Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Плотников, Об интегралах обобщенного римановского типа на плоскости и об одном примере двойного ряда Хаара, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 4, 601–611

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4435>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 11:58:55

Об интегралах обобщенного римановского типа на плоскости и об одном примере двойного ряда Хаара

М. Г. Плотников

Доказывается, что для двойных рядов Хаара, для двоичного кубического интеграла Хенстока и для регулярной сходимости по прямоугольникам не выполняется теорема типа Дю Буа-Реймона.

Библиография: 12 названий.

Классическая теорема Дю Буа-Реймона [1; гл. 1, § 72] утверждает, что тригонометрический ряд $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, всюду сходящийся к интегрируемой по Риману функции $f(x)$, является рядом Фурье этой функции, т.е.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, & n = 0, 1, \dots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, & n = 1, \dots \end{aligned}$$

Этот результат обобщался на случай других интегралов и переносился на ряды по различным системам функций. В [2; теорема 6] подобный результат был доказан для двойных рядов Хаара

$$(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \chi_{n,m}(x, y) \quad (1)$$

и для $(H_{1/2,d})$ -интеграла (см. определение 3 ниже). Мы покажем, что для интеграла, чуть более общего, чем $(H_{1/2,d})$ -интеграл, теорема типа Дю Буа-Реймона для рядов (1) перестает выполняться.

Символом A° обозначим *внутренность* множества A в топологии $\mathbb{R}^2$. Под *мерой* в работе понимается мера Лебега в $\mathbb{R}^2$. Пусть $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^2$. Тогда для $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ и $F \subset \mathbb{R}^2$ выражение $\text{dist}(\mathbf{z}, F)$ будет означать $\inf_{\mathbf{y} \in F} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$, а выражение $\text{diam } F$ – *диаметр* множества F , т.е. $\sup_{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in F} \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|$. Символом $B(\mathbf{z}, r)$ обозначим открытый *шар* из $\mathbb{R}^2$ радиуса r с центром в точке $\mathbf{z}$. Два множества $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}^2$ называются *неперекрывающимися*, если $J_1^\circ \cap J_2^\circ = \emptyset$. Выражение $(R) \int_{\Delta} f$ означает *интеграл в смысле Римана* от функции f по множеству $\Delta \subset \mathbb{R}^2$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00669), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-4681.2006.1) и программы “Молодые ученые” (грант № МК-3667.2007.1).

Точки множества $Q_d := \{p/2^n \in [0, 1] : p, n \in \mathbb{Z}_+\}$ называются *двоично-рациональными*, а точки множества $I_d := [0, 1] \setminus Q_d$ – *двоично-иррациональными*. Двоичный интервал ранга (k, l) есть замкнутый сегмент вида

$$\Delta_{k,l}^{i,j} = \left[\frac{i-1}{2^k}; \frac{i}{2^k} \right] \times \left[\frac{j-1}{2^l}; \frac{j}{2^l} \right], \quad (2)$$

$k, l = 0, 1, \dots, i = 1, \dots, 2^k, j = 1, \dots, 2^l$. Двоичный интервал (2) с $k = l$ называется *двоичным квадратом*. Пусть $\mathbf{z} \in [0, 1]^2$. Двойную последовательность $\{\Delta_{k,l}\}_{k,l=0}^\infty$ двоичных интервалов назовем *$\mathbf{z}$ -последовательностью*, если для всех $k, l = 0, 1, \dots$ выполнены следующие условия: $\mathbf{z} \in \Delta_{k,l}$, ранг двоичного интервала $\Delta_{k,l}$ равен (k, l) , $\Delta_{k+1,l} \subset \Delta_{k,l}$, $\Delta_{k,l+1} \subset \Delta_{k,l}$.

Пусть $\phi(x)$ есть 1 при $x \in (0, 1/2)$, -1 при $x \in (1/2, 1)$ и 0 при $x \notin [0, 1]$. Тогда система Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $x \in [0, 1]$, определяется так: $\chi_1(x) \equiv 1$; если же $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \dots, 0 \leq i \leq 2^k - 1$, то $\chi_{n+1}(x) = 2^{k/2} \phi(2^k x - i)$. В точке 0 (соответственно 1) функция $\chi_n(x)$ равна своему пределу справа (соответственно слева), а в остальных точках отрезка $[0, 1]$ – среднему арифметическому правого и левого пределов. При таком определении ряд Фурье–Хаара любой функции из $C[0, 1]$ сходится к ней равномерно на $[0, 1]$ (см. [3; гл. 3, § 2], [4]).

Двумерная функция Хаара $\chi_{n,m}(x, y)$ есть $\chi_n(x)\chi_m(y)$. Выражение $S_{N,M}(x, y) := \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{n,m} \chi_{n,m}(x, y)$ означает *прямоугольную частичную сумму* ряда (1) в точке (x, y) . Параметром регулярности двоичного интервала Δ назовем число $\text{reg } \Delta$, равное отношению длин минимальной и максимальной сторон этого интервала, а *параметром регулярности* вектора $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2)$ – число $\text{reg } \mathbf{Q} = \text{reg}(Q_1, Q_2)$, равное $\min\{Q_1/Q_2, Q_2/Q_1\}$. Пусть $\rho \in (0, 1]$. Тогда ряд (1) ρ -сходится в точке (x, y) к значению $S(x, y)$, если

$$S_{N,M}(x, y) \rightarrow S(x, y), \quad \min\{N, M\} \rightarrow \infty, \quad \text{reg}(N, M) \geq \rho.$$

Ряд (1) *сходится по прямоугольникам* в точке (x, y) к значению $S(x, y)$, если

$$S_{N,M}(x, y) \rightarrow S(x, y), \quad \min\{N, M\} \rightarrow \infty.$$

Ясно, что из сходимости по прямоугольникам ряда (1) в точке (x, y) вытекает ρ -сходимость этого ряда в точке (x, y) при любом $\rho \in (0, 1]$.

