Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Курбатова, Банахова алгебра, связанная с линейным операторным пучком, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 3, 394–401

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4436>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:01:04

Банахова алгебра, связанная с линейным операторным пучком

И. В. Курбатова

Установлена прямая связь между теорией псевдорезольвент и спектральной теорией линейных операторных пучков.

Библиография: 18 названий.

Дифференциальные уравнения $F\dot{x} = Gx + f(t)$, не разрешенные относительно производной, возникают во многих приложениях, см., например, [1]–[5]. Здесь X и Y – банаховы пространства, а $F, G: X \rightarrow Y$ – линейные операторы, возможно, неограниченные.

Для дифференциального уравнения $\dot{x} = Gx + f(t)$, разрешенного относительно производной, нахождение общего решения сводится к построению операторной экспоненты e^{Gt} . В свою очередь, естественный способ построения и исследования операторной экспоненты основан на изучении спектральных свойств оператора G .

Перенесением этого подхода на уравнения, не разрешенные относительно производной, занимались многие математики [5]–[15]. Первым шагом в его реализации является рассмотрение вместо резольвенты $(\lambda I - G)^{-1}$ оператора G – резольвенты $(\lambda F - G)^{-1}$ пучка $\lambda \mapsto \lambda F - G$. К сожалению, резольвента пучка $(\lambda F - G)^{-1}$, как правило, имеет не совпадающие область определения Y и область значений X . Поэтому изучение спектральных свойств пучков обычно (см., например, [5], [6], [11]) проводят путем предварительного перехода в пространство X или Y .

Целью настоящей статьи является описание (теорема 8) коммутативной банаховой алгебры, порожденной пучком $\lambda \mapsto \lambda F - G$, что позволяет сводить изучение свойств резольвенты $(\lambda F - G)^{-1}$ к непосредственным ссылкам на классические факты спектральной теории [16]–[18].

В п. 1 уточняется терминология, связанная с банаховыми алгебрами [16]–[18], а также напоминаются основные свойства псевдорезольвенты [18]. В п. 2 определяется банахова алгебра $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X_*)$ с операцией F -умножения (теорема 8). Резольвента пучка $(\lambda F - G)^{-1}$ оказывается (предложение 9) максимальной псевдорезольвентой со значениями в этой алгебре. В качестве приложений приводятся теорема 11, в которой описывается функциональное исчисление, и теорема 12 о спектральном разложении. Из них, например, вытекает следствие 14 – наиболее известный [3], [5], [6], [8], [9], [11], [14], [15] спектральный факт теории пучков – разложения X и Y

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00131).

в прямые суммы, порожденные разбиением расширенного сингулярного множества резольвенты пучка на две части.

1. Предварительные сведения. Все рассматриваемые ниже алгебры [16]–[18] предполагаются комплексными. Если в алгебре $\mathbf{B}$ существует такой элемент $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{\mathbf{B}} \in \mathbf{B}$, что $A\mathbf{1} = \mathbf{1}A = A$ для $A \in \mathbf{B}$, то элемент $\mathbf{1}$ называют *единицей*, а саму алгебру – *алгеброй с единицей*. Единица в алгебре единственна (при условии, что она имеется). Алгебру называют *коммутативной*, если $AB = BA$ для любых A и B .

Если алгебра $\mathbf{B}$ является банаховым пространством и при этом выполнено свойство $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, то говорят, что $\mathbf{B}$ – *банахова алгебра*. Если дополнительно алгебра $\mathbf{B}$ имеет единицу и $\|\mathbf{1}\| = 1$, то говорят, что $\mathbf{B}$ – *банахова алгебра с единицей*. Простейший пример банаховой алгебры – алгебра $\mathbf{B}(X)$ линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X .

Пусть $\mathbf{B}$ – алгебра с единицей. *Обратным* к $A \in \mathbf{B}$ называют элемент $A^{-1} \in \mathbf{B}$ такой, что $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}$.

