисолнцем. Пусть заданы векторы $x_0 \in E$, $a_1, a_2 \in A$ и число $\Delta \geq 0$ такие, что $f_A(x_0) > r + \Delta$, $\|x_0 - a_i\| \geq f_A(x_0) - \Delta$ при $i = 1, 2$. Тогда

$$2\delta_E\left(\frac{\|a_1 - a_2\|}{2r}\right) \min\{r, f_A(x_0) - r\} \leq \Delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $R = f_A(x_0)$. Зафиксируем произвольное положительное число $\sigma < R - r - \Delta$. В силу теоремы Эделштейна [2] существует вектор $x \in \mathfrak{B}_\sigma(x_0)$ такой, что $F_A(x) \neq \emptyset$. Пусть $a \in F_A(x)$. Обозначим $y = a + r(x - a)/\|x - a\|$. Так как $\sigma < R - r$, то $x \in T_r(A)$ и в силу того, что множество A является r -антисолнцем, справедливо включение $a \in F_A(y)$. Отсюда и из равенства $\|y - a\| = r$ следует, что $A \subset \mathfrak{B}_r(y)$. Поэтому $\|y - a_i\| \leq r$ при $i = 1, 2$. Заметим, что $a = y + r(y - x)/\|x - y\|$,

$$\|x - a_i\| \geq \|x_0 - a_i\| - \sigma \geq R - \Delta - \sigma > r \quad \text{при } i = 1, 2.$$

Применяя лемму 10 для $a' = a_i$, получаем неравенства

$$2\delta_E\left(\frac{\|a - a_i\|}{r}\right) \min\{r, \|x - y\|\} \leq r + \|x - y\| - \|x - a_i\|, \quad i = 1, 2. \quad (3.6)$$

Так как

$$\|x - a\| - R = |f_A(x) - f_A(x_0)| \leq \|x - x_0\| \leq \sigma$$

и $\|x - y\| = \|x - a\| - r$, то

$$R - r - \sigma \leq \|x - y\| \leq R - r + \sigma.$$

Отсюда и из неравенств (3.6), $\|x - a_i\| \geq R - \Delta - \sigma$ следует, что

$$2\delta_E\left(\frac{\|a - a_i\|}{r}\right) \min\{r, R - r - \sigma\} \leq \Delta + 2\sigma, \quad i = 1, 2.$$

Поэтому в силу монотонности модуля выпуклости

$$2\delta_E\left(\frac{\|a_1 - a_2\|}{2r}\right) \min\{r, R - r - \sigma\} \leq \Delta + 2\sigma.$$

Переходя к пределу при $\sigma \rightarrow +0$, получаем доказываемое неравенство.

ЛЕММА 12. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство. Пусть множество $A \subset E$ является r -антисолнцем. Тогда выполнено условие (g) теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольный вектор $x_0 \in T_r(A)$. Поскольку $f_A(x_0) = \sup_{a \in A} \|a - x_0\|$, существует последовательность $\{a_k\} \subset A$ такая, что $\|a_k - x_0\| \rightarrow f_A(x_0)$. В силу леммы 11 последовательность $\{a_k\}$ фундаментальна, а значит, сходится к некоторому элементу $a_0 \in F_A(x_0)$. Отсюда и из леммы 11 следует одноэлементность множества $F_A(x_0)$. Итак, доказано, что для любого вектора $x \in T_r(A)$ множество $F_A(x)$ состоит из одной точки, которую мы обозначим $a(x)$.

