Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Смирнов, Синтез идентификаторов состояния в задаче многопрограммной стабилизации билинейных систем, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 4, 535–546

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm443>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:08:28

УДК 531.36:62-50

СИНТЕЗ ИДЕНТИФИКАТОРОВ СОСТОЯНИЯ В ЗАДАЧЕ МНОГОПРОГРАММНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Н. В. Смирнов

В данной работе рассматривается задача стабилизации семейства программных движений билинейной нестационарной системы с применением нелинейного идентификатора состояния системы полного порядка и нелинейного идентификатора Люенбергера. Предлагается метод синтеза таких идентификаторов, а также метод построения многопрограммного стабилизирующего управления в виде нелинейной обратной связи. Доказаны теоремы о достаточных условиях существования решения поставленной задачи.

Библиография: 13 названий.

Введение. Задача стабилизации программных движений управляемых динамических систем является одной из основных в современной математической теории управления. Суть ее состоит в следующем. Пусть для некоторого управляемого объекта, движение которого описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с управляющими параметрами в правых частях, построено программное управление, обеспечивающее выполнение объектом заданного программного движения. Требуется рассчитать дополнительные управляющие воздействия, обеспечивающие этому движению асимптотическую устойчивость. Такие управляющие воздействия принято называть *стабилизирующими управлениями*.

Процесс построения стабилизирующих управлений, в соответствии с теорией устойчивости, начинается с вывода системы в отклонения [1] от заданного программного движения при заданном программном управлении. Далее весь класс задач стабилизации можно условно разделить на несколько типов. Во-первых, это задачи стабилизации линейных или нелинейных систем, в зависимости от природы исходного управляемого объекта. Во-вторых, это задачи с полной или с неполной обратной связью, в зависимости от возможностей измерительных приборов выдавать информацию о векторе фазового состояния системы в отклонениях. Основная особенность случая неполной обратной связи состоит в том, что при построении стабилизирующего управления недоступный вектор отклонений заменяют его асимптотической оценкой. Для получения таких оценок строится так называемый асимптотический идентификатор (наблюдатель) [2], [3], представляющий собой динамическую управляемую систему, выход которой (оценка) асимптотически стремится к выходу исходной системы при совпадении управляющих воздействий.

Следует особо отметить, что по теории асимптотических идентификаторов существует большое число публикаций от монографий до журнальных статей как теоретического, так и прикладного направления. Поэтому приведенные здесь ссылки следует рассматривать как минимально необходимые и достаточно доступные для получения вспомогательной информации.

Перейдем к обсуждению задачи многопрограммной стабилизации. В работах [4], [5] рассмотрены проблема представления правых частей систем дифференциальных уравнений, имеющих наперед заданное конечное семейство решений, а также задача синтеза управлений, которые реализуют заданную совокупность программных движений и обеспечивают их асимптотическую устойчивость по Ляпунову. В [5] особое внимание уделяется представлению таких управлений в линейных стационарных управляемых системах. Применение полученных результатов иллюстрируется в этих работах на задаче управления механическими системами, описываемыми уравнениями Лагранжа второго рода, и на задаче управления движением заряженных частиц в электромагнитном поле.

Распространение этого подхода на классы линейных нестационарных и билинейных стационарных и нестационарных систем отражено в публикациях [6]–[8]. Следует отметить, что в этих работах речь шла о многопрограммной стабилизации в случае полной обратной связи. Актуальность определялась еще и тем, что билинейные системы являются более гибким средством аппроксимации нелинейных систем, чем линейные системы. Один из методов построения билинейных аппроксимаций представлен в [9].

Основная цель данной работы состоит в том, чтобы показать возможность синтеза идентификаторов состояния специального вида, позволяющих решать задачу многопрограммной стабилизации в классе билинейных систем в случае неполной обратной связи. Условия существования идентификатора Люенбергера, необходимого для решения этой задачи в классе линейных систем, представлены в [10].

1. Постановка задачи. Рассмотрим билинейную нестационарную управляемую систему вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}(t) + \sum_{i=1}^r \mathbf{B}_i(t)u_i \right) \mathbf{x} + \mathbf{F}(t), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{x}$ – n -мерный вектор фазового состояния; $u_1, \dots, u_r$ – скалярные управления; $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}_i(t)$, $i = 1, \dots, r$, – вещественные, непрерывные $(n \times n)$ -матрицы с ограниченными при $t \geq 0$ элементами; $\mathbf{F}(t)$ – вещественная, непрерывная вектор-функция, заданная при $t \in (-\infty, +\infty)$.

Введем в рассмотрение вектор управлений $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r)^T$. Предположим, что для системы (1.1) построены программные управления $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_N(t)$ в классе непрерывных и ограниченных при $t \geq 0$ функций, а также соответствующие им программные движения $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)$. Число программных движений N не связано с размерностью системы (1.1) и размерностью пространства управлений.

