Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Глушак, Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 5, 684–693

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4437>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 12:12:24

Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка

А. В. Глушак

В банаховом пространстве рассматривается задача определения решения и входящего в дифференциальное уравнение дробного порядка слагаемого по начальному и избыточному условиям, содержащим дробные интегралы Римана–Лиувилля. Показано, что разрешимость рассматриваемой задачи зависит от распределения нулей функции Миттаг–Леффлера.

Библиография: 12 названий.

Пусть E – банахово пространство, A – линейный, замкнутый, плотно определенный оператор в E с областью определения $D(A)$ и непустым резольвентным множеством. Рассмотрим задачу определения функции $u(t) \in C^1((0, 1], E)$, принадлежащей $D(A)$ при $t \in (0, 1]$ и элемента $p \in E$ из условий

$$D^\alpha u(t) = Au(t) + t^{k-1}p, \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} I^{1-\alpha} u(t) = u_0, \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} I^\beta u(t) = u_1, \quad (3)$$

где $k > 0$,

$$I^\beta u(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} u(s) ds$$

– левосторонний дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка $\beta \geq 0$ (I^β – единичный оператор при $\beta = 0$), $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция,

$$D^\alpha u(t) = \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} u(t)$$

– левосторонняя дробная производная Римана–Лиувилля порядка $\alpha \in (0, 1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решением задачи (1)–(3) называется пара $(u(t), p)$, где $u(t) \in D(A)$ – непрерывная при $t > 0$ функция такая, что $I^{1-\alpha} u(t)$ представляет собой непрерывно дифференцируемую при $t > 0$ функцию, $p \in E$, наконец, $u(t)$ и p удовлетворяют (1)–(3).

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (грант № 02.740.11.0613).

Следуя сложившейся терминологии, назовем задачу (1)–(3) *обратной задачей* в противоположность прямой задаче типа Коши (1), (2) с известным элементом $p \in E$. Рассматриваемую задачу можно интерпретировать как восстановление в уравнении (1) нестационарного слагаемого $t^{k-1}p$ с помощью дополнительного граничного условия (3).

Обзор публикаций по обратным задачам вида (1)–(3) при $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и различных ограничениях на оператор A можно найти в монографии [1], а также в работах [2]–[5]. Что касается обратной задачи (1)–(3), то она рассматривается впервые. В отличие от уже рассмотренных обратных задач, дополнительное условие (3) задается с помощью интеграла дробного порядка, который можно интерпретировать как среднее Чезаро по промежутку $[0, 1]$. В дальнейшем будет показано, что с точки зрения разрешимости обратной задачи, задание среднего Чезаро по промежутку $[0, 1]$ лучше, чем задание финального значения $u(1)$.

Как следует из результатов работ [6], [7], корректная постановка начальной задачи для уравнения

$$D^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), \quad t > 0 \quad (4)$$

при $\alpha \in (0, 1)$ и достаточно гладкой функции $f(t)$ состоит в задании условия (2). В работе [6] приводятся условия на оператор A и функцию $f(t)$, обеспечивающие корректную разрешимость задачи (4), (2). Эти условия в банаховом пространстве E , обладающем свойством Радона-Никодима (см. [8; с. 15]), формулируются в терминах оценки нормы производных резольвенты $R(\lambda^\alpha) = (\lambda^\alpha I - A)^{-1}$ (λ^α – главная ветвь степенной функции), которая существует в точке λ^α при $\operatorname{Re} \lambda > \omega$. Упомянутые оценки имеют вид

$$\left\| \frac{d^n R(\lambda^\alpha)}{d\lambda^n} \right\| \leq \frac{M\Gamma(n + \alpha)}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{n+\alpha}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

и являются необходимым и достаточным условием равномерной корректности задачи (4), (2). Отметим, что другой подход к получению условий равномерной корректности, использующий метод регуляризации контурного интеграла, приводится в [9].

В дальнейшем нам понадобятся следующие условия.

УСЛОВИЕ 1. Оператор A таков, что задача (4), (2) равномерно корректна.

УСЛОВИЕ 2. Выполнено одно из следующих требований:

- (i) $f(t) \in C((0, \infty), E)$ абсолютно интегрируема в нуле и принимает значения в $D(A)$, $Af(t) \in C((0, \infty), E)$ и также абсолютно интегрируема в нуле;
- (ii) $D^\alpha f(t) \in C((0, \infty), E)$ и абсолютно интегрируема в нуле.

В частности, если выполнено условие 2 и оператор A ограничен, то условие 1 также выполнено и решение задачи (4), (2) имеет вид (см. [7])

$$u(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(t^\alpha A) u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha A) f(s) ds, \quad u_0 \in E, \quad (6)$$

где

$$E_{\alpha, \mu}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \mu)}$$

– функция Миттаг-Леффлера.