Зафиксируем произвольное число $R > r$ и покажем, что функция $a: T_R(A) \rightarrow A$ равномерно непрерывна. Пусть $x_1, x_2 \in T_R(A)$, $a_i = a(x_i)$, $i = 1, 2$. Так как

$$\|a_2 - x_1\| \geq \|a_2 - x_2\| - \|x_1 - x_2\| = f_A(x_2) - \|x_1 - x_2\| \geq f_A(x_1) - 2\|x_1 - x_2\|,$$

применяя лемму 11 для $x_0 = x_1$, $\Delta = 2\|x_1 - x_2\|$, при $\|x_1 - x_2\| \leq (R - r)/2$ получаем неравенства

$$2\delta_E\left(\frac{\|a_1 - a_2\|}{2r}\right) \min\{r, R - r\} \leq 2\delta_E\left(\frac{\|a_1 - a_2\|}{2r}\right) \min\{r, f_A(x_1) - r\} \leq \Delta = 2\|x_1 - x_2\|.$$

Итак, в силу монотонности модуля выпуклости имеем

$$\forall \varepsilon \in (0; 2r) \quad \exists \delta = \delta_E\left(\frac{\varepsilon}{2r}\right) \min\{r, R - r\} > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in T_R(A) \\ \|x_1 - x_2\| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|a(x_1) - a(x_2)\| \leq \varepsilon.$$

Поэтому для любого числа $R > r$ функция $a: T_R(A) \rightarrow A$ равномерно непрерывна.

ЛЕММА 13 [17; лемма 3.21]. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство с модулем выпуклости δ_E . Пусть множество $A \subset E$ сильно выпукло с константой $r > 0$. Пусть заданы число $\varepsilon \in (0; 2)$, точки $a_1, a_2 \in A$ и функционалы $p_1, p_2 \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ такие, что $\|p_1 - p_2\|_* < 4\delta_E(\varepsilon)/\varepsilon$, $\langle p_i, a_i \rangle = s(p_i, A)$ при $i = 1, 2$, где $s(p_i, A)$ – значение опорной функции. Тогда $\|a_1 - a_2\| < r\varepsilon$.

ЛЕММА 14. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство, имеющее дифференцируемую по Фреше норму. Пусть множество $A \subset E$ выпукло и является r -антисомнцем. Тогда существует выпуклое замкнутое множество $C \subset E$ такое, что $A + C = \mathfrak{B}_r(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу слабой компактности множеств A и $\mathfrak{B}_1(0)$ для любого функционала $p \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ существуют векторы $x_A(p) \in A$, $x_B(p) \in \mathfrak{B}_1(0)$ такие, что

$$\langle p, x_A(p) \rangle = s(p, A), \quad \langle p, x_B(p) \rangle = s(p, \mathfrak{B}_1(0)) = 1. \quad (3.7)$$

Покажем, что

$$A \subset \mathfrak{B}_r(x_A(q) - rx_B(q)) \quad \text{для любого } q \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0). \quad (3.8)$$

Зафиксируем произвольный функционал $q \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$. Для любого числа t определим

$$b(t) = x_A(q) - tx_B(q). \quad (3.9)$$

Так как множество A ограничено, существует число $t_0 > 0$ такое, что $b(t) \in T_r(A)$ для любого $t \geq t_0$. В силу леммы 12 множество $F_A(x)$ одноэлементно при $x \in T_r(A)$. Поэтому при $t \geq t_0$ существует вектор $a(t) \in F_A(b(t))$. Поскольку $a(t) \in A$, множество A ограничено; согласно равенству (3.9) имеем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a(t) - b(t)}{\|a(t) - b(t)\|} = \frac{x_B(q)}{\|x_B(q)\|} = x_B(q). \quad (3.10)$$

При $t \geq t_0$ определим функционал $p_t \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ как производную Фреше нормы пространства E в точке $(a(t) - b(t))/\|a(t) - b(t)\|$. Согласно соотношениям (3.7)

имеем $\langle q, x_B(q) \rangle = 1$. Поэтому в силу леммы 3 и соотношения (3.10) функционал q является производной Фреше нормы E в точке $x_B(q)$ и справедливо соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p_t = q. \quad (3.11)$$

Из леммы 3 также следуют равенства

$$\|p_t\|_* = 1, \quad \langle p_t, a(t) - b(t) \rangle = \|a(t) - b(t)\|. \quad (3.12)$$