Пусть $\mathcal{I}$ означает множество всех двоичных интервалов. Функции множества $\Phi: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *$\mathcal{I}$ -функциями*. $\mathcal{I}$ -Функция Φ называется *супераддитивной* (соответственно *субаддитивной*), если

$$\sum_{i=1}^p \Phi(\Delta_i) \leq \Phi\left(\bigcup_{i=1}^p \Delta_i\right) \quad \left(\sum_{i=1}^p \Phi(\Delta_i) \geq \Phi\left(\bigcup_{i=1}^p \Delta_i\right) \right),$$

где $\Delta_i \in \mathcal{I}$, $i = 1, \dots, p$, $\bigcup_{i=1}^p \Delta_i \in \mathcal{I}$ и $\Delta_i^\circ \cap \Delta_j^\circ = \emptyset$, если $i \neq j$. Пусть $\overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{I}}$ (соответственно $\underline{\mathcal{A}}_{\mathcal{I}}$) означает класс супераддитивных (соответственно субаддитивных) $\mathcal{I}$ -функций. $\mathcal{I}$ -Функции из класса $\mathcal{A}_{\mathcal{I}} := \overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{I}} \cap \underline{\mathcal{A}}_{\mathcal{I}}$ называются *аддитивными*, а в ряде работ (см., например, [5]) их называют *квазимерами*.

Имея ряд (1), можно определить $\mathcal{I}$ -функцию Ψ формулой

$$\Psi(\Delta_{k,l}) = S_{2^k, 2^l}(\mathbf{z})|\Delta_{k,l}|, \quad (3)$$

где $\Delta_{k,l}$ – двоичный интервал ранга (k, l) , $\mathbf{z}$ – любая его внутренняя точка, а $|\Delta_{k,l}|$ – его площадь. При этом значение $\Psi(\Delta_{k,l})$, определяемое формулой (3), не зависит от $\mathbf{z} \in \Delta_{k,l}$. Хорошо известно (см., например, [6]), что функция Ψ является квазимерой. При этом соответствие между рядами (1) и квазимерами, определяемое формулой (3), является линейным изоморфизмом, если естественным образом наделить множество рядов (1) и множество квазимер структурой линейного пространства.

ТЕОРЕМА 1. Пусть заданы $\rho \in (0, 1]$, ряд (1) и точка $\mathbf{z} \in [0, 1]^2$. Пусть Ψ – $\mathcal{I}$ -функция, построенная для ряда (1) по формуле (3). Если для этой функции, для любой $\mathbf{z}$ -последовательности $\{\Delta_{k,l}\}$ и для некоторого $A \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\Psi(\Delta_{k,l}) = A|\Delta_{k,l}| + \bar{o}(|\Delta_{k,l}|), \quad \min\{k, l\} \rightarrow \infty, \quad \text{reg}(2^k, 2^l) \geq \frac{\rho}{2}, \quad (4)$$

то ряд (1) ρ -сходится в точке $\mathbf{z}$ к значению A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $x, y \notin \{0, 1\}$ (в противном случае доказательство аналогично). Одномерные функции Хаара $\chi_n(x)$ обладают тем свойством, что в любой точке $x \in (0, 1)$ при достаточно малом $\varepsilon = \varepsilon(n) > 0$ имеет место равенство $\chi_n(x) = (\chi_n(x - \varepsilon) + \chi_n(x + \varepsilon))/2$. Тогда для двумерных функций Хаара $\chi_{n,m}$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнено равенство

$$\chi_{n,m}(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta=0,1} \chi_{n,m}(x + (-1)^\alpha \varepsilon, y + (-1)^\beta \varepsilon). \quad (5)$$

Из (5) вытекает, что для частичных сумм $S_{N,M}(x, y)$ ряда (1) при достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнено равенство

$$S_{N,M}(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta=0,1} S_{N,M}(x + (-1)^\alpha \varepsilon, y + (-1)^\beta \varepsilon). \quad (6)$$

Из структуры ряда (1) следует, что

$$S_{N,M}(x + (-1)^\alpha \varepsilon, y + (-1)^\beta \varepsilon) = S_{2^k, 2^l}(x + (-1)^\alpha \varepsilon, y + (-1)^\beta \varepsilon), \quad (7)$$

где $k = k(\alpha, N, x, \varepsilon)$ и $l = l(\beta, M, y, \varepsilon)$ таковы, что $\text{reg}(2^k, 2^l) \geq \rho/2$. Используя (3), (4), (6) и (7), получаем

$$\begin{aligned} S_{N,M}(x, y) &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta=0,1} S_{2^k, 2^l}(x + (-1)^\alpha \varepsilon, y + (-1)^\beta \varepsilon) = \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta=0,1} \frac{\Psi(\Delta_{k,l}^{(\alpha, \beta)})}{|\Delta_{k,l}^{(\alpha, \beta)}|} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta=0,1} (A + \bar{o}(1)) = A + \bar{o}(1), \quad \min\{k, l\} \rightarrow \infty, \quad \text{reg}(2^k, 2^l) \geq \frac{\rho}{2}, \end{aligned}$$

где $\Delta_{k,l}^{(\alpha, \beta)}$ – двоичный интервал из одной из (x, y) -последовательностей, содержащий точку $(x + (-1)^\alpha \varepsilon, y + (-1)^\beta \varepsilon)$. Последняя цепочка доказывает теорему.