В случае неограниченного оператора A , удовлетворяющего условию 1, решение задачи (4), (2) при $f(t) \equiv 0$ имеет вид (см. [6])

$$u(t) \equiv T_\alpha(t)u_0 = \frac{1}{2\pi i} D^{1-\alpha} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{\alpha-1} e^{\lambda t} R(\lambda^\alpha) u_0 d\lambda, \quad (7)$$

где $u_0 \in D(A)$, $\sigma > \max(0, \omega)$, а в общем случае (см. [7])

$$u(t) = T_\alpha(t)u_0 + \int_0^t T_\alpha(t-s)f(s) ds,$$

при этом функция $f(t)$ должна удовлетворять условию 2.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – линейный ограниченный оператор в E , $u_0, u_1 \in E$. Для того чтобы задача (1)–(3) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы на спектре $\sigma(A)$ оператора A выполнялось условие

$$E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z) \neq 0, \quad z \in \sigma(A). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задача (1), (2) в силу (6) сводится к задаче нахождения функции $u(t)$ и элемента $p \in E$ таких, что справедливо соотношение

$$u(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(t^\alpha A) u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha A) s^{k-1} p ds. \quad (9)$$

Из равенства (9) и граничного условия (3) для нахождения неизвестного элемента p получаем уравнение

$$\lim_{t \rightarrow 1} I^\beta \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha A) s^{k-1} p ds = u_1 - \lim_{t \rightarrow 1} I^\beta (t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(t^\alpha A) u_0)$$

или, учитывая полугрупповое свойство операции дробного интегрирования и вычисляя дробные интегралы, получим в операторном виде

$$B_0 p = q_0, \quad (10)$$

где

$$B_0 p = \lim_{t \rightarrow 1} I^{k+\beta} (t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(t^\alpha A) p) = E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(A) p, \quad q_0 = \frac{1}{\Gamma(k)} (u_1 - E_{\alpha, \alpha+\beta}(A) u_0). \quad (11)$$

Таким образом, необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (1)–(3) с ограниченным оператором A и произвольными $u_0, u_1 \in E$ является разрешимость при любом $q \in E$ уравнения (10), т.е. отсутствие в спектре $\sigma(B_0)$ оператора B_0 точки $\lambda = 0$.

В силу (11) оператор B_0 является аналитической функцией оператора A . По теореме об отображении спектра ограниченного оператора $\sigma(B_0) = \sigma(E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(A)) = E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(\sigma(A))$. Следовательно, значение $\lambda = 0$ не является точкой спектра оператора B_0 только тогда, когда на спектре оператора A не обращается в нуль функция $E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. При выполнении условий теоремы 1 решение $(u(t), p)$ линейно, а следовательно, и непрерывно зависит от данных $u_0, u_1 \in E$.

Из доказанной теоремы 1 следует, что расположение нулей функции $E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z)$ определяет однозначную разрешимость задачи (1)–(3) с ограниченным оператором A . Как указано в [2], для неограниченного оператора A условие (8) при $\alpha = k = 1$, $\beta = 0$ и даже при $\alpha = 1$, $k + \beta = 1$ (в этих случаях нули функции Миттаг-Леффлера $E_{1,2}(z)$ выписываются явно) уже не будет достаточным условием однозначной разрешимости, хотя расположение нулей также играет важную роль. Поэтому мы приведем нужные нам результаты работы [10] об их расположении. В теореме 1 [10] установлено, что при $\alpha \in (0, 1)$, $k + \alpha + \beta > 0$ и подходящей нумерации, все достаточно большие по модулю нули μ_n , $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, функции $E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z)$ просты и при $n \rightarrow \pm\infty$ справедлива асимптотика

$$\mu_n^{1/\alpha} = 2\pi ni + (k + \beta - 1) \left(\ln 2\pi |n| + \frac{\pi i}{2} \operatorname{sign} n \right) + \ln \frac{\alpha}{\Gamma(k + \beta)} + o(1), \quad n \rightarrow \pm\infty. \quad (12)$$

Установим далее необходимое условие единственности решения обратной задачи (1)–(3) с неограниченным оператором A .

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – линейный замкнутый оператор в E . Предположим, что обратная задача (1)–(3) имеет решение $(u(t), p)$. Для того чтобы это решение было единственным, необходимо, чтобы ни один нуль μ_n целой функции $E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z)$ не являлся собственным значением оператора A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, пусть некоторый нуль μ_n из счетного множества нулей функции $E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z)$ является собственным значением оператора A с собственным вектором $h_n \neq 0$.