Так как $a(t) \in F_A(b(t))$ при $t \geq t_0$, для любого $t \geq t_0$ справедливо включение

$$A \subset \mathfrak{B}_{\|a(t)-b(t)\|}(b(t)).$$

Отсюда, из равенств (3.12) и включения $a(t) \in A$ получаем равенства

$$\langle p_t, a(t) \rangle = \max_{x \in A} \langle p_t, x \rangle = s(p_t, A).$$

В силу [5; теорема 4] множество A сильно выпукло с константой r . Поэтому согласно лемме 13 и соотношению (3.11) имеем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_A(p_t) = x_A(q). \quad (3.13)$$

Поскольку при $t \geq t_0$ справедливы включения $b(t) \in T_r(A)$, $a(t) \in F_A(b(t))$, в силу антисолнечности множества A получаем включение

$$A \subset \mathfrak{B}_r\left(a(t) - \frac{r(a(t) - b(t))}{\|a(t) - b(t)\|}\right) \quad \text{для любого } t \geq t_0.$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow +\infty$ и используя соотношения (3.10), (3.13), получаем включение (3.8).

Дальнейшее доказательство леммы повторяет рассуждения, проведенные при доказательстве [11; теорема 4.1.2]. Определим множество C как замыкание выпуклой оболочки множества $C_1 = \bigcup_{q \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)} (rx_B(q) - x_A(q))$. Тогда для любого функционала $p \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ справедливы равенства

$$s(p, C) = s(p, C_1) = \sup_{q \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)} \langle p, rx_B(q) - x_A(q) \rangle. \quad (3.14)$$

Из включения (3.8) следует, что для любого функционала $p \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} s(p, A) &\leq \inf_{q \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)} s(p, \mathfrak{B}_r(x_A(q) - rx_B(q))) = r - \sup_{q \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)} \langle p, rx_B(q) - x_A(q) \rangle \\ &\leq r - \langle p, rx_B(p) - x_A(p) \rangle = \langle p, x_A(p) \rangle = s(p, A). \end{aligned}$$

Отсюда и из равенств (3.14) следует, что

$$s(p, A) = r - \sup_{q \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)} \langle p, rx_B(q) - x_A(q) \rangle = r - s(p, C) \quad \text{для любого } p \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0).$$

Поэтому справедливы равенства

$$s(p, A + C) = s(p, A) + s(p, C) = r = s(p, \mathfrak{B}_r(0)) \quad \text{для любого } p \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0). \quad (3.15)$$

Так как множества A и C выпуклы, замкнуты и ограничены, они слабо компактны. Поэтому множество $A + C$ слабо компактно, а значит, замкнуто. Из соотношений (3.15), учитывая выпуклость и замкнутость множеств $A + C$ и $\mathfrak{B}_r(0)$, в силу теоремы об отделимости получаем равенство $A + C = \mathfrak{B}_r(0)$.

ЛЕММА 15. Пусть E – рефлексивное строго выпуклое банахово пространство. Пусть задано число $r > 0$ и выпуклые замкнутые множества $A, C \subset E$ такие, что $A + C = \mathfrak{B}_r(0)$. Тогда множество A является r -антисолнцем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in T_r(A)$, $a \in F_A(x)$. Обозначим $y = a + r(x - a)/\|x - a\|$. Требуется доказать, что $a \in F_A(y)$. Поскольку $a \in A$ и $\|a - y\| = r$, достаточно доказать включение

$$A \subset \mathfrak{B}_r(y). \quad (3.16)$$

Определим функционал $p \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ равенством $\langle p, a - x \rangle = \|a - x\|$. Тогда

$$\langle p, a - y \rangle = \|a - y\| = r. \quad (3.17)$$

Так как $a \in F_A(x)$, то $A \subset \mathfrak{B}_{\|x-a\|}(x)$. Следовательно,

$$s(p, A) \leq s(p, \mathfrak{B}_{\|x-a\|}(x)) = \|x - a\| + \langle p, x \rangle = \langle p, a \rangle \leq s(p, A).$$