Здесь не рассматриваются методы построения таких управлений. Для определенности будем полагать, что каждое программное управление $\mathbf{u}_j(t)$ и программное движение $\mathbf{x}_j(t)$ строятся как решение задачи по переводу системы (1.1) из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. Таким образом, если систему (1.1) замкнуть программным управлением $\mathbf{u}_j(t) = (u_{j1}(t), \dots, u_{jr}(t))^T$, то она будет иметь

соответствующее частное решение $\mathbf{x}_j(t)$, отвечающее выбранным начальным и конечным данным. Другими словами, для каждой пары $\mathbf{u}_j(t)$, $\mathbf{x}_j(t)$ имеет место следующее тождество по t на интервале, где эти функции определены:

$$\dot{\mathbf{x}}_j(t) \equiv \mathbf{P}_j(t)\mathbf{x}_j(t) + \mathbf{F}(t), \quad \mathbf{P}_j(t) = \mathbf{A}(t) + \sum_{i=1}^r \mathbf{B}_i(t)u_{ji}(t). \quad (1.2)$$

ЗАДАЧА 1. Требуется построить управление

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (1.3)$$

которое реализует заданные программные движения $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)$ и обеспечивает их асимптотическую устойчивость по Ляпунову.

Как уже отмечалось выше, задача 1 была поставлена в [5] для линейных стационарных систем. Управление (1.3) в этой работе было построено в виде интерполяционного полинома специального вида. Для билинейной системы (1.1) задачу 1 решает

ТЕОРЕМА 1 [8]. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) программные движения $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)$ системы (1.1) при управлениях $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_N(t)$ различимы, т.е.

$$\inf_{t \geq 0} \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\| > 0, \quad i \neq j;$$

- 2) вспомогательные линейные управляемые системы

$$\dot{\mathbf{y}}_j = \mathbf{P}_j(t)\mathbf{y}_j + \mathbf{Q}_j(t)\mathbf{v}_j,$$

где $\mathbf{Q}_j(t) = (\mathbf{B}_1(t)\mathbf{x}_j(t), \dots, \mathbf{B}_r(t)\mathbf{x}_j(t))$, стабилизируемы управлениями $\mathbf{v}_j = \mathbf{C}_j(t)\mathbf{y}_j$, здесь $\mathbf{y}_j = \mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)$, $\mathbf{v}_j = \mathbf{u} - \mathbf{u}_j(t)$ – отклонения от программных движений и программных управлений соответственно.

Тогда существует управление (1.3), реализующее программные движения $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)$, при этом каждое из них будет асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Доказательство этой теоремы проведено конструктивно, т.е. указан метод построения управления в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = & \sum_{j=1}^N \left(\mathbf{u}_j(t) + \mathbf{C}_j(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)) \right. \\ & \left. - 2\mathbf{u}_j(t) \sum_{i=1, i \neq j}^N \frac{(\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t))}{(\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t))^2} \right) p_j(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$p_j(\mathbf{x}, t) = \prod_{i=1, i \neq j}^N \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))^2}{(\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t))^2}. \quad (1.5)$$

В формулах (1.4), (1.5) и далее выражения $(\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t))$, $(\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t))^2$ означают скалярное произведение и скалярный квадрат соответствующих векторов. В работе [8] также предложен метод построения матриц $\mathbf{C}_j(t)$, необходимых для стабилизации вспомогательных линейных систем из формулировки теоремы 1.

Для управления (1.4) и скалярных функций (1.5) выполнены следующие очевидные тождества:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_j(t), t) \equiv \mathbf{u}_j(t), \quad p_j(\mathbf{x}_i(t), t) \equiv 0, \quad i \neq j, \quad p_j(\mathbf{x}_j(t), t) \equiv 1.$$

В силу этих свойств система (1.1), замкнутая управлением (1.4), (1.5), имеет заданные программные движения $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)$, т.е. будет двигаться по одному из них в случае точной установки соответствующих начальных данных.

Таким образом, управление (1.4), (1.5) представляет собой нелинейную обратную связь, а система (1.1), замкнутая этим управлением, является нелинейным многопрограммным автоматом, который способен реализовать любое программное движение $\mathbf{x}_j(t)$ в зависимости от выбора начальных данных. Фактически при решении задачи 1 предполагалось, что векторы $\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)$, являющиеся отклонениями от программных режимов, доступны для измерения. Изменим условия.

Задача 2. Для произвольного программного движения $\mathbf{x}_k(t)$ из данного семейства введем вектор отклонений $\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k(t)$ и предположим, что задано уравнение измерительного прибора

$$\mathbf{z}_k(t) = \mathbf{R}\mathbf{y}_k(t), \tag{1.6}$$

где $\mathbf{z}_k(t)$ — m -мерный вектор измерений; $\mathbf{R}$ — постоянная вещественная $(m \times n)$ -матрица. Иногда в литературе уравнение (1.6) называют *уравнением выхода* [2], а вектор $\mathbf{z}_k(t)$ — *выходом системы*. Зная выход $\mathbf{z}_k(t)$, требуется построить такую оценку $\hat{\mathbf{y}}_k(t)$ вектора $\mathbf{y}_k(t)$, чтобы она обладала асимптотическим свойством

$$\mathbf{y}_k(t) - \hat{\mathbf{y}}_k(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \tag{1.7}$$

Свойство (1.7) по сути является требованием асимптотического покомпонентного стремления ошибки оценки отклонения от программного движения к нулевому вектору. Если такая оценка существует, то ее можно было бы использовать для синтеза управления, аналогичного управлению (1.4), (1.5). В этом и состоит задача многопрограммной стабилизации билинейной системы в случае неполной обратной связи.