Пусть $\mathbf{B}$ – алгебра с единицей и $A \in \mathbf{B}$. Множество $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что элемент $\lambda\mathbf{1} - A$ не имеет обратного, называют *спектром* A и обозначают символом $\sigma(A)$ или $\sigma_{\mathbf{B}}(A)$. Дополнение $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ называют *резольвентным множеством* A . Функцию (семейство)

$$R_{\lambda} = (\lambda\mathbf{1} - A)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A),$$

называют *резольвентой* A . Спектр элемента ненулевой банаховой алгебры с единицей есть непустое компактное подмножество $\mathbb{C}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [18; теорема 4.1.8]. Пусть $\mathbf{B}$ – алгебра с единицей. Резольвента R_{λ} любого элемента $A \in \mathbf{B}$ удовлетворяет тождеству Гильберта

$$R_{\lambda} - R_{\mu} = -(\lambda - \mu)R_{\lambda}R_{\mu}, \quad \lambda, \mu \in \rho(A). \quad (1)$$

Пусть $\mathbf{B}$ – алгебра без единицы. Множество $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbb{C} \oplus \mathbf{B}$ с покомпонентными линейными операциями и умножением $(\alpha, A)(\beta, B) = (\alpha\beta, \alpha B + \beta A + AB)$, очевидно, является алгеброй с единицей $\mathbf{1} = (1, 0)$. Элемент (α, A) обозначают символом $\alpha\mathbf{1} + A$. Алгебру $\tilde{\mathbf{B}}$ называют алгеброй $\mathbf{B}$ с *присоединенной единицей*. Если алгебра $\mathbf{B}$ банахова, то положим $\|\alpha\mathbf{1} + A\| = |\alpha| + \|A\|$; очевидно, в этом случае алгебра $\tilde{\mathbf{B}}$ также банахова. *Спектром* (резольвентой) элемента алгебры без единицы называют спектр (резольвенту) этого элемента в алгебре с присоединенной единицей. Если $\mathbf{B}$ содержит единицу, то под алгеброй $\tilde{\mathbf{B}}$ с присоединенной единицей будем понимать саму алгебру $\mathbf{B}$.

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – алгебры. Отображение $\varphi: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ называют [16] *морфизмом алгебр*, если

$$\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B), \quad \varphi(\alpha A) = \alpha\varphi(A), \quad \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B).$$

Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ содержат единицы и $\varphi(\mathbf{1}_{\mathbf{A}}) = \mathbf{1}_{\mathbf{B}}$, то говорят, что φ – *морфизм алгебр с единицей*.

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – алгебры, причем $\mathbf{A}$ не имеет единицы. Если $\varphi: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ – морфизм алгебр, то, очевидно, единственным расширением φ до морфизма алгебр с единицей $\tilde{\varphi}: \tilde{\mathbf{A}} \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}$ является отображение $\tilde{\varphi}(\alpha\mathbf{1} + A) = \alpha\mathbf{1} + \varphi(A)$.

Пусть $\mathbf{B}$ – банахова алгебра и $G \subseteq \mathbb{C}$ – непустое подмножество. Псевдорезольвентой (на G со значениями в $\mathbf{B}$) называют [18; глава 5, § 2, с. 201] функцию (семейство) $\lambda \mapsto R_\lambda$, определенную на G , принимающую значения в $\mathbf{B}$ и удовлетворяющую тождеству Гильберта (1). Псевдорезольвенту называют [6] *максимальной*, если она не может быть расширена на более широкое множество с сохранением тождества (1). Всякая псевдорезольвента единственным образом продолжается до максимальной (теорема 3). Область определения $\rho(R_{(\cdot)})$ максимальной псевдорезольвенты назовем *регулярным множеством* исходной псевдорезольвенты, а дополнение $\sigma(R_{(\cdot)})$ к $\rho(R_{(\cdot)})$ – *сингулярным множеством*.

Тождество Гильберта (1) можно эквивалентным образом записать в виде

$$R_\lambda + (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu = R_\mu$$

или (с выходом в алгебру с присоединенной единицей в случае, когда исходная алгебра не содержит единицу) в виде

$$R_\lambda(1 + (\lambda - \mu)R_\mu) = R_\mu.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [18; следствие 1 теоремы 5.8.4]. Пусть два коммутирующих элемента $R_\lambda, R_\mu \in \mathbf{B}$ удовлетворяют равенству (1). Тогда элемент

$$1 + (\lambda - \mu)R_\mu \in \tilde{\mathbf{B}}$$

обязательно обратим.

