Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Осипов, Функция G_{λ}^* как норма оператора
Кальдерона–Зигмунда, *Матем. заметки*, 2009, том 86,
выпуск 3, 421–428

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4434>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:15:33

Функция G_λ^* как норма оператора Кальдерона–Зигмунда

Н. Н. Осипов

Описан новый взгляд на одну из квадратичных функций в теории Литтлвуда–Пэли, а именно, функцию G_λ^* . Показано, что некоторые ее свойства можно вывести из общей теории операторов типа Кальдерона–Зигмунда (которая, по-видимому, считалась неприменимой в этом контексте). Имеются приложения к теории интерполяции.

Библиография: 5 названий.

1. Введение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функцией G_λ^* принято называть оператор, определенный по формуле

$$G_\lambda^*(f)(x) = \left(\int_0^\infty \int_{t \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{y}{|t| + y} \right)^{\lambda n} |\nabla \tilde{f}(x - t, y)|^2 y^{1-n} dt dy \right)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где f функция на $\mathbb{R}^n$ и $\tilde{f}$ – ее интеграл Пуассона, причем градиент берется по всем переменным, в том числе и по y .

Наряду с другими квадратичными функциями – такими как S -функция Лузина или g -функция Харди–Литтлвуда – этот оператор довольно эффективно использовался в теории мультипликаторов Фурье, см., например, [1]. Все три упомянутых оператора ограничены в $L^p(\mathbb{R}^n)$, где $1 < p < \infty$. В то время как для S -функции и g -функции L^p -ограниченность можно доказать в рамках теории сингулярных интегральных операторов типа Кальдерона–Зигмунда, было общепринято считать, что к оператору G_λ^* эта теория неприменима. Основная оценка для G_λ^* выглядит так:

$$\|G_\lambda^*(f)\|_p \leq A_{p,\lambda} \|f\|_p, \quad \lambda > 1, \quad \text{и} \quad p > \max\left(1, \frac{2}{\lambda}\right) \quad (1)$$

(см. [1] и [2]), причем в [2] показано, что она действительно нарушается, если $1 < p \leq 2/\lambda$, а это было бы невозможно, если бы дело сводилось к сингулярному интегралу.

Цель настоящей заметки – показать, что и в функции G_λ^* все же спрятан сингулярный интегральный оператор. Он будет действовать в пространство функций со значениями во вспомогательном гильбертовом пространстве, а функция G_λ^* будет выражаться через норму в этом пространстве, поэтому мы дадим определение операторов типа Кальдерона–Зигмунда между пространствами векторнозначных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть X и Y – банаховы пространства. Оператор T называется оператором Кальдерона–Зигмунда, если

- (а) T действует из $L^p(\mathbb{R}^n, X)$ в $L^p(\mathbb{R}^n, Y)$ при некотором $p \in (1, \infty)$;
- (б) у оператора T есть ядро $K(\cdot, \cdot)$ со значениями в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$, т.е. если у функции f из $L^p(\mathbb{R}^n, X)$ компактный носитель, то для почти всех s , не лежащих в $\text{supp } f$, выполнено равенство

$$(Tf)(s) = \int_{\mathbb{R}^n} K(s, t)f(t) dt;$$

- (с) ядро K удовлетворяет определенному условию гладкости. Приведем три неэквивалентных варианта такого условия:

- (с1) если $s \neq t$, то

$$\|\nabla_t K(s, t)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq \frac{C}{|s - t|^{n+1}};$$

- (с2) существует такая константа C , что для любого шара D в $\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\int_{s \notin 5D} \|K(s, t_1) - K(s, t_2)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} ds \leq C, \quad t_1, t_2 \in D;$$

- (с3) существует такая константа C , что для любого шара D в $\mathbb{R}^n$ и для любого вектора x из X справедливо неравенство

$$\int_{s \notin 5D} \|(K(s, t_1) - K(s, t_2))x\|_Y ds \leq C\|x\|_X, \quad t_1, t_2 \in D.$$

Условия (с1)–(с3) перечислены так, что каждое следующее слабее предыдущего.

Широко известно (см. [1]), что всякий оператор Кальдерона–Зигмунда действует из $L^r(\mathbb{R}^n, X)$ в $L^r(\mathbb{R}^n, Y)$ при $1 < r \leq p$ и имеет слабый тип $(1, 1)$. Чтобы включить и случай $r > p$, нужно накладывать одно из условий гладкости по другой переменной, иными словами, требовать, чтобы T^* тоже был оператором Кальдерона–Зигмунда.