Индексом k , в данной постановке, мы фактически выделяем одно программное движение $\mathbf{x}_k(t)$ из заданного набора $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)$, т.е. то движение, которое необходимо реализовать и стабилизировать в конкретной ситуации. Вместе с тем работа системы управления должна быть универсальна по отношению к исходному семейству и зависеть лишь от начальных данных выбранного движения. Соответственно, и измерительное устройство (1.6) будет отслеживать отклонение от выбранного в данный момент программного движения $\mathbf{x}_k(t)$.

2. Синтез нелинейного идентификатора полного порядка. Далее по тексту в громоздких выражениях и там, где это не мешает пониманию сути преобразований, мы не будем писать аргумент t у векторных функций $\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \dots$.

Перейдем к решению задачи 2. Замкнем систему (1.1) управлением (1.4), (1.5) и рассмотрим систему в отклонениях для программного движения $\mathbf{x}_k(t)$

$$\dot{\mathbf{y}}_k = (\mathbf{P}_k(t) + \mathbf{Q}_k(t)\mathbf{C}_k(t))\mathbf{y}_k + \mathbf{g}_k(\mathbf{y}_k), \quad (2.1)$$

где

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{y}_k) = \left(\sum_{i=1}^r \mathbf{B}_i(t)(\mathbf{c}_{ki}(t)\mathbf{y}_k + \tilde{u}_{ki}) \right) \mathbf{y}_k + \sum_{i=1}^r \mathbf{B}_i(t)\mathbf{x}_k(t)\tilde{u}_{ki}.$$

Вывод этой системы можно найти в [8], поэтому далее приведем лишь необходимые обозначения. Здесь $\mathbf{c}_{ki}(t)\mathbf{y}_k$ – скалярное произведение i -й строки матрицы $\mathbf{C}_k(t)$ и вектора отклонений $\mathbf{y}_k = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k$; $\tilde{u}_{ki}$ – компоненты вектора

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_k = & 2(\mathbf{C}_k(t)\mathbf{y}_k - 2\mathbf{u}_k(t)s_k)s_k + (\mathbf{u}_k(t) + \mathbf{C}_k(t)\mathbf{y}_k - 2\mathbf{u}_k(t)s_k)h_k(\mathbf{y}_k) \\ & + \sum_{j=1, j \neq k}^N (\mathbf{u}_j(t) + \mathbf{C}_j(t)(\mathbf{y}_k + \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) - 2\mathbf{u}_j(t)S_{jk})p_j(\mathbf{y}_k + \mathbf{x}_k, t), \end{aligned}$$

где

$$s_k = \sum_{i=1, i \neq k}^N \frac{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)\mathbf{y}_k}{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)^2}, \quad S_{jk} = \sum_{i=1, i \neq j}^N \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)(\mathbf{y}_k + \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)}{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^2}.$$

Заметим, что s_k и S_{jk} – скалярные величины, линейно зависящие от элементов вектора $\mathbf{y}_k$. Кроме того, следует отметить, что при выводе системы (2.1) было использовано представление функций $p_j(\mathbf{y}_k + \mathbf{x}_k, t)$ и $h_k(\mathbf{y}_k)$ из [7], причем в [7] показано, что скалярная функция $h_k(\mathbf{y}_k)$ является конечной суммой однородных форм по компонентам вектора $\mathbf{y}_k$, начиная со второго порядка.

По построению нелинейную систему (2.1) можно рассматривать как систему, замкнутую управлением вида $\mathbf{v}_k = \mathbf{C}_k(t)\mathbf{y}_k$. В этом случае ее можно записать в форме

$$\dot{\mathbf{y}}_k = \mathbf{P}_k(t)\mathbf{y}_k + \mathbf{Q}_k(t)\mathbf{v}_k + \mathbf{G}_k(\mathbf{y}_k, \mathbf{v}_k). \quad (2.2)$$

Идентификатор состояния для системы (2.2) предлагается строить в следующем виде:

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}}_k = \mathbf{P}_k(t)\hat{\mathbf{y}}_k + \mathbf{Q}_k(t)\mathbf{v}_k + \mathbf{L}_k(t)(\mathbf{z}_k - \mathbf{R}\hat{\mathbf{y}}_k) + \mathbf{G}_k(\hat{\mathbf{y}}_k, \mathbf{v}_k). \quad (2.3)$$

В системе (2.3) матрицы $\mathbf{P}_k(t)$, $\mathbf{Q}_k(t)$, $\mathbf{R}$ те же, что и в (1.2), (1.6), (2.2), а $(n \times m)$ -матрица $\mathbf{L}_k(t)$ подлежит определению. Слагаемое $\mathbf{L}_k(t)(\mathbf{z}_k - \mathbf{R}\hat{\mathbf{y}}_k)$ в правой части (2.3) учитывает качество оценки состояния. Поскольку с учетом (1.6) $\mathbf{z}_k - \mathbf{R}\hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{R}(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k)$, то в идеальной ситуации при $\hat{\mathbf{y}}_k \equiv \mathbf{y}_k$ система (2.3) с точностью до обозначений совпадает с исходной системой (2.2).