ТЕОРЕМА 3 [18; теорема 5.8.6]. Всякая псевдорезольвента единственным образом продолжается до максимальной. Областью определения максимальной псевдорезольвенты является множество всех $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых элемент $1 + (\lambda - \mu)R_\mu$ обратим в $\tilde{\mathbf{B}}$. Это продолжение имеет вид

$$R_\lambda = R_\mu(1 + (\lambda - \mu)R_\mu)^{-1}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4 [18; теорема 5.8.2], [13; гл. 6, § 1]. Область определения максимальной псевдорезольвенты является открытым множеством, а сама она – аналитической функцией как функция со значениями в $\mathbf{B}$.

2. F -алгебра. Пусть X и Y – комплексные линейные пространства, $X_F, X_G \subseteq X$ – линейные подпространства, а $F: X_F \rightarrow Y$ и $G: X_G \rightarrow Y$ – линейные операторы. (Операторным) пучком называют [5], [6], [10] функцию

$$\lambda \mapsto \lambda F - G: X_* \rightarrow Y, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где $X_* = X_F \cap X_G$. В частности, под $0F - G$ понимается оператор $-G: X_* \rightarrow Y$. Из предложения 7, приводимого ниже, видно, что случай ограниченных операторов $F, G: X_* \rightarrow Y$ можно считать общим.

Резольвентным множеством пучка называют множество $\rho(F, G)$, состоящее из тех $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых оператор $\lambda F - G: X_* \rightarrow Y$ обратим, а *резольвентой* – функцию (семейство)

$$R_\lambda = (\lambda F - G)^{-1}: Y \rightarrow X_*, \quad \lambda \in \rho(F, G).$$

Дополнение $\sigma(F, G)$ к $\rho(F, G)$ называют *спектром* пучка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Резольвента пучка удовлетворяет F -тождеству Гильберта

$$R_\lambda - R_\mu = -(\lambda - \mu)R_\lambda F R_\mu, \quad \lambda, \mu \in \rho(F, G). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для $\lambda, \mu \in \rho(F, G)$ имеем

$$\begin{aligned} R_\lambda &= (\lambda F - G)^{-1} = (\lambda F - G)^{-1}(\mu F - G)(\mu F - G)^{-1} \\ &= (\lambda F - G)^{-1}(\lambda F - G + (\mu - \lambda)F)(\mu F - G)^{-1} \\ &= (\lambda F - G)^{-1}(\lambda F - G)(\mu F - G)^{-1} + (\lambda F - G)^{-1}(\mu - \lambda)F(\mu F - G)^{-1} \\ &= (\mu F - G)^{-1} + (\mu - \lambda)(\lambda F - G)^{-1}F(\mu F - G)^{-1} = R_\mu - (\lambda - \mu)R_\lambda F R_\mu. \end{aligned}$$

Будем считать выполненным следующее предположение.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. Пространство Y является банаховым (на X изначально норма не задана), а $\rho(F, G)$ содержит, по крайней мере, две точки $\lambda \neq \mu$, для которых операторы

$$(\lambda F - G)(\mu F - G)^{-1}: Y \rightarrow Y, \quad (\mu F - G)(\lambda F - G)^{-1}: Y \rightarrow Y$$

ограничены.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. При выполнении предположения изоморфизмы

$$\lambda F - G, \mu F - G: X_* \rightarrow Y$$

порождают эквивалентные нормы на X_* .

В дальнейшем будем считать X_* наделенным одной из эквивалентных норм, порожденных изоморфизмами $\lambda F - G, \mu F - G: X_* \rightarrow Y$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если для двух точек $\lambda, \mu \in \rho(F, G)$, $\lambda \neq \mu$, операторы

$$(\lambda F - G)(\mu F - G)^{-1} \quad \text{и} \quad (\mu F - G)(\lambda F - G)^{-1}$$

ограничены, то и операторы $F, G: X_* \rightarrow Y$ ограничены. Поэтому при любом $\nu \in \rho(F, G)$ оператор $\nu F - G: X_* \rightarrow Y$ порождает на X_* норму, эквивалентную нормам, порожденным $\lambda F - G$ и $\mu F - G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию операторы $(\lambda F - G): X_* \rightarrow Y$ и $(\mu F - G): X_* \rightarrow Y$ ограничены. Следовательно, ограничен и оператор

$$(\lambda F - G) - (\mu F - G) = \lambda F - \mu F.$$

Таким образом, оператор $F: X_* \rightarrow Y$ ограничен. Но тогда ограничен и оператор

$$G = \lambda F - (\lambda F - G): X_* \rightarrow Y,$$

а вместе с ним и оператор $\nu F - G: X_* \rightarrow Y$. Второе утверждение вытекает из теоремы Банаха об обратном операторе.