2. Формулировка основной теоремы. Вспомогательное гильбертово пространство, о котором шла речь выше, диктуется определением оператора G_λ^* :

$$\mathcal{H} = \left\{ h : \|h\|^2 = \int_0^\infty \int_{t \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{y}{|t| + y} \right)^{\lambda n} |h(t, y)|^2 y^{1-n} dt dy < \infty \right\};$$

здесь функции h действуют в пространство $\mathbb{C}^{n+1}$ и заданы в верхнем полупространстве $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(t, y) : t \in \mathbb{R}^n, y > 0\}$. Пусть $P_y(x)$ обозначает ядро Пуассона, т.е.

$$P_y(x) = \frac{Cy}{(|x|^2 + y^2)^{(n+1)/2}},$$

где C – нормировочная постоянная, обеспечивающая равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_y(x) dx = 1, \quad y > 0.$$

Тогда $G_\lambda^*(f)(x) = \|T(f)(x)\|_{\mathcal{H}}$, где оператор $T: L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$ задается формулой

$$T(f)(x)(t, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla P_y(x - t - s) f(s) ds.$$

Здесь градиент снова берется по всем переменным. Ядро $K(t, y)(x, s) = \nabla P_y(x - t - s)$ этого оператора можно рассматривать как функцию, которая каждой паре (x, s) из $\mathbb{R}^{n+1}$ сопоставляет линейный оператор из $\mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathcal{H})$.

Теперь рассмотрим сопряженный оператор T^* . Его ядро является функцией, которая сопоставляет каждой паре (x, s) из $\mathbb{R}^{n+1}$ линейный оператор из $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ и задается формулой

$$\tilde{K}(x, s)(h) = \int_0^\infty \int_{t \in \mathbb{R}^n} (h(t, y), K(t, y)(x, s))_{\mathbb{C}^{n+1}} \left(\frac{y}{|t| + y} \right)^{\lambda n} y^{1-n} dt dy,$$

где $h \in \mathcal{H}$.

ТЕОРЕМА. 1) Оператор T^* является оператором Кальдерона–Зигмунда при $\lambda > 1$, при этом условие гладкости ядра выполнено в форме (с3).

2) Оператор T является оператором Кальдерона–Зигмунда при $\lambda > 2 + 2/n$, при этом условие гладкости выполнено в форме (с1).

3. Обсуждение и следствия. Ядро оператора T несимметрично (разумеется, хотя бы из-за того, что он переводит скалярные функции в $\mathcal{H}$ -значные). Теоремой гарантированы разные свойства этого ядра по разным переменным. Пункт 1) важнее пункта 2) и имеет некоторую историю.

Рассмотрим аналог оператора G_2^* в единичном круге, т.е. оператор

$$G(f)(\alpha) = \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |\nabla \tilde{f}(z)|^2 \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\alpha} - z|^2} \ln \frac{1}{|z|} dA(z) \right)^{1/2}, \quad \alpha \in \mathbb{T}$$

(здесь A обозначает меру Лебега на плоскости). Джонс и Мюллер в своей статье [3] среди прочего доказали с помощью броуновского движения следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $2 < p < \infty$, $f \in H^p(\mathbb{T})$ и $\alpha > 0$. Тогда существует функция $g \in H^\infty(\mathbb{T})$ такая, что

$$\|g\|_\infty \leq \alpha, \quad \|G(g)\|_\infty \leq C\alpha, \quad \|f - g\|_2^2 \leq C\alpha^{2-p} \|f\|_p^p.$$

Оценки для $\|g\|_\infty$ и $\|f - g\|_2^2$ здесь такие же, как если бы мы грубо разрезали функцию $|f|$ по уровню α . Однако выясняется, что функцию g можно выбрать аналитической, да вдобавок еще и такой, что $\|G(g)\|_\infty \leq C\alpha$.

Имеются общие схемы доказательства такого рода утверждений, не апеллирующие к броуновскому движению, но использующие линейную двойственность. Для того, чтобы такая схема была применима, достаточно, чтобы оператор G интерпретировался как оператор Кальдерона–Зигмунда в том же смысле, что и в пункте 1) теоремы. В статье [4] было проверено, что это действительно так. Таким образом, в настоящей заметке мы показываем, что то же самое верно не только для круга, но и для пространства $\mathbb{R}^n$, и что параметр $\lambda = 2$ – не исключение. Пункт 2) теоремы следует рассматривать как дополнение к этому утверждению.