Таким образом, задача сводится к выбору матрицы $\mathbf{L}_k(t)$ так, чтобы имело место свойство оценки (1.7) и существовало стабилизирующее управление

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{C}_k(t)\hat{\mathbf{y}}_k \quad (2.4)$$

для системы (2.2).

Рассмотрим (2.2), (2.3) как одну систему. Учитывая уравнение измерителя (1.6) и вид допустимого управления (2.4), получим

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}_k = \mathbf{P}_k(t)\mathbf{y}_k + \mathbf{Q}_k(t)\mathbf{C}_k(t)\hat{\mathbf{y}}_k + \mathbf{G}_k(\mathbf{y}_k, \mathbf{C}_k(t)\hat{\mathbf{y}}_k), \\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}_k = \mathbf{P}_k(t)\hat{\mathbf{y}}_k + \mathbf{Q}_k(t)\mathbf{C}_k(t)\hat{\mathbf{y}}_k + \mathbf{L}_k(t)\mathbf{R}(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) + \mathbf{G}_k(\hat{\mathbf{y}}_k, \mathbf{C}_k(t)\hat{\mathbf{y}}_k). \end{cases} \quad (2.5)$$

В системе (2.5) сделаем неособую замену переменных

$$\begin{cases} \mathbf{y}_k(t) = \mathbf{y}_k(t), \\ \bar{\mathbf{y}}_k(t) = \mathbf{y}_k(t) - \hat{\mathbf{y}}_k(t). \end{cases} \quad (2.6)$$

Переменная $\bar{\mathbf{y}}_k(t)$ показывает качество оценки состояния. В новых переменных система (2.5) примет вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_k \\ \dot{\bar{\mathbf{y}}}_k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{P}_k(t) + \mathbf{Q}_k(t)\mathbf{C}_k(t) & -\mathbf{Q}_k(t)\mathbf{C}_k(t) \\ \mathbf{O} & \mathbf{P}_k(t) - \mathbf{L}_k(t)\mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_k \\ \bar{\mathbf{y}}_k \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \mathbf{G}_k(\mathbf{y}_k, \mathbf{C}_k(t)(\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k)) \\ \bar{\mathbf{G}}_k(\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k, \mathbf{C}_k(t)(\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k)) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\bar{\mathbf{G}}_k(\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k, \mathbf{C}_k(t)(\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k)) = \mathbf{G}_k(\mathbf{y}_k, \mathbf{C}_k(t)(\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k)) - \mathbf{G}_k(\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k, \mathbf{C}_k(t)(\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k)).$$

Система (2.7) состоит из двух подсистем. Первая является системой (2.2), замкнутой управлением (2.4), выраженным через новые переменные (2.6), а вторая по $\bar{\mathbf{y}}_k$ описывает качество оценки отклонения $\mathbf{y}_k$ по измерениям (1.6).

В результате задача сводится к выбору матриц $\mathbf{C}_k(t)$ и $\mathbf{L}_k(t)$ таким образом, чтобы нулевое решение системы (2.7) было асимптотически устойчиво по Ляпунову. Если такие матрицы будут найдены, то это будет означать, что, во-первых, построен асимптотический нелинейный идентификатор вида (2.3), а, во-вторых, построено стабилизирующее управление (2.4), для формирования которого используется выход $\hat{\mathbf{y}}_k(t)$ идентификатора (2.3).

Перед формулировкой основного результата приведем несколько известных определений и утверждений, на которые будем ссылаться.

Рассмотрим две вспомогательные системы:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{P}_k(t)\mathbf{x}_1 + \mathbf{Q}_k(t)\mathbf{u}_1, \quad (2.8)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = -\mathbf{P}_k^T(t)\mathbf{x}_2 + \mathbf{R}^T\mathbf{u}_2, \quad (2.9)$$

где матрицы $\mathbf{P}_k(t)$, $\mathbf{Q}_k(t)$, $\mathbf{R}$ те же, что и в (2.7), а векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ соответствующих размерностей имеют характер формальных обозначений.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если систему (2.9) замкнуть управлением вида $u_2 = L_k^T(t)x_2$, где матрица $L_k(t)$ та же самая, что и в системе (2.7), то полученная система будет сопряженной [11] ко второй подсистеме линейного приближения в (2.7). Это обстоятельство необходимо учитывать в дальнейшем.

Рассмотрим систему (2.8) как самостоятельный объект. Следуя монографии [12], предположим, что при всех $t \geq 0$ ранг матрицы

$$\tilde{S}(t) = (Q_k(t), D Q_k(t), \dots, D^{n-1} Q_k(t))$$

равен n и реализуется на столбцах матрицы

$$S(t) = (q_{k1}(t), D q_{k1}(t), \dots, D^{l_1-1} q_{k1}(t), \dots, q_{ks}(t), D q_{ks}(t), \dots, D^{l_s-1} q_{ks}(t)),$$

выбранных из совокупности столбцов матрицы $\tilde{S}(t)$. Здесь $D = P_k(t) - E_n \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования. Тогда для системы (2.8) справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2 [12]. Пусть $P_k(t) \in C_{t \in [0, +\infty)}^{2n-2}$, $Q_k(t) \in C_{t \in [0, +\infty)}^{2n-1}$ и матрица $S(t)$ является матрицей Ляпунова. Тогда систему (2.8) можно преобразовать к обобщенному каноническому виду Фробениуса, а управление $u_1 = M^T(t)x_1$ выбрать таким образом, чтобы замкнутая система $\dot{x}_1 = (P_k(t) + Q_k(t)M^T(t))x_1$ была правильной (приводимой) и имела наперед заданные характеристические показатели.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [13]. $(n \times n)$ -матрица $S(t)$ называется матрицей Ляпунова, если