Рассмотрим при $\rho = 1/2$ один обобщенный интеграл, построенный в [7] для решения проблемы восстановления коэффициентов рядов (1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что функция $f(x, y): (I_d)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ является $(P_d^{1/2})$ -интегрируемой, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\mathcal{J}$ -функции $F_1 \in \overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{J}}$ (мажоранта) и $F_2 \in \underline{\mathcal{A}}_{\mathcal{J}}$ (миноранта) такие, что

1) если $\mathbf{z} \in (I_d)^2$ и $\{\Delta_{k,l}\}$ является $\mathbf{z}$ -последовательностью, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_1(\Delta_{n,n})}{|\Delta_{n,n}|} \geq f(\mathbf{z}) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{F_2(\Delta_{n,n})}{|\Delta_{n,n}|}; \quad (8)$$

2) если $\mathbf{z} \in Q_d \times I_d$, $\mathbf{z} \in I_d \times Q_d$ или $\mathbf{z} \in Q_d \times Q_d$ и $\{\Delta_{k,l}\}$ является любой из $\mathbf{z}$ -последовательностей, то для $i = 1, 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Delta_{n,n}|} \left[F_i(\Delta_{n,n}) - \frac{1}{2} F_i(\Delta_{n-1,n}) \right] = 0, \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Delta_{n,n}|} \left[F_i(\Delta_{n,n}) - \frac{1}{2} F_i(\Delta_{n,n-1}) \right] = 0 \quad (10)$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_i(\Delta_{n,n}) - F_i(\Delta_{n,n-1})/2 - F_i(\Delta_{n-1,n})/2 + F_i(\Delta_{n-1,n-1})/4}{|\Delta_{n,n}|} = 0 \quad (11)$$

соответственно;

3) $F_1([0, 1]^2) - F_2([0, 1]^2) < \varepsilon$.

$(P_d^{1/2})$ -Интеграл от функции $f(x, y)$ определяется для любого двоичного интервала Δ так:

$$(P_d^{1/2}) \int_{\Delta} f(x, y) dx dy = \sup_{F_2} F_2(\Delta) = \inf_{F_1} F_1(\Delta). \quad (12)$$

ТЕОРЕМА А [7; теорема 2]. Пусть для некоторого $\rho \in (0, 1/2]$ ряд (1) всюду на $[0, 1]^2$ ρ -сходится к конечной функции $f(x, y)$. Тогда функция $f(x, y)$ является $(P_d^{1/2})$ -интегрируемой и данный ряд есть ряд Фурье–Хаара относительно $(P_d^{1/2})$ -интеграла, т.е. его коэффициенты определяются формулой

$$a_{n,m} = (P_d^{1/2}) \int_{[0,1]^2} f(x, y) \chi_{n,m}(x, y) dx dy.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть задано $\rho \in (0, 1]$. Разбиением двоичного интервала I_0 называется набор $P = \{(\mathbf{z}_j, I_j)\}_{j=1}^m$, где I_j – двоичные интервалы, причем $I_j^\circ \cap I_k^\circ = \emptyset$, если $j \neq k$, $\mathbf{z}_j \in I_0$ и $\bigcup_{j=1}^m I_j = I_0$. Пусть задана функция $\delta(\mathbf{z}): I_0 \rightarrow (0; +\infty)$. Тогда разбиение P называется $(\delta(\mathbf{z}), \rho)$ -разбиением, если $\mathbf{z}_j \in I_j \subset B(\mathbf{z}_j, \delta(\mathbf{z}_j))$ и $\text{reg } I_j \geq \rho$ для всех $j = 1, \dots, m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\rho \in (0, 1]$, а Δ – двоичный интервал. Функция $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ называется интегрируемой по Хенстоку в ρ -регулярном двоичном смысле ($(H_{\rho,d})$ -интегрируемой) на интервале Δ , если существует действительное A , и для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\delta: \Delta \rightarrow (0, +\infty)$ такая, что для всех $(\delta(\mathbf{z}), \rho)$ -разбиений $P = \{(\mathbf{z}_j; I_j)\}_{j=1}^m$ интервала Δ выполняется неравенство $|\sum_{j=1}^m f(\mathbf{z}_j)|I_j| - A| < \varepsilon$. При этом $A = (H_{\rho,d}) \int_{\Delta} f(x, y) dx dy$.

Если функция f является $(H_{\rho,d})$ -интегрируемой на двоичных интервалах Δ_1 и Δ_2 , то она является $(H_{\rho,d})$ -интегрируемой и на $\Delta_1 \cup \Delta_2$. Если функция f является $(H_{\rho,d})$ -интегрируемой на $[0, 1]^2$, то $\mathcal{I}$ -функция

$$F(\Delta) = (H_{\rho,d}) \int_{\Delta} f(x, y) dx dy$$

является квазимерой (см. [8]). Отметим следующий факт, вытекающий из определений 2 и 3.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Если функция $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной на двоичном интервале Δ , то она является $(H_{\rho,d})$ -интегрируемой на Δ , причем*

$$(H_{\rho,d}) \int_{\Delta} f(x, y) dx dy = (R) \int_{\Delta} f(x, y) dx dy.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть C_1 и C_2 – классы интегрируемых в каком-либо смысле функций. Соответствующие интегралы называются *непротиворечивыми*, если $(C_1) \int_{\Delta} f = (C_2) \int_{\Delta} f$ для всех допустимых множеств Δ и для всех $f \in C_1 \cap C_2$.