В силу рефлексивности пространства E , а также слабой компактности множества C существует вектор $c \in C$ такой, что $\langle p, c \rangle = s(p, C)$. Тогда $a + c \in A + C = \mathfrak{B}_r(0)$ и

$$\langle p, a + c \rangle = s(p, A) + s(p, C) = s(p, A + C) = s(p, \mathfrak{B}_r(0)) = r.$$

Отсюда, из равенств (3.17) и строгой выпуклости шара $\mathfrak{B}_r(0)$ следует равенство $a + c = a - y$. Поэтому $A - y = A + c \subset A + C = \mathfrak{B}_r(0)$. Следовательно, справедливо включение (3.16).

ЛЕММА 16. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство с модулем выпуклости δ_E . Пусть заданы множества $A_1, A_2 \subset E$ и точки $x_1, x_2 \in E$. Пусть $f_{A_1}(x_1) \geq R > r > 0$, множество A_1 является r -антисолнцем. Пусть $a_i \in F_{A_i}(x_i)$ при $i = 1, 2$. Тогда

$$\delta_E\left(\frac{\|a_1 - a_2\|}{4r}\right) \min\{r, R - r\} \leq 2(h(A_1, A_2) + \|x_1 - x_2\|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное число $\sigma > 0$. По определению расстояния Хаусдорфа справедливо неравенство

$$|f_{A_1}(x_2) - f_{A_2}(x_2)| \leq h(A_1, A_2)$$

и существует точка $a'_2 \in A_1$ такая, что

$$\|a'_2 - a_2\| \leq h(A_1, A_2) + 2\sigma. \quad (3.18)$$

Отсюда и из неравенства $|f_{A_1}(x_1) - f_{A_1}(x_2)| \leq \|x_1 - x_2\|$ следует, что

$$\begin{aligned} \|a'_2 - x_1\| &\geq \|a_2 - x_2\| - \|x_1 - x_2\| - \|a'_2 - a_2\| = f_{A_2}(x_2) - \|x_1 - x_2\| - \|a'_2 - a_2\| \\ &\geq f_{A_1}(x_1) - h(A_1, A_2) - 2\|x_1 - x_2\| - \|a'_2 - a_2\| \\ &\geq f_{A_1}(x_1) - 2h(A_1, A_2) - 2\|x_1 - x_2\| - 2\sigma. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Delta = 2(h(A_1, A_2) + \|x_1 - x_2\| + \sigma).$$

Тогда

$$\|a'_2 - x_1\| \geq f_{A_1}(x_1) - \Delta. \quad (3.19)$$

Покажем, что

$$\delta_E \left(\frac{\|a_1 - a'_2\|}{2r} \right) \min\{r, R - r\} \leq \Delta. \quad (3.20)$$

Если $\Delta \geq R - r$, то неравенство (3.20) очевидно. Будем предполагать, что $\Delta < R - r$. Тогда применяя лемму 11 для $x_0 = x_1$, $a_2 = a'_2$ и используя неравенство (3.19), получаем неравенство (3.20). Покажем, что

$$\delta_E \left(\frac{\|a_1 - a_2\|}{4r} \right) \min\{r, R - r\} \leq \Delta = 2(h(A_1, A_2) + \|x_1 - x_2\| + \sigma). \quad (3.21)$$

Если $\|a_1 - a_2\| \leq 2\Delta$, то

$$\delta_E \left(\frac{\|a_1 - a_2\|}{4r} \right) \min\{r, R - r\} \leq \delta_E \left(\frac{\Delta}{2r} \right) r < \Delta$$

и неравенство (3.21) выполнено. В случае $\|a_1 - a_2\| > 2\Delta$ имеем

$$\frac{\|a_1 - a_2\|}{2} \leq \|a_1 - a_2\| - \Delta.$$

Поэтому согласно неравенству (3.18) получаем

$$\frac{\|a_1 - a_2\|}{2} \leq \|a_1 - a_2\| - \|a'_2 - a_2\| \leq \|a_1 - a'_2\|.$$

Отсюда и из неравенства (3.20) следует неравенство (3.21). Переходя в неравенстве (3.21) к пределу при $\sigma \rightarrow +0$, получаем доказываемое неравенство.