- 1) $S(t) \in C_{t \in [0, +\infty)}^1$;
- 2) $S(t)$ и $\dot{S}(t)$ ограничены при $t \in [0, +\infty)$;
- 3) модуль определителя матрицы $S(t)$ равномерно по $t \geq 0$ отделен от нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Линейную нестационарную управляемую систему, для которой выполнены условия теоремы 2, будем называть стабилизируемой.

Перейдем к доказательству следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3. Если системы (2.8), (2.9) стабилизируемы в смысле определения 2, то для системы (2.2) существует нелинейный асимптотический идентификатор (2.3) и стабилизирующее управление (2.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению 2 стабилизируемость систем (2.8), (2.9) означает, что для них существуют управления вида $u_1 = C_k(t)x_1$ и $u_2 = L_k^T(t)x_2$, при которых замкнутые системы имеют наперед заданные наборы характеристических показателей Ляпунова или спектры [11]. Будем считать, что для системы (2.8) построено управление $u_1 = \bar{C}_k(t)x_1$, при котором ее спектр отрицателен. Далее рассмотрим систему (2.9) и учтем замечание 1. Для нее построим управление вида $u_2 = \bar{L}_k^T(t)x_2$, которое обеспечивает замкнутой системе с матрицей $-P_k^T(t) + R^T \bar{L}_k^T(t)$ правильность (приводимость) и наперед заданный положительный спектр $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n > 0$. Построенную таким образом матрицу $\bar{L}(t)$ подставим во вторую подсистему в (2.7). Ее матрица линейного приближения примет вид $P_k(t) - \bar{L}_k(t)R$. Обозначим спектр

этой матрицы через $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Далее воспользуемся теоремой Перрона [11], в соответствии с которой для правильности линейной однородной системы необходимо и достаточно, чтобы ее полный спектр (с учетом кратностей характеристических показателей) и полный спектр ее сопряженной системы были бы симметричны относительно нуля, т.е. должны иметь место равенства

$$\alpha_i + \beta_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.10)$$

Поскольку в нашем случае сопряженная система с матрицей $-\mathbf{P}_k^T(t) + \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{L}}_k^T(t)$ является правильной и имеет положительный спектр, то в силу условия (2.10) линейная система с матрицей $\mathbf{P}_k(t) - \bar{\mathbf{L}}_k(t)\mathbf{R}$ также является правильной и имеет отрицательный спектр $\alpha_i = -\beta_i, i = \overline{1, n}$.

Таким образом, построены матрицы $\bar{\mathbf{C}}_k(t)$ и $\bar{\mathbf{L}}_k(t)$, при которых система линейного приближения в (2.7) асимптотически устойчива. Далее нетрудно показать, что нелинейность в правой части (2.7) удовлетворяет условиям известной теоремы о стабилизации по линейному приближению [1]. Следовательно, при $\mathbf{C}_k(t) = \bar{\mathbf{C}}_k(t)$, $\mathbf{L}_k = \bar{\mathbf{L}}_k(t)$ нулевое решение системы (2.7) асимптотически устойчиво по Ляпунову. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 3 дает алгоритм построения асимптотического нелинейного идентификатора вида (2.3) для каждого программного движения $\mathbf{x}_k(t)$ из заданного семейства. Это позволяет использовать ее для решения задачи 2. Управление (1.4), (1.5) в случае неполной обратной связи будет иметь вид

$$\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \sum_{j=1}^N \left(\mathbf{u}_j(t) + \bar{\mathbf{C}}_j(t)(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_j) - 2\mathbf{u}_j(t) \sum_{i=1, i \neq j}^N \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^2} (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_j) \right) p_j(\hat{\mathbf{x}}, t), \quad (2.11)$$

где

$$p_j(\hat{\mathbf{x}}, t) = \prod_{i=1, i \neq j}^N \frac{(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_i)^2}{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^2}. \quad (2.12)$$

В (2.11), (2.12) $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}_k + \mathbf{x}_k$, где $\hat{\mathbf{y}}_k$ – выход идентификатора (2.3).

3. Синтез нелинейного идентификатора Люенбергера. Основная цель данного пункта состоит в том, чтобы понизить порядок идентификатора (2.3) и найти условия, при выполнении которых это возможно. В результате возникает следующая

ЗАДАЧА 3. Пусть задано уравнение измерителя (1.6). Требуется выбрать $n - m$ линейных комбинаций компонент вектора $\mathbf{y}_k(t)$

$$\mathbf{w}_k(t) = \mathbf{T}_k \mathbf{y}_k(t), \quad (3.1)$$

где $\mathbf{w}_k(t) - (n - m)$ -мерный вектор, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) матрица $\mathbf{S}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_k \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}$ должна быть неособой;
- 2) для вектора $\mathbf{w}_k(t)$ должен существовать идентификатор, позволяющий находить оценку $\hat{\mathbf{w}}_k(t)$, и при этом имеет место следующая асимптотика:

$$\hat{\mathbf{w}}_k(t) - \mathbf{w}_k(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (3.2)$$

Как и прежде, имеется в виду покомпонентное асимптотическое стремление вектора разности к нулевому вектору.