Приведем более точную информацию о возможности “разрезания” функции на части с сохранением дополнительных свойств (как в упомянутом результате Джонса и Мюллера). Результаты удобно формулировать в терминах K -замкнутости. Вначале сформулируем определение этого понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть (E_0, E_1) – пара банаховых пространств, лежащих в каком-то большем линейном топологическом пространстве. Пусть F_0 и F_1 – замкнутые подпространства в E_0 и E_1 соответственно. Говорят, что пара (F_0, F_1) K -замкнута в паре (E_0, E_1) , если для любой функции f из $F_0 + F_1$ и любого разложения $f = e_0 + e_1$, где $e_0 \in E_0$ и $e_1 \in E_1$, существует другое разложение $f = f_0 + f_1$, где $f_0 \in F_0$, $f_1 \in F_1$ и $\|f_i\| \leq C\|e_i\|$, $i = 0, 1$ (константа C не зависит от выбранных векторов).

Теперь рассмотрим проекцию Q , действующую в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n, E)$, где E – некоторое банахово пространство, для простоты рефлексивное. Если Q является оператором Кальдерона–Зигмунда, то определение

$$X_r = \{f \in L^r(\mathbb{R}^n, E) : Qf = f\} \quad (2)$$

имеет смысл при $1 \leq r \leq p$. Если же Q^* является оператором Кальдерона–Зигмунда, то (2) имеет смысл при $p \leq r \leq \infty$. Подробно об этом написано в статье [4]. Там же сформулирована следующая теорема, известная довольно давно (об истории вопроса см. обзор [5]).

ТЕОРЕМА О K -ЗАМКНУТОСТИ. 1) Если определенная выше проекция Q является оператором Кальдерона–Зигмунда, то пара (X_{r_1}, X_{r_2}) K -замкнута в паре $(L^{r_1}(E), L^{r_2}(E))$ при $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq p$.

2) Если Q^* является оператором Кальдерона–Зигмунда, то пара (X_{r_1}, X_{r_2}) K -замкнута в паре $(L^{r_1}(E), L^{r_2}(E))$ при $p \leq r_1 \leq r_2 \leq \infty$.

3) Если Q и Q^* являются операторами Кальдерона–Зигмунда, то пара (X_{r_1}, X_{r_2}) K -замкнута в паре $(L^{r_1}(E), L^{r_2}(E))$ при $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \infty$.

Введем следующее обозначение:

$$W_p = \{(f, Tf) : \max(\|f\|_{L^p(\mathbb{C})}, \|Tf\|_{L^p(\mathcal{H})}) < \infty\},$$

где $2 \leq p \leq \infty$. Тогда из пункта 1 нашей основной теоремы и из теоремы о K -замкнутости получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пара (W_2, W_∞) K -замкнута в паре $(L^2(\mathbb{C} \oplus \mathcal{H}), L^\infty(\mathbb{C} \oplus \mathcal{H}))$.

Достаточно в качестве проектора Q взять оператор, который действует в пространстве $L^2(\mathbb{C} \oplus \mathcal{H})$ и определяется формулой $Q(f, g) = (f, Tf)$.

Из этого следствия легко выводится аналог результата Джонса и Мюллера при произвольном λ . Мы оставляем для простоты классы Харди H^p (в случае пространства $\mathbb{R}^n$ потребовалось бы дополнительное обсуждение) и ограничимся разбиением функции $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Из (1) следует, что $\|Tf\|_{L^p(\mathcal{H})} \leq C\|f\|_2$. С помощью грубого разрезания по уровню α ($\alpha > 0$) можно найти такие функции $g_1 \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ и $g_2 \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$, что

$$\|g_1\|_\infty, \|g_2\|_{L^\infty(\mathcal{H})} \leq C\alpha, \quad \|f - g_1\|_2^2, \|Tf - g_2\|_{L^2(\mathcal{H})}^2 \leq C\alpha^{2-p}\|f\|_p^p.$$

Следствие 1 показывает, что функции g_1 и g_2 можно изменить так, что $g_2 = Tg_1$, проиграв лишь в оценочных постоянных.

Хотя пункт 2 теоремы и не имеет такой истории, из него все-же вытекают некоторые интересные свойства оператора G_λ^* ранее, по-видимому, не замеченные. В статье Феффермана [2] доказано, что если $1 < p < 2$ и $\lambda = 2/p$, то у оператора G_λ^* слабый тип (p, p) , причем эта оценка точна. Из пункта 2 теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. При $\lambda > 2 + 2/n$ оператор G_λ^* имеет слабый тип $(1, 1)$.