Докажем основные результаты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В силу результатов Фитцпатрика (см. [4; следствие 3.5]) и замечания 1 условия (a), (b), (c) теоремы 1 эквивалентны. Поэтому согласно лемме 1 условия (a)–(d) теоремы 1 эквивалентны. В силу леммы 8 из условий (a) и (c) теоремы 1 следует условие (e) этой теоремы. Применяя лемму 9, получаем равносильность условий (a)–(e) теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть выполнены предположения теоремы 1 и пространство E равномерно выпукло. В силу леммы 12 условие (f) теоремы 2 влечет условие (g) этой теоремы. Поскольку импликации (e) $\Rightarrow$ (f) и (g) $\Rightarrow$ (c) очевидны, то условия (a)–(g) эквивалентны. Импликация (f) $\Rightarrow$ (h) следует из леммы 14, обратная импликация – из леммы 15. Поэтому условия (a)–(h) равносильны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 состоит в применении лемм 12, 16.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Asplund, “Farthest points in reflexive locally uniformly rotund Banach spaces”, *Israel J. Math.*, **4**:4 (1966), 213–216.
- [2] M. Edelstein, “Fathest points of sets in uniformly convex Banach spaces”, *Israel J. Math.*, **4**:3 (1966), 171–176.
- [3] N. V. Zhivkov, “Metric projections and antiprojections in strictly convex normed spaces”, *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **31**:4 (1978), 369–372.
- [4] S. Fitzpatrick, “Metric projections and the differentiability of distance functions”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **22**:2 (1980), 291–312.
- [5] М. В. Балашов, Г. Е. Иванов, “Об удаленных точках множеств”, *Матем. заметки*, **80**:2 (2006), 163–170.
- [6] Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, “Некоторые свойства чебышевских множеств”, *Докл. АН СССР*, **118**:1 (1958), 17–19.
- [7] Л. П. Власов, “Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах”, *УМН*, **28**:6 (1973), 3–66.
- [8] В. С. Балаганский, Л. П. Власов, “Проблема выпуклости чебышёвских множеств”, *УМН*, **51**:6 (1996), 125–188.
- [9] J. M. Borwein, “Proximity and Chebyshev sets”, *Optim. Lett.*, **1**:1 (2007), 21–32.
- [10] А. Р. Алимов, М. И. Карлов, “Множества с внешним чебышевским слоем”, *Матем. заметки*, **69**:2 (2001), 303–307.
- [11] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, Математика. Прикладная математика, Физматлит, М., 2007.
- [12] F. H. Clarke, R. J. Stern, P. R. Wolenski, “Proximal smoothness and the lower- C^2 property”, *J. Convex Anal.*, **2**:1–2 (1995), 117–144.
- [13] F. Bernard, L. Thibault, N. Zlateva, “Characterizations of prox-regular sets in uniformly convex Banach spaces”, *J. Convex Anal.*, **13**:3–4 (2006), 525–559.
- [14] Дж. Дистель, *Геометрия банаховых пространств. Избранные главы*, Вища школа, Киев, 1980.
- [15] С. В. Конягин, “Об аппроксимативных свойствах замкнутых множеств в банаховых пространствах и характеристизации сильно выпуклых пространств”, *Докл. АН СССР*, **251**:2 (1980), 276–280.
- [16] С. Б. Стечкин, “Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах”, С. Б. Стечкин, *Избранные труды. Математика*, Физматлит, М., 1998, 270–281.
- [17] М. В. Балашов, Г. Е. Иванов, “Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:3 (2009), 23–66.

Г. Е. Иванов

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: g.e.ivanov@mail.ru

Поступило

05.01.2008

Исправленный вариант

15.08.2009