В [2] было доказано, что $(P_d^{1/2})$ -интеграл и $(H_{1/2,d})$ -интеграл являются непротиворечивыми. Следствием этого факта и теоремы А является следующий результат.

ТЕОРЕМА В [2; теорема 7]. *Пусть задано $\rho \in (0, 1/2]$. Если ряд (1) всюду на $[0, 1]^2$ ρ -сходится к конечной функции $f(\mathbf{z})$, являющейся $(H_{1/2,d})$ -интегрируемой, то данный ряд является рядом Фурье–Хаара функции $f(\mathbf{z})$ относительно $(H_{1/2,d})$ -интеграла.*

Теорема В является теоремой типа Дю Буа-Реймона и обобщает известную теорему Скворцова (см. [9]). Мы покажем, что теорема В в некотором смысле неусиливаема. То, что в теореме В вместо $\rho \in (0, 1/2]$ нельзя рассмотреть значения ρ , близкие к единице, показывают результаты работы [10], где для каждого $\rho \in (\sqrt{2}/2, 1]$ был построен тождественно ненулевой ряд (1), ρ -сходящийся к нулю всюду на $[0, 1]^2$. Мы докажем, что теорема В перестает быть верной, если заменить в ней $(H_{1/2,d})$ -интеграл на $(H_{1,d})$ -интеграл. Параллельно будет установлена противоречивость $(H_{1/2,d})$ -интеграла и $(P_d^{1/2})$ -интеграла. Основным в работе является

КОНСТРУКЦИЯ 1. Построим квазимеру Ψ и функцию $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$. До конца работы $\tilde{z}$ означает точку $(1/2, 1/2)$. Функцию Ψ определим сначала на двоичных квадратах. Положим

$$\Psi([0, 1]^2) = 0. \quad (13)$$

Рассмотрим двоичные квадраты $\Delta_{n,n}^{i,j}$ в нумерации (2). Пусть $\Omega_1 = \Delta_{1,1}^{1,1}$, $\Omega_2 = \Delta_{1,1}^{1,2}$, $\Omega_3 = \Delta_{1,1}^{2,2}$ и $\Omega_4 = \Delta_{1,1}^{2,1}$. Положим

$$\Psi(\Omega_1) = \Psi(\Omega_3) = 1, \quad \Psi(\Omega_2) = \Psi(\Omega_4) = -1. \quad (14)$$

Рассмотрим теперь двоичные квадраты $\Delta_{n,n}^{i,j}$, лежащие в Ω_1 . При $n = 2, 3, \dots$ положим

$$\Psi(\Delta_{n,n}^{2^{n-1}-1, 2^{n-1}}) = \Psi(\Delta_{n,n}^{2^{n-1}, 2^{n-1}-1}) = \frac{1}{4}, \quad \Psi(\Delta_{n,n}^{2^{n-1}, 2^{n-1}}) = 1, \quad (15)$$

$$\Psi(\Delta_{n,n}^{2^{n-1}-1, 2^{n-1}-1}) = -\frac{1}{2}. \quad (16)$$

Пусть $n = 3, 4, \dots$. При $s \in \{2^{n-1} - 2, 2^{n-1} - 3\}$, $t = 2^{n-1}$ и $v = 2^{n-1} - 1$ положим

$$\Psi(\Delta_{n,n}^{s,t}) = \Psi(\Delta_{n,n}^{t,s}) = \frac{7}{16}, \quad \Psi(\Delta_{n,n}^{s,v}) = \Psi(\Delta_{n,n}^{v,s}) = -\frac{5}{16}. \quad (17)$$

Возьмем любой двоичный квадрат $\Delta \subset \Omega_1$, не совпадающий ни с одним квадратом из левых частей формул (14)–(17). Отметим, что в этом случае $\tilde{\mathbf{z}} \notin \Delta$. Кроме того, из геометрических соображений вытекает, что $\Delta \subset J$, где J – единственным образом определяемый двоичный квадрат, участвующий в одной из формул (16) или (17). Для каждого такого квадрата J выберем произвольную непрерывную функцию $f(x, y): J \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую следующим свойствам:

- $(R) \int_J f(x, y) dx dy = \Psi(J)$;
- $\text{supp } f \subset J^\circ$.

