Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, О порядках дискриминаторных классов многозначной логики, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 4, 550–556

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4433>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:05:44

О порядках дискриминаторных классов многозначной логики

С. С. Марченков

При любом $k \geq 2$ рассматриваются замкнутые классы функций k -значной логики, содержащие тернарный дискриминатор p , – дискриминаторные классы. Доказано, что порядок произвольного дискриминаторного класса не превосходит $\max(3, k)$; если дискриминаторный класс содержит все однородные функции, то его порядок не превосходит $\max(3, k - 1)$, а если дискриминаторный класс содержит все четные функции – то $\max(3, k - 2)$. Все три оценки достижимы.

Библиография: 13 названий.

В теории функций многозначной логики одним из важных свойств замкнутых классов является их конечная порождаемость. Достаточных условий конечной порождаемости замкнутых классов в литературе известно очень мало. Одно из таких условий – наличие в замкнутом классе так называемой мажоритарной функции (см. [1] или [2]). Если замкнутый класс функций k -значной логики содержит мажоритарную функцию от $m + 1$ переменных ($m \geq 2$), то интерполяционная теорема Бейкера–Пиксли [1], [2] гарантирует, что порядок замкнутого класса не превосходит k^m . Существование в замкнутом классе структурно более сложных функций позволяет понизить верхнюю оценку для порядка замкнутого класса до $2k - 1$ [3], [4].

Как оценка k^m , так и оценка $2k - 1$ для порядков “типичных” конечно порожденных замкнутых классов представляется завышенной. В данной работе мы хотим несколько обобщить идею из [3], [4], чтобы довести верхнюю оценку для порядка замкнутого класса до величин k , $k - 1$ и $k - 2$. При этом нам придется подчинить замкнутые классы довольно жестким ограничениям. Сначала мы предположим, что замкнутый класс содержит все однородные функции, сохраняющие множество E_{k-1} (так называемые структурные однородные функции), и получим оценку $\max(3, k)$, затем предположим, что в замкнутый класс входят вообще все однородные функции, и получим оценку $\max(3, k - 1)$, наконец предположим, что замкнутый класс содержит все четные функции, и получим оценку $\max(3, k - 2)$. Во всех трех случаях решающая роль в построениях отводится тернарному дискриминатору p , который порождает множество всех однородных функций, сохраняющих множество E_{k-1} .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00438).

Замкнутые классы, содержащие дискриминатор p , обычно называют дискриминаторными классами. Они довольно интенсивно изучаются в универсальной алгебре и теории функций многозначной логики.

Приведем необходимые определения. Пусть $k \geq 2$, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, P_k – множество всех функций на E_k (множество функций k -значной логики). На множестве P_k рассматривается операция *суперпозиции*, которая, в частности, включает в себя операции введения и удаления фиктивных переменных (см. [5]). Если $Q \subseteq P_k$, то через $[Q]$ обозначается *замыкание* множества Q относительно операции суперпозиции. Если $Q = [Q]$, то Q называется *замкнутым множеством* (классом). Говорят, что множество Q *порождает* замкнутый класс R , если $[Q] = R$. Замкнутый класс называется *конечнопорожденным*, если в нем имеется конечное порождающее множество функций. *Порядком* конечнопорожденного замкнутого класса R называется такое наименьшее число n , что в классе R существует порождающее множество функций, каждая из которых зависит не более чем от n переменных.

Пусть E – непустое подмножество множества E_k и $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$. Говорят, что функция f *сохраняет множество* E , если для любого набора $(a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ выполняется включение $f(a_1, \dots, a_n) \in E$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ и π – перестановка на множестве E_k . Говорят, что функция f *самодвойственна* относительно перестановки π , если справедливо тождество

$$f(x_1, \dots, x_n) = \pi^{-1}(f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n))).$$

Функция f называется *однородной* [6], если она самодвойственна относительно любых перестановок на E_k . Иными словами, функция f однородна, если группа автоморфизмов алгебры $\langle E_k; f \rangle$ является полной симметрической группой перестановок на E_k . Множество всех однородных функций из P_k образует замкнутый класс, который мы обозначим через H_k .