Подчеркнем, что изначально пространство X также может быть банаховым, а операторы $F: X_F \rightarrow Y$ и $G: X_G \rightarrow Y$ неограниченными. Но в условиях предположения даже неограниченные операторы $F: X_F \rightarrow Y$ и $G: X_G \rightarrow Y$ в силу предложения 7 порождают ограниченные операторы $F, G: X_* \rightarrow Y$. Таким образом, случай неограниченных операторов сводится к случаю ограниченных.

Обозначим через $\mathbf{B}(Y, X_*)$ банахово пространство всех линейных ограниченных операторов $A: Y \rightarrow X_*$, а через $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X_*)$ – замыкание в пространстве $\mathbf{B}(Y, X_*)$ линейной оболочки операторов R_λ , $\lambda \in \rho(F, G)$. Введем на $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X_*)$ операцию F -умножения по формуле

$$A \odot B = AFB.$$

ТЕОРЕМА 8. *Относительно F -умножения пространство $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X_*)$ является коммутативной банаховой алгеброй. Эта алгебра содержит единицу тогда и только тогда, когда оператор $F: X_* \rightarrow Y$ обратим; при этом единицей является F^{-1} .*

Если алгебра $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X_)$ содержит единицу, то в качестве алгебраической (т.е. обладающей свойством $\|A \odot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$) нормы можно взять функцию*

$$\|A\|_F = \sup\{\|A \odot B\| : \|B\| \leq 1, B \in \mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X_*)\}.$$

Если алгебра $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X_)$ не содержит единицы, то в качестве алгебраической нормы можно взять функцию*

$$\|A\|_{\tilde{F}} = \sup\{\|\beta A + A \odot B\| : |\beta| + \|B\| \leq 1, \beta \in \mathbb{C}, B \in \mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X_*)\}.$$

Обе эти нормы эквивалентны исходной норме пространства $\mathbf{B}(Y, X_)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим замкнутость $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X_*)$ относительно F -умножения. Из тождества Гильберта (2) следует, что произведение $R_\lambda R_\mu$ при $\lambda \neq \mu$ принадлежит линейной оболочке семейства R_λ , $\lambda \in \rho(F, G)$. Но тогда по непрерывности элемент $R_\lambda R_\mu$ при $\lambda = \mu$ принадлежит замыканию линейной оболочки семейства элементов R_λ , $\lambda \in \rho(F, G)$. Очевидно, F -умножение непрерывно относительно исходной нормы пространства $\mathbf{B}(Y, X_*)$. Отсюда видно, что замыкание линейной оболочки семейства R_λ , $\lambda \in \rho(F, G)$, образует алгебру.

Из тождества Гильберта (2) также следует перестановочность R_λ и R_μ при $\lambda, \mu \in \rho(F, G)$. Отсюда по непрерывности следует коммутативность алгебры $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X_*)$.

Проверим существование единицы. Если F обратим, то, очевидно, в качестве $\mathbf{1}_F$ можно взять F^{-1} . Обратно, пусть алгебра имеет единицу $\mathbf{1}_F$. В равенстве

$$A \odot \mathbf{1}_F = \mathbf{1}_F \odot A = A \quad \text{или} \quad AF\mathbf{1}_F = A \quad \text{и} \quad \mathbf{1}_F FA = A$$

в качестве A возьмем заведомо обратимый оператор (например, одно из значений резольвенты). Умножая на A^{-1} с нужных сторон, приходим к равенствам $F\mathbf{1}_F = \mathbf{1}$ и $\mathbf{1}_F F = \mathbf{1}$, означаящим, что $\mathbf{1}_F = F^{-1}$.