В результате функция $f(x, y)$ оказывается определенной и непрерывной на множестве $\Omega_1 \setminus \{\tilde{\mathbf{z}}\}$. Для всех двоичных квадратов $\Delta \subset (\Omega_1 \setminus \{\tilde{\mathbf{z}}\})$ положим

$$\Psi(\Delta) = (R) \int_{\Delta} f(x, y) dx dy, \quad (18)$$

Формулы (14)–(18) определяют функцию Ψ на всех двоичных квадратах $\Delta \subset \Omega_1$. Если двоичный квадрат $\Delta_{n,n}^{i,j}$, $n \geq 1$, лежит в $\Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$, то значение $\Psi(\Delta_{n,n}^{i,j})$ определяется по значению функции Ψ на некотором двоичном квадрате $\Delta \subset \Omega_1$ следующим образом:

$$\Psi(\Delta_{n,n}^{i,j}) = \begin{cases} -\Psi(\Delta_{n,n}^{i,2^n-j+1}) & \text{при } 1 \leq i \leq 2^{n-1}, 2^{n-1} + 1 \leq j \leq 2^n; \\ \Psi(\Delta_{n,n}^{2^n-i+1,2^n-j+1}) & \text{при } 1 \leq i, j \leq 2^{n-1}; \\ -\Psi(\Delta_{n,n}^{2^n-i+1,j}) & \text{при } 2^{n-1} + 1 \leq i \leq 2^n, 1 \leq j \leq 2^{n-1}. \end{cases} \quad (19)$$

Тем самым $\mathcal{J}$ -функция Ψ определена на всех двоичных квадратах. Из (13)–(19) вытекает аддитивность функции Ψ на двоичных квадратах. Если в определениях кольца и полукольца множеств рассматривать вместо непересекающихся множеств неперекрывающиеся, то семейство двоичных квадратов является полукольцом, которое порождает кольцо, состоящее из конечных объединений двоичных интервалов. По теореме о продолжении меры с полукольца на порождаемое им кольцо (см., например, [11; гл. 5]) функция Ψ единственным образом продолжается до квазимеры.

Рассмотрим теперь функцию $f(x, y)$, определенную на множестве $\Omega_1 \setminus \{\tilde{\mathbf{z}}\}$. Распространим эту функцию на множество $[0, 1]^2$, полагая для всех $0 \leq x, y \leq 1$

$$f(x, y) = f(1 - x, 1 - y) = -f(1 - x, y) = -f(x, 1 - y). \quad (20)$$

Функция f конечна на $[0, 1]^2$, непрерывна на $[0, 1]^2 \setminus \{\tilde{\mathbf{z}}\}$ и $f(1/2, 1/2) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В силу (19) и (20) равенство (18) справедливо для всех двоичных квадратов, не содержащих точку $\tilde{\mathbf{z}}$.

Далее мы рассмотрим ряд (S^*) вида (1), который изоморфен при помощи формулы (3) функции Ψ из конструкции 1.

ЛЕММА 1. *Всюду на $[0, 1]^2$ ряд (S^*) $(1/2)$ -сходится к функции f из конструкции 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x, y) \neq (1/2, 1/2)$. В силу замечания 1 равенство (18) справедливо для всех достаточно малых по диаметру двоичных интервалов, содержащих точку (x, y) . С учетом непрерывности функции f на $[0, 1]^2 \setminus \{\tilde{z}\}$ из (18) получаем

$$\Psi(\Delta) = f(x, y)|\Delta| + \bar{o}(|\Delta|), \quad \text{diam } \Delta \rightarrow 0, \quad (x, y) \in \Delta. \quad (21)$$

Из (21) и из теоремы 1 вытекает утверждение леммы для точек $(x, y) \neq (1/2, 1/2)$.

Рассмотрим теперь частичные суммы $S_{N,M}(1/2, 1/2)$ ряда (S^*) и покажем, что $S_{N,M}(1/2, 1/2) = 0$ при $N, M \geq 2$. Рассмотрим для $i = 1, \dots, 4$ $\tilde{z}$ -последовательность $\{\Delta_{k,l}^i\}$, каждый интервал из которой лежит при $k, l \geq 1$ в двоичном квадрате Ω_i . Из (15), (16) и (18) и из аддитивности функции Ψ вытекает справедливость при $n \geq 2$ равенств

$$\Psi(\Delta_{n,n-1}^i) = \Psi(\Delta_{n-1,n}^i) = (-1)^{i-1} \frac{5}{4}, \quad \Psi(\Delta_{n,n}^i) = (-1)^{i-1}, \quad (22)$$

$$\Psi(\Delta_{n+1,n-1}^i) = \Psi(\Delta_{n-1,n+1}^i) = (-1)^{i-1} \frac{17}{8}. \quad (23)$$

Используя (3), (6), (7), (22) и структуру рядов (1), получаем при $n \geq 1$ следующие цепочки:

$$\begin{aligned} S_{2^n, 2^n} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta=0,1} S_{2^n, 2^n} \left(\frac{1}{2} + (-1)^\alpha \varepsilon, \frac{1}{2} + (-1)^\beta \varepsilon \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \frac{\Psi(\Delta_{n,n}^i)}{|\Delta_{n,n}^i|} = \frac{1}{4|\Delta_{n,n}^1|} \sum_{i=1}^4 (-1)^{i-1} = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$S_{2^{n+1}, 2^n} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \frac{\Psi(\Delta_{n+1,n}^i)}{|\Delta_{n+1,n}^i|} = \frac{1}{4|\Delta_{n+1,n}^1|} \sum_{i=1}^4 (-1)^{i-1} \frac{5}{4} = 0, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} S_{2^n+2^{n-1}, 2^n} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta=0,1} S_{2^n+2^{n-1}, 2^n} \left(\frac{1}{2} + (-1)^\alpha \varepsilon, \frac{1}{2} + (-1)^\beta \varepsilon \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\Psi(\Delta_{n+1,n}^1)}{|\Delta_{n+1,n}^1|} + \frac{\Psi(\Delta_{n+1,n}^2)}{|\Delta_{n+1,n}^2|} + \frac{\Psi(\Delta_{n,n}^3)}{|\Delta_{n,n}^3|} + \frac{\Psi(\Delta_{n,n}^4)}{|\Delta_{n,n}^4|} \right) \\ &= \frac{1}{4|\Delta_{n+1,n}^1|} \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} S_{2^n+2^{n-1}, 2^{n+1}} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{4} \left(\frac{\Psi(\Delta_{n+1,n+1}^1)}{|\Delta_{n+1,n+1}^1|} + \frac{\Psi(\Delta_{n+1,n+1}^2)}{|\Delta_{n+1,n+1}^2|} + \frac{\Psi(\Delta_{n,n+1}^3)}{|\Delta_{n,n+1}^3|} + \frac{\Psi(\Delta_{n,n+1}^4)}{|\Delta_{n,n+1}^4|} \right) \\ &= \frac{1}{4|\Delta_{n+1,n+1}^1|} \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \frac{5}{4} \right) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Пусть $l = 2^n + 2^{n-1}$. Снова используя (3), (6), (7), (22) и структуру рядов (1), получаем при $n \geq 1$