Пусть $\mathbf{A}_k$ – знакопеременная группа (четных) перестановок на E_k . Функцию f из P_k назовем *четной* [7], [8], если она самодвойственна относительно любых перестановок из $\mathbf{A}_k$. Иными словами, функция f является четной, если группа автоморфизмов алгебры $\langle E_k; f \rangle$ содержит подгруппу $\mathbf{A}_k$. Согласно приведенным определениям всякая однородная функция является четной, обратное, вообще говоря, неверно. Множество всех четных функций из P_k , которое образует замкнутый класс, обозначим через A_k .

На любом множестве E_k определим однородную функцию – *тернарный дискриминатор* p :

$$p(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При $k \geq 3$ определим на множестве E_k однородную функцию r_k :

$$r_k(x_1, \dots, x_{k-1}) = \begin{cases} x_k, & \text{если } x_1, \dots, x_{k-1} \text{ попарно различны} \\ & \text{и } \{x_1, \dots, x_{k-1}, x_k\} = E_k, \\ x_1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При $k \geq 4$ определим на множестве E_k четную функцию γ_k :

$$\gamma_k(0, 1, \dots, k-3) = k-2,$$

и

$$\gamma_k(a_1, \dots, a_{k-2}) = a_1,$$

если элементы $a_1, \dots, a_{k-2}$ не попарно различны.

Пусть $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ – набор из E_k^n . Определим на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ отношение эквивалентности $\ker(\tilde{a})$:

$$\ker(\tilde{a}) = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq n, a_i = a_j\}.$$

Пусть ε – отношение эквивалентности на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, состоящее из m классов эквивалентных элементов, и $i_1, \dots, i_m$ – наименьшие попарно не эквивалентные элементы, расположенные в порядке возрастания (в частности, $i_1 = 1$). Для произвольной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ обозначим через $f^\varepsilon(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ функцию, которая получается из функции f следующим отождествлением переменных: произвольная переменная x_l в функции $f(x_1, \dots, x_n)$ заменяется такой переменной x_{i_j} , что l, i_j эквивалентны в смысле отношения ε .

Из этого определения вытекает следующий простой факт: если $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$, $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$, $\varepsilon = \ker(\tilde{a})$ и числа $i_1, \dots, i_m$ выбраны для отношения ε так, как это указано выше, то

$$f(\tilde{a}) = f^\varepsilon(a_{i_1}, \dots, a_{i_m}). \quad (1)$$

В формулировке теоремы 1 для упрощения записи функции f^{ε_l} считаем зависящими от всех переменных $x_1, \dots, x_n$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $k \geq 2$, $n > k$ и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$ – все отношения эквивалентности на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, которые состоят не более чем из k классов эквивалентных элементов. Тогда суперпозициями функции p в классе P_k можно определить такую функцию $h(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t)$, что для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k будет выполняться тождество

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_n, f^{\varepsilon_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, f^{\varepsilon_t}(x_1, \dots, x_n)). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [9]–[12], что функция p образует базис по суперпозиции в классе H_k^{k-1} всех однородных функций из P_k , сохраняющих множество E_{k-1} (они сохраняют также любое непустое подмножество множества E_k). Пользуясь этим свойством, суперпозициями функции p определим в классе H_k^{k-1} такую однородную функцию $h(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t)$, чтобы для любого набора $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ из соотношения $\ker(\tilde{a}) = \varepsilon_i$ следовало бы равенство $h(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_t) = y_i$. Применяя далее (1), нетрудно убедиться в том, что для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k справедливо тождество (2).

СЛЕДСТВИЕ. При любом $k \geq 2$ порядок произвольного дискриминаторного класса из P_k не превосходит $\max(3, k)$.

В связи с полученным следствием отметим следующие три момента. Во-первых, любой дискриминаторный класс содержит мажоритарную функцию от трех переменных – дуальный дискриминатор Пиксли $d(x, y, z)$ (см., например, [12]). Поэтому интерполяционная теорема Бейкера–Пиксли [1] дает верхнюю оценку k^2 для порядка любого дискриминаторного класса из P_k . Во-вторых, верхняя оценка $\max(3, k)$ из следствия достижима при любом $k \geq 2$. Для $k = 2, 3$ достаточно рассмотреть класс

однородных функций H_k^{k-1} [9], [11] (в случае $k = 2$ это есть класс S_{01} всех самодвойственных булевых функций, сохраняющих 0). При $k \geq 4$ можно взять дискриминаторный класс четных функций C_k , определенный в [7], [8]. Наконец, представление (2) можно рассматривать как обобщение равномерного id-разложения из [3], [4], которое позволяет понизить степень id-разложения с $2k - 1$ до k .