Если эта задача будет решена и $((n-m) \times n)$ -матрица $\mathbf{T}_k$ будет найдена, то появится возможность построить оценку $\hat{\mathbf{y}}_k(t)$ для вектора отклонений $\mathbf{y}_k(t)$. Действительно, с учетом (1.6), (3.1) имеем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w}_k(t) \\ \mathbf{z}_k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_k \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} \mathbf{y}_k(t). \quad (3.3)$$

Из (3.3) получим

$$\mathbf{y}_k(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_k \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_k(t) \\ \mathbf{z}_k(t) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Это возможно, так как матрица $\mathbf{S}_k$ считается неособой по построению. Если предположить, что найден вектор $\hat{\mathbf{w}}_k(t)$, то для вектора оценки $\hat{\mathbf{y}}_k(t)$ получим выражение

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_k \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{w}}_k(t) \\ \mathbf{z}_k(t) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

При выполнении условия (3.2), очевидно, будет иметь место следующая асимптотика оценки $\hat{\mathbf{y}}_k(t)$:

$$\bar{\mathbf{y}}_k(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_k \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{w}}_k(t) - \mathbf{w}_k(t) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

где переменная $\bar{\mathbf{y}}_k(t) = \hat{\mathbf{y}}_k - \mathbf{y}_k$ описывает качество оценки вектора $\mathbf{y}_k(t)$. Далее оценку (3.5) можно будет использовать для синтеза управления, аналогичного (2.11), (2.12).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В отличие от идентификатора полного порядка (2.3), который строится для всего вектора фазового состояния $\mathbf{y}_k$, идентификатор для вектора $\mathbf{w}_k$ будет иметь размерность $n - m$, так как информация (1.6) о векторе $\mathbf{y}_k$ считается достаточно точной и используется в (3.5) для формирования его оценки. Идентификаторы такого типа принято называть *идентификаторами Люенбергера* [2], [3]. Таким образом, задача 3 по сути является задачей синтеза нелинейного идентификатора Люенбергера, необходимого для многопрограммной стабилизации системы (1.1).

Перейдем к решению поставленной задачи. Вновь рассмотрим систему в отклонениях (2.2) и сделаем в ней замену переменных (3.3), чтобы получить уравнение, описывающее изменение вектора $\mathbf{w}_k$. Введем обозначения для блоков следующих матриц:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_k \mathbf{P}_k(t) \mathbf{S}_k^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{ww}^{(k)}(t) & \mathbf{P}_{wz}^{(k)}(t) \\ \mathbf{P}_{zw}^{(k)}(t) & \mathbf{P}_{zz}^{(k)}(t) \end{pmatrix}, & \mathbf{S}_k \mathbf{Q}_k(t) &= \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_w^{(k)}(t) \\ \mathbf{Q}_z^{(k)}(t) \end{pmatrix}, & (3.6) \\ \mathbf{G}_w^{(k)}(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k, \mathbf{v}_k) &= \mathbf{T}_k \mathbf{G}_k \left(\mathbf{S}_k^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k \end{pmatrix}, \mathbf{v}_k \right), \\ \mathbf{G}_z^{(k)}(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k, \mathbf{v}_k) &= \mathbf{R} \mathbf{G}_k \left(\mathbf{S}_k^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k \end{pmatrix}, \mathbf{v}_k \right). \end{aligned}$$

Система (2.2) в новых переменных примет вид

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}}_k = \mathbf{P}_{ww}^{(k)}(t)\mathbf{w}_k + \mathbf{P}_{wz}^{(k)}(t)\mathbf{z}_k + \mathbf{Q}_w^{(k)}(t)\mathbf{v}_k + \mathbf{G}_w^{(k)}(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k, \mathbf{v}_k), \\ \dot{\mathbf{z}}_k = \mathbf{P}_{zw}^{(k)}(t)\mathbf{w}_k + \mathbf{P}_{zz}^{(k)}(t)\mathbf{z}_k + \mathbf{Q}_z^{(k)}(t)\mathbf{v}_k + \mathbf{G}_z^{(k)}(\mathbf{w}_k, \mathbf{z}_k, \mathbf{v}_k). \end{cases} \quad (3.7)$$

Первое уравнение в (3.7) описывает изменение вектора $\mathbf{w}_k(t)$, поэтому идентификатор для построения оценки $\hat{\mathbf{w}}_k(t)$ будем искать в виде

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}}_k = \mathbf{P}_{ww}^{(k)}(t)\hat{\mathbf{w}}_k + \mathbf{P}_{wz}^{(k)}(t)\mathbf{z}_k + \mathbf{Q}_w^{(k)}(t)\mathbf{v}_k + \mathbf{G}_w^{(k)}(\hat{\mathbf{w}}_k, \mathbf{z}_k, \mathbf{v}_k). \quad (3.8)$$

Проблема выбора матрицы $\mathbf{T}_k$ с учетом обозначений (3.6) трансформируется в проблему выбора матриц $\mathbf{P}_{ww}^{(k)}(t)$, $\mathbf{P}_{wz}^{(k)}(t)$, $\mathbf{Q}_w^{(k)}(t)$.