$$\begin{aligned} S_{l,l} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta=0,1} S_{l,l} \left(\frac{1}{2} + (-1)^\alpha \varepsilon, \frac{1}{2} + (-1)^\beta \varepsilon \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\Psi(\Delta_{n+1,n+1}^1)}{|\Delta_{n+1,n+1}^1|} + \frac{\Psi(\Delta_{n+1,n}^2)}{|\Delta_{n+1,n}^2|} + \frac{\Psi(\Delta_{n,n}^3)}{|\Delta_{n,n}^3|} + \frac{\Psi(\Delta_{n,n+1}^4)}{|\Delta_{n,n+1}^4|} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4|\Delta_{n+1,n+1}^1|} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{5}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{5}{4} \right) = 0. \quad (28)$$

Используя (3), (6), (7), (22), (23) и структуру рядов (1), аналогично (28) при $n \geq 1$ получаем

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}+2^n, 2^n+2^{n-1}} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{4} \left(\frac{\Psi(\Delta_{n+2,n+1}^1)}{|\Delta_{n+2,n+1}^1|} + \frac{\Psi(\Delta_{n+2,n}^2)}{|\Delta_{n+2,n}^2|} + \frac{\Psi(\Delta_{n+1,n}^3)}{|\Delta_{n+1,n}^3|} + \frac{\Psi(\Delta_{n+1,n+1}^4)}{|\Delta_{n+1,n+1}^4|} \right) \\ &= \frac{1}{4|\Delta_{n+2,n+1}^1|} \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2} \frac{17}{8} + \frac{1}{4} \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Пусть $N, M \geq 2$. Рассмотрим произвольную частичную сумму $S := S_{N,M}(1/2, 1/2)$ с $\text{reg}(N, M) \geq 1/2$. Тогда имеет место следующая альтернатива. Либо S совпадает с одной из частичных сумм из левых частей формул (24)–(29), в этом случае $S = 0$. Либо S получается из одной из частичных сумм в левых частях формул (24)–(29) заменой нижних индексов. В этом случае равенство $S = 0$ доказывается аналогично тому, как это делалось в (24)–(29). В любом случае $S = f(1/2, 1/2) = 0$, что окончательно доказывает лемму.

ЛЕММА 2. 1) Функция $f(x, y)$ из конструкции 1 является $(P_d^{1/2})$ -интегрируемой и ряд (1) является ее рядом Фурье–Хаара относительно $(P_d^{1/2})$ -интеграла;

2) если Ψ – $\mathcal{J}$ -функция из конструкции 1, то для любого двоичного интервала Δ имеет место равенство

$$\Psi(\Delta) = (P_d^{1/2}) \int_{\Delta} f(x, y) dx dy. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы сразу вытекает из теоремы A и леммы 1. Для доказательства второго утверждения для любого $\varepsilon > 0$ возьмем одновременно в качестве мажоранты и миноранты функцию $\Psi(\Delta)$. Отметим, что $\Psi([0, 1]^2) - \Psi([0, 1]^2) = 0 < \varepsilon$, т.е. условие 3) из определения $(P_d^{1/2})$ -интеграла выполнено. Из формулы (21) вытекает выполнение любого из условий (8)–(11) в каждой точке $(x, y) \notin [0, 1]^2 \setminus \{\tilde{z}\}$. Для того чтобы проверить выполнение условия (11) в точке $\tilde{z}$, для каждого $i = 1, \dots, 4$ рассмотрим $\tilde{z}$ -последовательность $\{\Delta_{k,l}^i\}$ такую, что $\Delta_{k,l}^i \subset \Omega_i$ для всех k, l . Пользуясь (22), при $k, l \geq 1$ получаем

$$\begin{aligned} \Psi(\Delta_{n,n}^i) - \frac{1}{2} \Psi(\Delta_{n,n-1}^i) - \frac{1}{2} \Psi(\Delta_{n-1,n}^i) + \frac{1}{4} \Psi(\Delta_{n-1,n-1}^i) \\ = (-1)^{i-1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \right) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Из (31) вытекает справедливость условия (11) в точке $\tilde{z}$. Тем самым, все условия из определения $(P_d^{1/2})$ -интеграла выполнены. Тогда формула (30) вытекает из следующей цепочки, использующей (12):

$$\Psi(\Delta) \leq \sup_{F_2} F_2(\Delta) = (P_d^{1/2}) \int_{\Delta} f(x, y) dx dy = \inf_{F_1} F_1(\Delta) \leq \Psi(\Delta).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Функция $f(x, y)$ из конструкции 1 является $(H_{1,d})$ -интегрируемой. При этом для любого двоичного интервала $\Delta \subset [0, 1]^2 \setminus \{\tilde{z}\}$ имеет место равенство

$$(H_{1,d}) \int_{\Delta} f(x, y) dx dy = \Psi(\Delta) = (R) \int_{\Delta} f(x, y) dx dy. \quad (32)$$