Известно [11], [12], что любое собственное расширение класса H_k^{k-1} в пределах множества однородных функций приводит к классу H_k всех однородных функций. В связи с этим представляет интерес получение аналога теоремы 1, когда допускается использование произвольных однородных функций. Отметим, что при $k \geq 3$ базис класса H_k образует система функций $\{p, r_k\}$ [11], [12].

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$, ε – отношение эквивалентности на множестве $\{1, \dots, n\}$, состоящее из k классов эквивалентных элементов. И пусть функция $f^\varepsilon(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ получена из функции f отождествлением переменных, как это определено выше. Рассмотрим функцию

$$\widehat{f}^\varepsilon(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}) = f^\varepsilon(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}, r_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}})).$$

Согласно определению функции r_k имеем: если $a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-1}}$ – попарно различные элементы из E_k , то $r_k(a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-1}})$ есть (единственный) элемент из E_k , который отличен от всех элементов $a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-1}}$. Поэтому для произвольного набора $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ из E_k^n , удовлетворяющего соотношению $\ker(\tilde{a}) = \varepsilon$, будут выполняться равенства

$$f(\tilde{a}) = f^\varepsilon(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) = \widehat{f}^\varepsilon(a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-1}}). \quad (3)$$

Если отношение эквивалентности ε состоит менее чем из k классов эквивалентных элементов, то положим $\widehat{f}^\varepsilon = f^\varepsilon$. Так же, как в теореме 1, для удобства записи все функции $f^{\varepsilon_1}, \dots, f^{\varepsilon_t}$ в теореме 2 рассматриваем от n переменных.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $k \geq 3$, $n > k$ и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$ – все отношения эквивалентности на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, которые состоят не более чем из k классов эквивалентных элементов. Тогда суперпозициями функции p в классе P_k можно определить такую функцию $h(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t)$, что для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k будет выполняться тождество

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_n, \widehat{f}^{\varepsilon_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \widehat{f}^{\varepsilon_t}(x_1, \dots, x_n)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функцию h определяем через функцию p так же, как в теореме 1. Далее пользуемся тождеством (2) и равенствами (3).

СЛЕДСТВИЕ. При любом $k \geq 2$ порядок произвольного дискриминаторного класса из P_k , содержащего все функции класса H_k , не превосходит $\max(3, k - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим лишь случай $k = 2$, который не покрывается теоремой 2. В этом случае класс H_2 всех однородных функций есть класс S самодвойственных булевых функций. Класс S , как известно, предполон в классе P_2 , а порядки классов S и P_2 равны соответственно 3 и 2 (см., например, [9]).

Отметим, что при любом $k \geq 2$ верхняя оценка $\max(3, k - 1)$ достигается на классе H_k [9], [11], [12].

Идея, использованная в теореме 2, допускает дальнейшие обобщения. Мы укажем только одно из них, которое связано с четными функциями.

Пусть $(a_1, \dots, a_n)$ – набор из E_k^n . Назовем $\mathbf{A}_k$ -орбитой набора $(a_1, \dots, a_n)$ множество всех наборов вида $(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n))$, где π – перестановка из группы $\mathbf{A}_k$. Далее рассматриваем наборы $(a_1, \dots, a_n)$ с попарно различными компонентами.

Из определения четной перестановки нетрудно вывести, что при $n \leq k-2$ все наборы указанного вида размерности n образуют одну $\mathbf{A}_k$ -орбиту, а при $n \in \{k-1, k\}$ – две $\mathbf{A}_k$ -орбиты. Если $n = k-1$, то эти две $\mathbf{A}_k$ -орбиты порождаются, например, наборами

$$(0, 1, \dots, k-3, k-2), \quad (0, 1, \dots, k-3, k-1),$$

а в случае $n = k$ – наборами

$$(0, 1, \dots, k-3, k-2, k-1), \quad (0, 1, \dots, k-3, k-1, k-2).$$

Если при $k \geq 4$ использовать функции r_k и γ_k , то первую пару наборов можно записать в виде

$$(0, 1, \dots, k-3, \gamma_k(0, 1, \dots, k-3)), \\ (0, 1, \dots, k-3, r_k(0, 1, \dots, k-3, \gamma_k(0, 1, \dots, k-3))),$$