Непосредственно проверяется, что функции $\|\cdot\|_F$ и $\|\cdot\|_{\tilde{F}}$ являются полунормами на $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X_*)$, эквивалентными исходной норме пространства $\mathbf{B}(Y, X_*)$. Равенство $\|\mathbf{1}_F\|_F = \|F^{-1}\|_F = 1$ очевидно.

Проверим свойство алгебраичности этих полунорм. Для полунормы $\|\cdot\|_F$ это свойство является частным случаем [17; теорема 10.2]. Для полунормы $\|\cdot\|_{\tilde{F}}$, очевидно, имеем $\|A\|_F \leq \|A\|_{\tilde{F}}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|A \odot B\|_{\tilde{F}} &= \sup\{\|\gamma(A \odot B) + (A \odot B) \odot C\| : |\gamma| + \|C\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|A \odot (\gamma B + B \odot C)\| : |\gamma| + \|C\| \leq 1\} \\ &\leq \|A\|_F \cdot \sup\{\|\gamma B + B \odot C\| : |\gamma| + \|C\| \leq 1\} \\ &\leq \|A\|_F \cdot \|B\|_{\tilde{F}} \leq \|A\|_{\tilde{F}} \cdot \|B\|_{\tilde{F}}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Резольвента пучка является максимальной F -псевдорезольвентой, т.е. не может быть продолжена на более широкое, чем $\rho(F, G)$, множество с сохранением F -тождества Гильберта (2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: пусть резольвенту пучка можно продолжить в точку $\lambda \notin \rho(F, G)$ с сохранением F -тождества Гильберта. Возьмем произвольную вспомогательную точку $\mu \in \rho(F, G)$. Для точек λ и μ справедливо F -тождество Гильберта.

Преобразуем его:

$$\begin{aligned} R_\lambda - R_\mu &= -(\lambda - \mu)R_\lambda F R_\mu, & R_\lambda + (\lambda - \mu)R_\lambda F R_\mu &= R_\mu, \\ R_\lambda(\mathbf{1}_{X_*} + (\lambda - \mu)F R_\mu) &= R_\mu, & R_\lambda((\mu F - G)R_\mu + (\lambda - \mu)F R_\mu) &= R_\mu, \\ R_\lambda((\mu F - G) + (\lambda - \mu)F)R_\mu &= R_\mu, & R_\lambda((\mu F - G) + (\lambda - \mu)F) &= \mathbf{1}_{X_*}, \\ R_\lambda(\lambda F - G) &= \mathbf{1}_{X_*}, \end{aligned}$$

откуда видно, что R_λ является обратным к $(\lambda F - G)$ слева. Аналогично имеем $(\lambda F - G)R_\lambda = \mathbf{1}_Y$, т.е. R_λ является обратным к $(\lambda F - G)$ справа. Таким образом, точка λ принадлежит резольвентному множеству.

Расширенным резольвентным множеством пучка $\lambda \mapsto \lambda F - G$ назовем [6; с. 31] подмножество $\bar{\rho}(F, G)$ расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$, состоящее из $\rho(F, G)$ и, возможно, точки ∞ . Точку $\lambda = \infty$ отнесем к $\bar{\rho}(F, G)$, если резольвента $\lambda \mapsto (\lambda F - G)^{-1}$ определена в проколоте окрестности точки $\lambda = \infty$, оператор F обратим и $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R_\lambda = F^{-1}$ по норме $\mathbf{B}(Y, X_*)$. В противном случае точку $\lambda = \infty$ отнесем к *расширенному спектру* $\bar{\sigma}(F, G)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Точка ∞ принадлежит $\bar{\rho}(F, G)$ тогда и только тогда, когда оператор F обратим.*

В силу теоремы 8 в наиболее интересном случае, когда F не имеет обратного, алгебра $\mathbf{B}_{(F, G)}(Y, X_*)$ не имеет единицы. В этом случае обозначим через $\tilde{\mathbf{B}}_{(F, G)}(Y, X_*)$ алгебру $\mathbf{B}_{(F, G)}(Y, X_*)$ с присоединенной единицей $\mathbf{I}$. В случае, когда F обратим, под $\tilde{\mathbf{B}}_{(F, G)}(Y, X_*)$ будем понимать саму алгебру $\mathbf{B}_{(F, G)}(Y, X_*)$, а под $\mathbf{I}$ – оператор F^{-1} .