Если же $\Delta \ni \tilde{z}$, то $(H_{1,d}) \int_{\Delta} f(x, y) dx dy = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция f непрерывна на $[0, 1]^2 \setminus \{\tilde{z}\}$, в силу утверждения 1 она является $(H_{1,d})$ -интегрируемой на любом двоичном квадрате $\Delta \subset [0, 1]^2 \setminus \{\tilde{z}\}$. Отсюда вытекает, с учетом (18), формула (32). Рассмотрим произвольный двоичный квадрат $\Delta \ni \tilde{z}$, не совпадающий с $[0, 1]^2$. Без ограничения общности считаем, что $\Delta = \Delta_{n,n}^{2^{n-1}, 2^{n-1}}$. Для всех $l = 1, 2, \dots$ и $i, j = 0, 1$ введем обозначения

$$U_l = \Delta_{l,l}^{2^{l-1}-1, 2^{l-1}-1}, \quad V_l^{i,j} = \Delta_{l+1,l+1}^{2^l-2-i, 2^l-j}, \quad W_l^{i,j} = \Delta_{l+1,l+1}^{2^l-i, 2^l-2-j}.$$

При всех $m \geq n$ имеет место равенство

$$\Delta = \Delta_{m,m}^{2^{m-1}, 2^{m-1}} \cup U \cup V \cup W, \quad (33)$$

где

$$U = \bigcup_{l=n+1}^m U_l, \quad V = \bigcup_{l=n+1}^m \bigcup_{i,j=0}^1 V_l^{i,j}, \quad W = \bigcup_{l=n+1}^m \bigcup_{i,j=0}^1 W_l^{i,j} \quad (34)$$

причем двоичные квадраты из правых частей (33) и (34) попарно не перекрываются. При этом любой из квадратов из правых частей (34) не содержит точку $\tilde{z}$. Поэтому функция f является непрерывной на любом таком квадрате и в силу утверждения 1 $(H_{1,d})$ -интегрируемой на нем. Из формул (15)–(18) и (32) при всех $m > n$ вытекает следующее равенство:

$$\sum_{l=n+1}^m \int_{U_l} f + \sum_{l=n+1}^m \sum_{i,j=0}^1 \int_{V_l^{i,j}} f + \sum_{l=n+1}^m \sum_{i,j=0}^1 \int_{W_l^{i,j}} f = 0 \quad (35)$$

(под интегралом в последней формуле понимается $(H_{1,d})$ -интеграл). Пусть при $l = 1, 2, \dots$ K_l означает любой из квадратов U_l , $V_l^{i,j}$ или $W_l^{i,j}$. Тогда квадрат K_l не содержит точку $\tilde{z}$. Пусть выбрано произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем функцию $\delta: K_l \rightarrow (0, +\infty)$ такую, что неравенство

$$\left| \sum_{(\mathbf{z}; I) \in P} f(\mathbf{z}) |I| - \int_{K_l} f \right| < \frac{\varepsilon}{2^l} \quad (36)$$

выполняется для всех $(\delta(\mathbf{z}), 1)$ -разбиений P квадрата K_l . Потребуем также от функции δ , чтобы

$$\delta(\mathbf{z}) < \frac{1}{2} \text{diam } K_l, \quad \delta(\mathbf{z}) < \text{dist}(\tilde{z}, K_l). \quad (37)$$

Выбирая функцию δ для всех множеств K_l и задав произвольным образом значение $\delta(\tilde{z})$, получим функцию $\delta: \Delta \rightarrow (0, +\infty)$. Оговоримся, что если точка $\mathbf{z}$ принадлежит нескольким множествам K_l , то из всех значений $\delta(\mathbf{z})$ выберем минимальное. Рассмотрим произвольное разбиение $Q = \{(\mathbf{z}; I)\}$ квадрата Δ . Из (37) вытекает, что разбиение Q содержит пару $(\tilde{z}, \tilde{I})$, где $\tilde{I} = \Delta_{m_0, m_0}^{2^{m_0-1}, 2^{m_0-1}}$ для некоторого $m_0 > n$.

Из (37) также вытекает, что любая другая пара $(\mathbf{z}; I) \in Q$ обладает тем свойством, что $I \subset K_l$ для некоторого куба K_l . Используя эти факты, получим следующую цепочку:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{(\mathbf{z}; I) \in Q} f(\mathbf{z})|I| \right| &\stackrel{(35)}{\leq} \sum_{l=n+1}^{m_0} \left(\left| \sum_{U_l} f(\mathbf{z})|I| - \int_{U_l} f \right| + \sum_{i,j=0}^1 \left| \sum_{V_l^{i,j}} f(\mathbf{z})|I| - \int_{V_l^{i,j}} f \right| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=0}^1 \left| \sum_{W_l^{i,j}} f(\mathbf{z})|I| - \int_{W_l^{i,j}} f \right| \right) \\ &\stackrel{(36)}{\leq} \sum_{l=n+1}^{m_0} \left(\frac{\varepsilon}{2^l} + \frac{4\varepsilon}{2^l} + \frac{4\varepsilon}{2^l} \right) < 9\varepsilon. \end{aligned}$$