В результате исходная задача сводится к следующей. Во-первых, необходимо указать алгоритм выбора матриц $\mathbf{P}_{ww}^{(k)}(t)$, $\mathbf{P}_{wz}^{(k)}(t)$, $\mathbf{Q}_w^{(k)}(t)$, чтобы для выхода идентификатора (3.8) $\hat{\mathbf{w}}_k(t)$ выполнялось условие (3.2); во-вторых, требуется построить матрицу $\mathbf{C}_k(t)$ таким образом, чтобы нулевое решение системы (2.2) при управлении (2.4), где $\hat{\mathbf{y}}_k(t)$ определяется соотношением (3.5), было асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Для решения этой задачи выпишем систему (2.2), (3.8) с учетом (1.6):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}_k = \mathbf{P}_k(t)\mathbf{y}_k + \mathbf{Q}_k(t)\mathbf{v}_k + \mathbf{G}_k(\mathbf{y}_k, \mathbf{v}_k), \\ \dot{\hat{\mathbf{w}}}_k = \mathbf{P}_{ww}^{(k)}(t)\hat{\mathbf{w}}_k + \mathbf{P}_{wz}^{(k)}(t)\mathbf{R}\mathbf{y}_k + \mathbf{Q}_w^{(k)}(t)\mathbf{v}_k + \mathbf{G}_w^{(k)}(\hat{\mathbf{w}}_k, \mathbf{R}\mathbf{y}_k, \mathbf{v}_k). \end{cases} \quad (3.9)$$

В (3.9) сделаем неособую замену переменных

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_k \\ \bar{\mathbf{w}}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n & \mathbf{O} \\ -\mathbf{T}_k & \mathbf{E}_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_k \\ \hat{\mathbf{w}}_k \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

где $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{E}_{n-m}$ — единичные матрицы соответствующих размерностей, а новая переменная $\bar{\mathbf{w}}_k = \hat{\mathbf{w}}_k - \mathbf{T}_k\mathbf{y}_k$ описывает качество оценки вектора $\mathbf{w}_k(t)$. В результате получим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_k \\ \dot{\bar{\mathbf{w}}}_k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{P}_k(t) & \mathbf{O} \\ -\mathbf{T}_k\mathbf{P}_k(t) + \mathbf{P}_{ww}^{(k)}(t)\mathbf{T}_k + \mathbf{P}_{wz}^{(k)}(t)\mathbf{R} & \mathbf{P}_{zz}^{(k)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_k \\ \bar{\mathbf{w}}_k \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_k(t) \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{v}_k + \begin{pmatrix} \mathbf{G}_k(\mathbf{y}_k, \mathbf{v}_k) \\ \bar{\mathbf{G}}_w^{(k)}(\bar{\mathbf{w}}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{v}_k) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где

$$\bar{\mathbf{G}}_w^{(k)}(\bar{\mathbf{w}}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{v}_k) = \mathbf{G}_w^{(k)}(\mathbf{T}_k\mathbf{y}_k + \bar{\mathbf{w}}_k, \mathbf{R}\mathbf{y}_k, \mathbf{v}_k) - \mathbf{T}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{y}_k, \mathbf{v}_k).$$

Рассмотрим матричное уравнение

$$\mathbf{T}_k\mathbf{P}_k(t) = \mathbf{P}_{ww}^{(k)}(t)\mathbf{T}_k + \mathbf{P}_{wz}^{(k)}(t)\mathbf{R}. \quad (3.12)$$

Если бы матрица $\mathbf{T}_k$ была задана, то с учетом введенных обозначений (3.6) уравнение (3.12) было бы тождеством по t , а соответствующий блок матрицы системы (3.11)

стал бы нулевым. В результате возникает следующая задача. Найти матрицу $\mathbf{T}_k$, удовлетворяющую уравнению (3.12) и такую, что $\text{rang } \mathbf{S}_k = n$, а характеристические показатели Ляпунова линейной системы с матрицей $\mathbf{P}_{zz}^{(k)}(t)$ были бы отрицательны.

Предположим, что такая матрица $\mathbf{T}_k$ найдена. В этом случае идентификатор (3.8) можно считать построенным, а вектор оценки $\hat{\mathbf{w}}_k$ определенным. Следовательно, все готово для поиска стабилизирующего управления (2.4), (3.5). В новых переменных $\mathbf{y}_k$ и $\bar{\mathbf{w}}_k$ оно имеет вид

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{C}_k(t)(\mathbf{y}_k + \bar{\mathbf{y}}_k) = \mathbf{C}_k(t)(\mathbf{y}_k + \mathbf{S}_{kw}^{-1}\bar{\mathbf{w}}_k), \quad (3.13)$$

$\mathbf{S}_{kw}^{-1}$ – блок матрицы $\mathbf{S}_k^{-1}$, состоящий из первых $n - m$ столбцов.