Пусть $K \subseteq \bar{\mathbb{C}}$ – замкнутое подмножество расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$. Обозначим символом $\mathbf{O}(K)$ множество всех аналитических функций $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, каждая из которых определена в некоторой открытой окрестности U множества K (предполагается, что для каждой f окрестность U своя). Будем говорить, что две функции $f_1: U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ и $f_2: U_2 \rightarrow \mathbb{C}$ *эквивалентны*, если существует такая открытая окрестность $U \subseteq U_1 \cap U_2$ множества K , что f_1 и f_2 совпадают на U , т.е. $f_1(\lambda) = f_2(\lambda)$ для всех $\lambda \in U$. Нетрудно показать, что это действительно отношение эквивалентности. Таким образом, элементами $\mathbf{O}(K)$, строго говоря, являются классы эквивалентных функций. Очевидно, $\mathbf{O}(K)$ является алгеброй (без нормы) с единицей $u(\lambda) = 1$.

ТЕОРЕМА 11. *Отображение $\varphi: \mathbf{O}(\bar{\sigma}(F, G)) \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_{(F, G)}(Y, X_*)$, определенное по формуле*

$$\varphi(f) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda F - G)^{-1} d\lambda, & \text{если } \Gamma \text{ не окружает } \infty, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda F - G)^{-1} d\lambda + f(\infty)\mathbf{I}, & \text{если } \Gamma \text{ окружает } \infty, \end{cases}$$

где Γ – контур, являющийся ориентированной огибающей [18; с. 183] расширенного спектра $\bar{\sigma}(F, G)$ относительно дополнения к области определения функции f , является морфизмом алгебр с единицей; в частности, $\varphi(fg) = \varphi(f) \odot \varphi(g)$, а функция $u(\lambda) = 1$ переводится морфизмом φ в единицу $\mathbf{I}$ алгебры $\tilde{\mathbf{B}}_{(F,G)}(Y, X_*)$. Функция $r_{\lambda_0}(\lambda) = 1/(\lambda_0 - \lambda)$, $\lambda_0 \in \rho(F, G)$, переводится морфизмом φ в $R_{\lambda_0} = (\lambda_0 F - G)^{-1}$. Если F обратим, то $v(\lambda) = \lambda$ переводится морфизмом φ в оператор $F^{-1}GF^{-1}$.

Для любой функции $f \in \mathbf{O}(\bar{\sigma}(F, G))$

$$\sigma_{\tilde{\mathbf{B}}_{(F,G)}(Y, X_*)}(\varphi(f)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \bar{\sigma}(F, G)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяет обычные рассуждения при доказательстве теорем о функциональном исчислении [16; гл. 1, § 4, теорема 3], [17; теорема 10.27], [18; теоремы 5.2.5 и 5.11.2] и об отображении спектра [18; теорема 5.12.1].

ТЕОРЕМА 12. Пусть $\bar{\sigma}(F, G)$ представимо в виде объединения двух непересекающихся замкнутых подмножеств $\sigma_0, \bar{\sigma}_1 \subseteq \mathbb{C}$, причем σ_0 ограничено. Тогда существует идемпотент $\Pi_0 \in \mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X_*)$, для которого

$$A = \Pi_0 \odot A \odot \Pi_0 + \Pi_1 \odot A \odot \Pi_1, \quad A \in \tilde{\mathbf{B}}_{(F,G)}(Y, X_*), \quad \text{где } \Pi_1 = \mathbf{I} - \Pi_0,$$

и расширенное сингулярное множество псевдорезольвенты $\Pi_0 \odot R_{(\cdot)} \odot \Pi_0$ в алгебре $\Pi_0 \odot \mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X_*) \odot \Pi_0$ совпадает с σ_0 , а (расширенное) сингулярное множество псевдорезольвенты $\Pi_1 \odot R_{(\cdot)} \odot \Pi_1$ в алгебре $\Pi_1 \odot \mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X_*) \odot \Pi_1$ совпадает с $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_1 \setminus \{\infty\}$ (с $\bar{\sigma}_1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяет доказательство теорем о спектральном разложении, см., например, [16; гл. 1, § 4, п. 4], [18; теорема 5.13.1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Отображение $A \mapsto AF$ есть морфизм алгебры $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X_*)$ в алгебру $\mathbf{B}(X_*)$, а отображение $A \mapsto FA$ – морфизм алгебры $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X_*)$ в алгебру $\mathbf{B}(Y)$.