Ниже будет доказано, что такая оценка также является точной, т.е. G_λ^* не действует из L^1 в L^1 . Интересно заметить, что в утверждении Феффермана показатели p и λ жестко связаны между собой формулой $\lambda = 2/p$, в нашем же случае p фиксировано (фактически речь идет о случае $p = 1$), а λ меняется на луче.

Теперь докажем, что если $f = \chi_{[0,1]}$ и $\lambda > 2$, то $G_\lambda^*(f) \notin L^1(\mathbb{R})$. Будем рассматривать значения x , большие 10, и интегрировать по множеству $\Omega = \{(t, y) : |t| < x/2, y < x\}$. При таких условиях справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |\nabla \tilde{f}(x-t, y)| &= \left| \int_0^1 K(t, y)(x, s) ds \right| \geq Cy \left| \int_0^1 \frac{(x-t-s) ds}{((x-t-s)^2 + y^2)^2} \right| \\ &= C \left| \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-t-1)^2 + y^2} \right| \\ &= Cy \left| \frac{1 - 2(x-t)}{((x-t)^2 + y^2)((x-t-1)^2 + y^2)} \right| \asymp \frac{y}{x^3}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что если $x > 10$, то

$$G_\lambda^*(f)(x) \geq \left(\frac{C}{x^6} \int_0^x y^{\lambda+2} \left[\int_0^{x/2} \frac{dt}{(t+y)^\lambda} \right] dy \right)^{1/2} \geq \left(\frac{C}{x^6} \int_0^x y^3 dy \right)^{1/2} \asymp \frac{1}{x}.$$

Таким образом, $G_\lambda^*(f)$ не попадает в пространство $L^1(\mathbb{R})$.

Из обоих пунктов основной теоремы и из теоремы о K -замкнутости следует, что если $\lambda > 2 + 2/n$, то введенные нами ранее пространства W_p имеют смысл при $1 \leq p \leq \infty$ и мы можем сформулировать

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $\lambda > 2 + 2/n$, то пара (W_1, W_∞) будет K -замкнута в паре $(L^1(\mathbb{C} \oplus \mathcal{H}), L^\infty(\mathbb{C} \oplus \mathcal{H}))$.

4. Доказательство пункта 1). То, что оператор T (а с ним и T^*) ограничен в L^2 -метрике, доказано в стандартных руководствах (см., например, [1]). Следовательно, нам надо проверить гладкость ядра. Пусть D – шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса R , и пусть $s_1, s_2 \in D$. Мы должны проверить неравенство

$$\begin{aligned} \int_{x \notin 5D} \left| \int_0^\infty \int_{t \in \mathbb{R}^n} \left(h(t, y), K(t, y)(x, s_1) - K(t, y)(x, s_2) \right)_{\mathbb{C}^{n+1}} \left(\frac{y}{|t| + y} \right)^{\lambda n} y^{1-n} dt dy \right| dx \\ \leq C \|h\|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

для любой функции $h \in \mathcal{H}$ с константой C , не зависящей от h . Заносим модуль под знак интеграла, меняя порядок интегрирования и пользуясь неравенством Коши, получаем, что достаточно проверить следующее:

$$\int_0^\infty \int_{t \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{x \notin 5D} |K(t, y)(x, s_1) - K(t, y)(x, s_2)| dx \right)^2 \left(\frac{y}{|t| + y} \right)^{\lambda n} y^{1-n} dt dy \leq C. \quad (3)$$

Разобьем в (3) область интегрирования по t и y на три части

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{(t, y) : |t| > R, y \leq R\}, & \Omega_2 &= \{(t, y) : |t| \leq R\}, \\ \Omega_3 &= \{(t, y) : |t| > R, y > R\}.\end{aligned}$$

Рассмотрим область Ω_1 . Так как

$$|K(t, y)(x, s)| \leq \frac{C}{(|x - t - s| + y)^{n+1}},$$

интеграл по x мажорируется следующим выражением:

$$C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(|\xi| + y)^{n+1}} = C \int_0^\infty \frac{r^{n-1} dr}{(r + y)^{n+1}} = \frac{C}{y} \int_0^\infty \frac{\rho^{n-1} d\rho}{(\rho + 1)^{n+1}} \asymp \frac{1}{y}.$$

А тогда вклад области Ω_1 в интеграл (3) не превосходит величины

$$C \int_0^R \int_{|t| > R} \frac{y^{\lambda n - n - 1}}{(|t| + y)^{\lambda n}} dt dy \asymp \int_0^R \frac{dy^{\lambda n - n}}{R^{\lambda n - n} + y^{\lambda n - n}} = \ln 2.$$