вторую – в виде

$$(0, 1, \dots, k-3, \gamma_k(0, 1, \dots, k-3), r_k(0, 1, \dots, k-3, \gamma_k(0, 1, \dots, k-3))), \\ (0, 1, \dots, k-3, r_k(0, 1, \dots, k-3, \gamma_k(0, 1, \dots, k-3)), \gamma_k(0, 1, \dots, k-3)).$$

Таким образом, если при $k \geq 4$ набор $(a_1, \dots, a_{k-2})$ пробегает все множество наборов из E_k^{k-2} , не имеющих одинаковых компонент, то наборы

$$(a_1, \dots, a_{k-2}, \gamma_k(a_1, \dots, a_{k-2})), \\ (a_1, \dots, a_{k-2}, r_k(a_1, \dots, a_{k-2}, \gamma_k(a_1, \dots, a_{k-2})))$$

пробегают все множество наборов из E_k^{k-1} , также не имеющих одинаковых компонент. При этом первый набор принимает значения в одной $\mathbf{A}_k$ -орбите, второй – в другой $\mathbf{A}_k$ -орбите.

Аналогичное утверждение справедливо для наборов размерности k :

$$(a_1, \dots, a_{k-2}, \gamma_k(a_1, \dots, a_{k-2}), r_k(a_1, \dots, a_{k-2}, \gamma_k(a_1, \dots, a_{k-2}))), \\ (a_1, \dots, a_{k-2}, r_k(a_1, \dots, a_{k-2}, \gamma_k(a_1, \dots, a_{k-2})), \gamma_k(a_1, \dots, a_{k-2})).$$

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$, ε – отношение эквивалентности на множестве $\{1, \dots, n\}$, имеющее $k-1$ классов эквивалентных элементов, и функция $f^\varepsilon(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}})$ получена из функции f отождествлением переменных, как это определено выше. Положим

$$\widehat{f}_1^\varepsilon(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-2}}) = f^\varepsilon(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-2}}, \gamma_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-2}})), \\ \widehat{f}_2^\varepsilon(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-2}}) = f^\varepsilon(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-2}}, r_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-2}}, \gamma_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-2}}))).$$

Если $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ – набор из E_k^n и $\ker(\tilde{a}) = \varepsilon$, то одно из значений

$$\widehat{f}_1^\varepsilon(a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-2}}), \quad \widehat{f}_2^\varepsilon(a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-2}})$$

совпадает со значением $f^\varepsilon(a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-1}})$. Выбор соответствующей функции $\widehat{f}_1^\varepsilon$ или $\widehat{f}_2^\varepsilon$ определяется выполнимостью/невыполнимостью равенства $\gamma_k(a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-2}}) = a_{i_{k-1}}$.

Подобные построения проводим для отношения эквивалентности ε , состоящего из k классов эквивалентных элементов. Здесь соответствующие функции $\widehat{f}_1^\varepsilon$ и $\widehat{f}_2^\varepsilon$ суть

$$\begin{aligned} f^\varepsilon(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-2}}, \gamma_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-2}}), r_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-2}}, \gamma_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-2}}))), \\ f^\varepsilon(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-2}}, r_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-2}}, \gamma_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-2}})), \gamma_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-2}})). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $k \geq 4$, $n > k$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$ – все отношения эквивалентности на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, состоящие не более чем из $k - 2$ классов эквивалентных элементов, $\varepsilon_{t+1}, \dots, \varepsilon_{t+u}$ – все отношения эквивалентности, состоящие из $k - 1$ классов эквивалентных элементов, $\varepsilon_{t+u+1}, \dots, \varepsilon_{t+u+v}$ – все отношения эквивалентности, состоящие из k классов эквивалентных элементов. Тогда суперпозициями функций p, γ_k в классе P_k можно определить такую функцию $h(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{t+2u+2v})$, что для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k будет выполняться тождество