Приводимое ниже следствие 14 является наиболее известным спектральным фактом теории пучков, см., например, [3], [5], [6; теорема 6.3], [8], [9], [11; теорема 1.1.1], [14; § 4.1], [15]. Его доказательство легко выводится из описанных свойств алгебры $\tilde{\mathbf{B}}_{(F,G)}(Y, X_*)$ и предложения 13.

СЛЕДСТВИЕ 14. В условиях теоремы 12 пары операторов $P_0 = \Pi_0 F$ и $P_1 = \mathbf{I} - P_0$, а также $Q_0 = F\Pi_0$ и $Q_1 = \mathbf{I} - Q_0$ являются взаимно дополнительными проекторами и, следовательно, порождают разложения в прямые суммы

$$X_* = \text{Im } P_0 \oplus \text{Im } P_1, \quad Y = \text{Im } Q_0 \oplus \text{Im } Q_1.$$

Для любого $A \in \tilde{\mathbf{B}}_{(F,G)}(Y, X_*)$ имеем $P_0 A = A Q_0$ и $P_1 A = A Q_1$, откуда

$$\begin{aligned} FP_0 &= Q_0 F, & FP_1 &= P_1 F, \\ GP_0 &= Q_0 G, & GP_1 &= P_1 G, \end{aligned}$$

что означает диагональность матриц операторов F и G относительно описанных разложений в прямые суммы. Расширенный спектр пучка $\lambda \mapsto \lambda F - G: \text{Im } P_0 \rightarrow \text{Im } Q_0$ равен σ_0 , а расширенный спектр пучка $\lambda \mapsto \lambda F - G: \text{Im } P_1 \rightarrow \text{Im } Q_1$ равен $\bar{\sigma}_1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Г. Крейн, Г. К. Лангер, “О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов”, *Приложение теории функций в механике сплошной среды*, Наука, М., 1965, 283–322.
- [2] Н. И. Радбель, А. Г. Руткас, “О линейных операторных пучках в неканонических системах”, *Теория функций, функционал. анализ и их прилож.*, **17** (1973), 3–14.
- [3] А. Г. Руткас, “Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ ”, *Дифференц. уравнения*, **11:11** (1975), 1996–2010.
- [4] М. Povoas, “On some singular hyperbolic evolution equations”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **60:2** (1981), 133–192.
- [5] A. Favini, A. Yagi, *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **215**, Marcel Dekker, New York, 1999.
- [6] А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, “Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов”, *Матем. сб.*, **193:11** (2002), 3–42.
- [7] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.
- [8] В. В. Диткин, “Некоторые спектральные свойства пучка линейных операторов в банаховом пространстве”, *Матем. заметки*, **22:6** (1977), 847–857.
- [9] В. В. Диткин, “О некоторых спектральных свойствах пучка линейных ограниченных операторов”, *Матем. заметки*, **31:1** (1982), 75–79.
- [10] А. С. Маркус, *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков*, Штинца, Кишинев, 1986.
- [11] Г. А. Свиридюк, “К общей теории полугрупп операторов”, *УМН*, **49:4** (1994), 47–74.
- [12] В. Е. Федоров, “Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов”, *Алгебра и анализ*, **12:3** (2000), 173–200.
- [13] R. Cross, *Multivalued Linear Operators*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **213**, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [14] I. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators*, Vol. 1, Oper. Theory Adv. Appl., **49**, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1990.
- [15] F. Stummel, “Diskrete Konvergenz linearer Operatoren. II”, *Math. Z.*, **120** (1971), 231–264.
- [16] Н. Бурбаки, *Спектральная теория*, Элементы математики, Мир, М., 1972.
- [17] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975.
- [18] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.

И. В. Курбатова

Воронежский государственный университет

E-mail: la_soleil@bk.ru

Поступило

15.01.2008

Исправленный вариант

04.10.2008