Прежде чем оценивать вклад двух других областей, проделаем некоторые предварительные вычисления. Имеем

$$|K(t, y)(x, s_1) - K(t, y)(x, s_2)| = \left| \int_I \nabla_s K(t, y)(x, s) \frac{s_2 - s_1}{|s_2 - s_1|} d\mu(s) \right|,$$

где I – отрезок, соединяющий точки s_1 и s_2 , а μ – мера Лебега на нем. Все элементы матрицы $\nabla_s K(t, y)(x, s)$ не превосходят значения $C/(|x - t - s| + y)^{n+2}$, поэтому

$$|K(t, y)(x, s_1) - K(t, y)(x, s_2)| \leq C \int_I \frac{d\mu(s)}{(|x - t - s| + y)^{n+2}}. \quad (4)$$

Рассмотрим область Ω_2 . Из того, что $|t| \leq R$, $x \notin 5D$ и $s \in D$, следует, что $|x - t - s| \geq R$. Пользуясь этим, а также оценкой (4), получаем, что интеграл по x ограничен выражением

$$C \int_{x \notin 5D} \int_I \frac{d\mu(s) dx}{(|x - t - s| + y)^{n+2}} \leq C \int_I \int_{|\xi| \geq R} \frac{d\xi d\mu(s)}{(|\xi| + y)^{n+2}} \leq \frac{CR}{(R + y)^2}.$$

Тогда вклад области Ω_2 в интеграл (3) не превосходит величины

$$CR^2 \int_0^\infty \frac{y^{\lambda n - n + 1}}{(R + y)^4} \left[\int_{|t| \leq R} \frac{dt}{(|t| + y)^{\lambda n}} \right] dy. \quad (5)$$

Интеграл по t оценивается следующим образом:

$$\int_{|t| \leq R} \frac{dt}{(|t| + y)^{\lambda n}} = Cy^{n - \lambda n} \int_0^{R/y} \frac{\rho^{n-1} d\rho}{(1 + \rho)^{\lambda n}} \leq Cy^{n - \lambda n} \int_0^\infty \frac{\rho^{n-1} d\rho}{(1 + \rho)^{\lambda n}} \asymp y^{n - \lambda n}.$$

Тогда интеграл (5) мажорируется величиной

$$CR^2 \int_0^\infty \frac{y dy}{(R + y)^4} = C \int_0^\infty \frac{w dw}{(1 + w)^4} \asymp 1.$$

Осталось рассмотреть область Ω_3 . Используя неравенство (4), оценим интеграл по x . Для этого расширим область интегрирования на все $\mathbb{R}^n$:

$$C \int_{x \notin 5D} \int_I \frac{d\mu(s) dx}{(|x - t - s| + y)^{n+2}} \leq CR \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(|\xi| + y)^{n+2}} \leq \frac{CR}{y^2}.$$

Тогда вклад области Ω_3 не превосходит величины

$$\begin{aligned} & CR^2 \int_R^\infty y^{\lambda n - n - 3} \left[\int_{|t| > R} \frac{dt}{(|t| + y)^{\lambda n}} \right] dy \\ & \leq CR^2 \int_R^\infty \frac{y^{\lambda n - n - 3}}{(R + y)^{\lambda n - n}} dy \leq CR^2 \int_R^\infty \frac{dy}{y^3} \asymp 1. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали неравенство (3) и, вместе с ним, пункт 1) теоремы.

5. Доказательство пункта 2). Будем проверять условие (c1). Так как пространство $\mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathcal{H})$ можно отождествить с $\mathcal{H}$, нам надо проверить неравенство

$$\left\| \frac{\partial}{\partial s_i} K(\cdot, \cdot)(x, s) \right\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{|x - s|^{n+1}}.$$

Используя явную формулу для ядра Пуассона, легко показать, что

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla P_y(x) \right| \leq \frac{C}{(|x| + y)^{n+2}}.$$

Обозначив $d = x - s$, получаем, что справедлива оценка

$$\left\| \frac{\partial}{\partial s_i} K(\cdot, \cdot)(x, s) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \int_0^\infty \int_{t \in \mathbb{R}^n} \frac{y^{\lambda n - n + 1} dt dy}{(|d - t| + y)^{2n+4} (|t| + y)^{\lambda n}}. \quad (6)$$

Разобьем область интегрирования в правой части неравенства (6) на четыре подобласти