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_n, f^{\varepsilon_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, f^{\varepsilon_t}(x_1, \dots, x_n), \\ \widehat{f}_1^{\varepsilon_{t+1}}(x_1, \dots, x_n), \widehat{f}_2^{\varepsilon_{t+1}}(x_1, \dots, x_n), \dots, \\ \widehat{f}_1^{\varepsilon_{t+u}}(x_1, \dots, x_n), \widehat{f}_2^{\varepsilon_{t+u}}(x_1, \dots, x_n), \\ \widehat{f}_1^{\varepsilon_{t+u+1}}(x_1, \dots, x_n), \widehat{f}_2^{\varepsilon_{t+u+1}}(x_1, \dots, x_n), \dots, \\ \widehat{f}_1^{\varepsilon_{t+u+v}}(x_1, \dots, x_n), \widehat{f}_2^{\varepsilon_{t+u+v}}(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [7], [8], что функции p, γ_k образуют базис в классе A_k всех четных функций из P_k . Поэтому далее мы лишь укажем пункты определения функции h , которые согласованы с определением четной функции. Пусть $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ – произвольный набор из E_k^n . Если $\ker(\tilde{a}) = \varepsilon_j$, где $1 \leq j \leq t$, то полагаем $h(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_{t+2u+2v}) = y_j$; если $\ker(\tilde{a}) = \varepsilon_{t+j}$, где $1 \leq j \leq u$, то полагаем $h(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_{t+2u+2v})$ равным y_{t+2j-1} или y_{t+2j} в зависимости от того, совпадает ли значение $\gamma_k(a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-2}})$ со значением $a_{i_{k-1}}$ (элементы $a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-2}}, a_{i_{k-1}}$ выбраны для отношения эквивалентности $\ker(\tilde{a})$); если $\ker(\tilde{a}) = \varepsilon_{t+u+j}$, где $1 \leq j \leq v$, то полагаем $h(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_{t+2u+2v})$ равным $y_{t+2u+2j-1}$ или $y_{t+2u+2j}$ вновь в зависимости от справедливости равенства $\gamma_k(a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-2}}) = a_{i_{k-1}}$.

СЛЕДСТВИЕ. При любом $k \geq 4$ порядок произвольного дискриминаторного класса из P_k , содержащего функцию γ_k , не превосходит $\max(3, k - 2)$.

Отметим, что при любом $k \geq 4$ оценка $\max(3, k - 2)$ достигается на классе A_k (см. [7], [8]). Однако при $k = 2, 3$ порядки дискриминаторных классов, содержащих множество A_k всех четных функций, равны 2 (см. [9], [13]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. А. Baker, A. F. Pixley, “Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems”, *Math. Z.*, **143**:2 (1975), 165–174.
- [2] С. С. Марченков, *Функциональные системы с операцией суперпозиции*, Физматлит, М., 2004.

- [3] С. С. Марченков, “О равномерном id-разложении булевых функций”, *Дискрет. матем.*, **2**:3 (1990), 29–41.
- [4] С. С. Марченков, “О степени равномерного id-разложения замкнутых классов в P_k ”, *Дискрет. матем.*, **3**:4 (1991), 128–142.
- [5] С. В. Яблонский, *Введение в дискретную математику*, Наука, М., 1986.
- [6] E. Marczewski, “Homogeneous operations and homogeneous algebras”, *Fund. Math.*, **56**:1 (1964), 81–103.
- [7] С. С. Марченков, “О классификации алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов”, *Докл. АН СССР*, **265**:3 (1982), 533–536.
- [8] С. С. Марченков, “Классификация алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов”, *Математические вопросы кибернетики*, Вып. 2, Наука, М., 1989, 100–122.
- [9] С. С. Марченков, *Замкнутые классы булевых функций*, Физматлит, М., 2000.
- [10] B. Ganter, J. Płonka, H. Werner, “Homogeneous algebras are simple”, *Fund. Math.*, **79**:3 (1973), 217–220.
- [11] С. С. Марченков, “О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики”, *Проблемы кибернетики*, Вып. 36, Наука, М., 1979, 5–22.
- [12] С. С. Марченков, “Однородные алгебры”, *Проблемы кибернетики*, Вып. 39, Наука, М., 1982, 85–106.
- [13] С. С. Марченков, Я. Деметрович, Л. Ханнак, “О замкнутых классах самодвойственных функций в P_3 ”, *Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач*, Вып. 34, Ин-т матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1980, 38–73.

С. С. Марченков

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: mathcyb@cs.msu.su

Поступило

09.01.2008