Последняя цепочка доказывает $(H_{1,d})$ -интегрируемость функции f на кубе $\Delta \ni \tilde{z}$ ($\Delta \neq [0, 1]^2$) и равенство нулю интеграла. Если же $\Delta = [0, 1]^2$, то $\Delta = \bigcup_{i=1}^4 \Omega_i$, откуда $(H_{1,d}) \int_{[0,1]^2} f = \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_i} f = 0$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. $(P_d^{1/2})$ -Интеграл и $(H_{1,d})$ -интеграл являются противоречивыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – функция из конструкции 1. Из (14) и (30) вытекает, что $(P_d^{1/2}) \int_{\Omega_1} f = 1$. Из леммы 3 вытекает, что $(H_{1,d}) \int_{\Omega_1} f = 0$. Последние два равенства доказывают теорему.

ТЕОРЕМА 3. Ряд (S^*) всюду на $[0, 1]^2$ $1/2$ -сходится к $(H_{1,d})$ -интегрируемой функции, однако (S^*) не является рядом Фурье–Хаара этой функции относительно $(H_{1,d})$ -интеграла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 ряд (S^*) всюду на $[0, 1]^2$ $1/2$ -сходится к функции f , которая согласно лемме 3 является $(H_{1,d})$ -интегрируемой. Пусть $c_{2,2}$ – коэффициент Фурье–Хаара функции f относительно $(H_{1,d})$ -интеграла. Воспользуемся определением ряда Фурье–Хаара, устройством двумерных функций Хаара и обозначениями из конструкции 1. Тогда

$$c_{2,2} = (H_{1,d}) \int_{[0,1]^2} f \chi_{2,2} = \sum_{i=1}^4 (-1)^{i-1} (H_{1,d}) \int_{\Omega_i} f \stackrel{\text{лемма 3}}{=} 0 - 0 + 0 - 0 = 0.$$

Таким образом, $c_{2,2} = 0$. Сравним $c_{2,2}$ с $a_{2,2}$ – коэффициентом ряда (S^*) . Воспользуемся тем, что (S^*) является рядом Фурье–Хаара функции f относительно $(P_d^{1/2})$ -интеграла. Выберем произвольную точку $\mathbf{z} \in \Omega_1$. Тогда

$$\begin{aligned} a_{2,2} &= a_{2,2} \chi_{2,2}(\mathbf{z}) = \sum_{i,j=0}^1 (-1)^{i+j} S_{2-i,2-j}(\mathbf{z}) \\ &\stackrel{(3) \text{ и } (30)}{=} \frac{1}{|\Omega_1|} \left(\Psi(\Omega_1) - \frac{1}{2} \Psi(\Omega_1 \cup \Omega_2) - \frac{1}{2} \Psi(\Omega_1 \cup \Omega_4) + \frac{1}{4} \Psi(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4) \right) \\ &\stackrel{(14)}{=} \frac{1}{|\Omega_1|} (1 - 0 - 0 + 0) = 4. \end{aligned}$$

Таким образом, $a_{2,2} = 4 \neq c_{2,2}$, что доказывает теорему.

В заключение заметим, что доказательство теоремы 3 и предшествующих ей лемм существенно используют то, что функции Хаара определены на отрезке $[0, 1]$. Часто функции Хаара рассматривают не на отрезке $[0, 1]$, а на двоичной группе G (см. [12; гл. 1]). При таком подходе, как несложно показать, теорема типа Дю Буа-Реймона для рядов (1) будет выполняться и для $(H_{1,d})$ -интеграла, т.е. вторая часть теоремы 3 в этом случае перестает быть верной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, ГИФМЛ, М., 1961.
- [2] М. Г. Плотников, “Некоторые свойства многомерных обобщенных интегралов и теоремы типа Дю Буа-Реймона для двойных рядов Хаара”, *Матем. сб.*, **198**:7 (2007), 63–90.
- [3] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.
- [4] П. Л. Ульянов, “О рядах по системе Хаара”, *Матем. сб.*, **63**:3 (1964), 356–391.
- [5] W. R. Wade, K. Yoneda, “Uniqueness and quasimeasures on the group of integers of a p -series field”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **84**:2 (1982), 202–206.
- [6] В. А. Скворцов, А. А. Талалян, “Некоторые вопросы единственности кратных рядов по системе Хаара и тригонометрической системе”, *Матем. заметки*, **46**:2 (1989), 104–113.
- [7] М. Г. Плотников, “О единственности всюду сходящихся кратных рядов Хаара”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2001, № 1, 23–28.
- [8] K. M. Ostaszewski, *Henstock Integration in the Plane*, Mem. Amer. Math. Soc., **63**, 353, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [9] В. А. Скворцов, “О множествах единственности для многомерных рядов Хаара”, *Матем. заметки*, **14**:6 (1973), 789–798.
- [10] М. Г. Плотников, “О нарушении единственности для двумерных рядов Хаара”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2003, № 4, 20–24.
- [11] А. Н. Колмогоров, А. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Классический университетский учебник, Физматлит, М., 2004.
- [12] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применение*, Наука, М., 1987.

М. Г. Плотников

Вологодская государственная молочнохозяйственная академия

им. Н. В. Верещагина

E-mail: mgplotnikov@mail.ru

Поступило

21.01.2008

Исправленный вариант

26.09.2008