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{ (t, y) : \frac{|d|}{2} \leq |t| \leq 2|d|, y \leq |d| \right\}, & \Omega_2 &= \left\{ (t, y) : |t| < \frac{|d|}{2}, y \leq |d| \right\}, \\ \Omega_3 &= \{ (t, y) : |t| \leq 2|d|, y > |d| \}, & \Omega_4 &= \{ (t, y) : |t| > 2|d| \}. \end{aligned}$$

Если мы находимся в области Ω_1 , то $|t| + y \asymp |d|$. Тогда вклад этой области в интеграл из неравенства (6) не превосходит величины

$$\begin{aligned} & \frac{C}{|d|^{\lambda n}} \int_0^{|d|} y^{\lambda n - n + 1} \left[\int_{|d|/2 \leq |t| \leq 2|d|} \frac{dt}{(|d - t| + y)^{2n+4}} \right] dy \\ & \leq \frac{C}{|d|^{\lambda n}} \int_0^{|d|} y^{\lambda n - n + 1} \left[\int_0^\infty \frac{r^{n-1} dr}{(r + y)^{2n+4}} \right] dy \\ & \leq \frac{C}{|d|^{\lambda n}} \int_0^{|d|} y^{\lambda n - 2n - 3} dy \asymp \left(\frac{1}{|d|^{n+1}} \right)^2. \end{aligned}$$

Последнее соотношение выполняется по причине того, что $\lambda > 2 + 2/n$.

Теперь рассмотрим область Ω_2 . Так как в этой области $|d - t| + y \asymp |d|$, ее вклад не превосходит величины

$$\begin{aligned} \frac{C}{|d|^{2n+4}} \int_0^{|d|} \int_{|t| < |d|/2} \frac{y^{\lambda n - n + 1}}{(|t| + y)^{\lambda n}} dt dy &\leq \frac{C}{|d|^{2n+4}} \int_0^{|d|} y^{\lambda n - n + 1} \left[\int_0^\infty \frac{r^{n-1} dr}{(r + y)^{\lambda n}} \right] dy \\ &\leq \frac{C}{|d|^{2n+4}} \int_0^{|d|} y dy \asymp \left(\frac{1}{|d|^{n+1}} \right)^2. \end{aligned}$$

В области Ω_3 выполнены соотношения $|d - t| + y \asymp y$ и $|t| + y \asymp y$. Поэтому ее вклад мажорируется величиной

$$C \int_{|d|}^\infty \int_{|t| \leq 2|d|} y^{-3n-3} dt dy \asymp \left(\frac{1}{|d|^{n+1}} \right)^2.$$

Осталось рассмотреть область Ω_4 . В ней выполнено соотношение $|d - t| + y \asymp |t| + y$. Поэтому интеграл по ней не превосходит величины

$$C \int_0^\infty \int_{|t| > 2|d|} \frac{y^{\lambda n - n + 1} dt dy}{(|t| + y)^{\lambda n + 2n + 4}} \leq C \int_0^\infty \frac{y^{\lambda n - n + 1} dy}{(2|d| + y)^{\lambda n + n + 4}} \leq \left(\frac{C}{|d|^{n+1}} \right)^2.$$

Таким образом, пункт 2) теоремы доказан.

Задача о трактовке функции G_λ^* как нормы интегрального сингулярного оператора типа Кальдерона–Зигмунда была поставлена моим научным руководителем С. В. Кисляковым. Выражаю ему свою благодарность за тщательное редактирование этой работы на всех этапах ее написания. Также хочу поблагодарить В. И. Васюнина за ценные замечания, позволившие значительно упростить доказательства обоих пунктов теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.
- [2] C. Fefferman, “Inequalities for strongly singular convolution operators”, *Acta Math.*, **124** (1970), 9–36.
- [3] P. W. Jones, P. F. X. Müller, “Conditioned Brownian motion and multipliers into SL^∞ ”, *Geom. Funct. Anal.*, **14**:2 (2004), 319–379.
- [4] Д. С. Анисимов, С. В. Кисляков, “Двойные сингулярные интегралы: интерполяция и исправление”, *Алгебра и анализ*, **16**:5 (2004), 1–33.
- [5] S. V. Kisliakov, “Interpolation of H^p -spaces: some recent developments”, *Function spaces, interpolation spaces, and related topics* (Haifa, 1995), Israel Math. Conf. Proc., **13**, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999, 102–140.

Н. Н. Осипов

Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: nick@nightbee.net

Поступило

21.01.2008