Замкнем систему (3.11) управлением (3.13) и учтем (3.12). Тогда

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_k \\ \dot{\bar{\mathbf{w}}}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_k(t) + \mathbf{Q}_k(t)\mathbf{C}_k(t) & \mathbf{Q}_k(t)\mathbf{C}_k(t)\mathbf{S}_{kw}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P}_{zz}^{(k)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_k \\ \bar{\mathbf{w}}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{G}_k(\mathbf{y}_k, \mathbf{C}_k(t)(\mathbf{y}_k + \mathbf{S}_{kw}^{-1}\bar{\mathbf{w}}_k)) \\ \bar{\mathbf{G}}_w^{(k)}(\bar{\mathbf{w}}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{C}_k(t)(\mathbf{y}_k + \mathbf{S}_{kw}^{-1}\bar{\mathbf{w}}_k)) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) вспомогательная линейная система (2.8) стабилизируема в смысле определения 2;
- 2) матричное уравнение (3.12) имеет решение относительно матрицы $\mathbf{T}_k$ такое, что $\text{rang } \mathbf{S}_k = n$, а характеристические показатели Ляпунова линейной системы с матрицей $\mathbf{P}_{zz}^{(k)}(t)$ отрицательны.

Тогда для системы (2.2) существует нелинейный асимптотический идентификатор Люенбергера (3.8) и стабилизирующее управление (2.4), (3.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО фактически приведено выше. Отметим лишь следующее. По определению 2 стабилизируемость системы (2.8) означает существование матрицы $\bar{\mathbf{C}}_k(t)$ такой, что при управлении $\mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{C}}_k(t)\mathbf{x}_1$ ее спектр отрицателен и, следовательно, она асимптотически устойчива. При выполнении второго условия теоремы подсистема с матрицей $\mathbf{P}_{zz}^{(k)}(t)$ в линейном приближении системы (3.14) также асимптотически устойчива. При таком выборе матриц $\bar{\mathbf{C}}_k(t)$ и $\mathbf{P}_{zz}^{(k)}(t)$ все линейное приближение в (3.14) асимптотически устойчиво. Далее нетрудно убедиться в том, что нелинейность в правой части (3.14) удовлетворяет условиям теоремы о стабилизации по линейному приближению. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Вопрос о существовании решения уравнения (3.12) является основным, если речь идет о конкретном приложении. Следует иметь в виду, что многое в данной ситуации зависит от вида матрицы $\mathbf{P}_k(t)$. В монографии [2] предложен метод поиска решения аналогичного уравнения для линейных систем с постоянными коэффициентами. Он основан, во-первых, на приведении системы к каноническому виду Фробениуса, а, во-вторых, предполагает наперед заданную асимптотику идентификатора через соответствующее определение его спектра, т.е. через задание собственных чисел матрицы $\mathbf{P}_{zz}^{(k)}$, которая будет постоянной для стационарной системы. Эта схема работает и

в нашем случае. Проблема приведения нестационарной линейной системы к обобщенному виду Фробениуса рассмотрена в [12], а набор собственных чисел стационарного случая соответствует набору характеристических показателей Ляпунова для системы с матрицей $\mathbf{P}_{zz}^{(k)}(t)$ в данной ситуации.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Теорема 4 дает алгоритм построения асимптотического нелинейного идентификатора Люенбергера вида (3.8) для каждого программного движения $\mathbf{x}_k(t)$ из заданного семейства. Это позволяет использовать ее для решения задачи многопрограммной стабилизации в случае неполной обратной связи. Управление (1.4), (1.5) будет также иметь вид (2.11), (2.12). Существенное отличие однако в том, что вектор $\hat{\mathbf{y}}_k$ определяется по формуле (3.5), где $\hat{\mathbf{w}}_k$ – выход идентификатора (3.8).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зубов В. И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
- [2] Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
- [3] Luenberger D. G. Observers for multivariable systems // IEEE Trans. Autom. Control. AC-11. № 2. P. 190–197.
- [4] Зубов В. И. Интерполяция систем дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 1. С. 28–31.
- [5] Зубов В. И. Синтез многопрограммных устойчивых управлений // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 2. С. 274–277.
- [6] Smirnov N. V., Smirnova T. E. The problem of the stabilization for some programmed motions of the bilinear stationary system // Proc. of Third Int. Workshop: “Beam Dynamics & Optimization”. St-Petersburg: NICh SPbSU, 1997. P. 258–263.
- [7] Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Стабилизация семейства программных движений билинейной нестационарной системы // Вест. СПбГУ. Сер. 1. 1998. Т. 2. № 8. С. 70–75.
- [8] Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Синтез многопрограммных управлений в билинейных системах // ПММ. 2000. Т. 64. № 6. С. 929–932.
- [9] Svoronos S., Stephanopolos G., Aris R. Bilinear approximation of general non-linear dynamic systems with linear inputs // Int. J. Control. 1980. V. 31. № 1. P. 109–126.
- [10] Smirnov N. V. Synthesis of multiprogrammed stable controls using the Luenberger observer // Prep. of 11th IFAC Int. Workshop “Control Applications of Optimization”. V. 1. St-Petersburg: NICh SPbSU, 2000. P. 317–320.
- [11] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
- [12] Смирнов Е. Я. Некоторые задачи математической теории управления. Л.: ЛГУ, 1981.
- [13] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: Nikolay.Smirnov@inbox.spbu.ru

Поступило
20.10.2000
Исправленный вариант
10.11.2001