Введем в рассмотрение функцию $w(t) = \psi(t)h_n$ и подберем скалярную функцию $\psi(t)$ так, чтобы функция $w(t)$ удовлетворяла уравнению (1) при $p = h_n$ и нулевому начальному условию (2). Легко проверить, что функция $\psi(t)$ должна быть решением следующей задачи Коши:

$$D^\alpha \psi(t) = \mu_n \psi(t) + t^{k-1}, \quad (13)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} I^{1-\alpha} \psi(t) = 0. \quad (14)$$

Задача (13), (14) имеет единственное решение (см. [11; с. 602], которое представимо в виде

$$\psi(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) s^{k-1} ds.$$

Поскольку μ_n – нуль функции $E_{1, k+\alpha+\beta}(z)$, то аналогично (10), (11) получаем

$$\lim_{t \rightarrow 1} I^\beta \psi(t) = \Gamma(k) E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(\mu_n) = 0.$$

Таким образом, функция $w(t) = \psi(t)h_n$ удовлетворяет уравнению (1) при $p = h_n$ и нулевым условиям (2) и (3), что противоречит предположению единственности решения, поскольку пара $(u(t) + w(t), p + h_n)$ также является решением задачи (1)–(3). Теорема доказана.

Для установления однозначной разрешимости задачи (1)–(3) с неограниченным оператором A , удовлетворяющим условию 1, сведем эту задачу, учитывая (7), к операторному уравнению

$$Bp = q, \quad (15)$$

где

$$Bp = \frac{1}{\Gamma(k)} \lim_{t \rightarrow 1} I^\beta \int_0^t s^{k-1} T_\alpha(t-s) p \, ds = \lim_{t \rightarrow 1} I^{k+\beta} T_\alpha(t) p, \quad B: E \rightarrow E, \quad (16)$$

$$q = \frac{1}{\Gamma(k)} \left(u_1 - \lim_{t \rightarrow 1} I^\beta T_\alpha(t) u_0 \right), \quad q \in D(A), \quad (17)$$

при этом функция $f(t) = t^{k-1} p$ должна удовлетворять условию 2.

Таким образом, однозначная разрешимость задачи (1)–(3) сводится к задаче о существовании у ограниченного оператора B , заданного соотношением (16), обратного оператора, определенного на некотором подмножестве банахова пространства E . Для выяснения последнего факта мы получим более удобное для исследований представление оператора B с помощью резольвенты $R(\lambda^\alpha) = (\lambda^\alpha I - A)^{-1}$, сузив при этом область определения оператора B до плотного в E множества $D(A)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть оператор A удовлетворяет условию 1 и $k > \alpha$. Тогда для любого $p \in D(A)$ справедливо представление

$$Bp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} z^{\alpha-1} E_{1,k+\alpha+\beta}(z) R(z^\alpha) p \, dz, \quad (18)$$

где $\lambda \in \rho(A)$, $\rho(A)$ – резольвентное множество оператора A , $\operatorname{Re} \lambda > \sigma > \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $p \in D(A^2)$ и, стало быть, $p = R^2(\lambda) p_0$, $p_0 \in E$. Тогда из (16), (7), используя полугрупповое свойство дробного интегрирования и тождество Гильберта, после интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} Bp &= \frac{1}{\Gamma(k+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{k+\beta-1} \, ds \cdot \frac{1}{2\pi i} D^{1-\alpha} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\exp(zs)}{z^{\alpha-1}} R(z^\alpha) R^2(\lambda) p_0 \, dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(k+\alpha+\beta)} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{k+\alpha+\beta-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \\ &\quad z^{\alpha-1} \exp(zs) \left(\frac{R(z^\alpha) p_0}{(\lambda - z^\alpha)^2} - \frac{R^2(\lambda) p_0}{\lambda - z^\alpha} - \frac{R(\lambda) p_0}{(\lambda - z^\alpha)^2} \right) dz \, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(k+\alpha+\beta)} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{k+\alpha+\beta-1} \, ds \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\exp(zs) R(z^\alpha) p_0}{z^{1-\alpha} (\lambda - z^\alpha)^2} dz, \end{aligned} \quad (19)$$

при этом интегралы по прямой $\operatorname{Re} z = \sigma$ от функций вида

$$\frac{z^{\alpha-1} \exp(zs) R^j(\lambda) p_0}{(\lambda - z^\alpha)^{3-j}}, \quad j = 1, 2$$

обратились в нуль в силу леммы Жордана.

Последний интеграл абсолютно сходится, поэтому, изменив порядок интегрирования и воспользовавшись равенством 1.17 [12]

$$z^\mu E_{1,\mu+1}(\lambda z) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^z e^{\lambda s} (z-s)^{\mu-1} \, ds, \quad \mu > 0, \quad (20)$$

из (19) выводим представление

$$\begin{aligned} Bp &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z)R(z^\alpha)p_0}{z^{1-\alpha}(\lambda-z^\alpha)^2} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z)R(z^\alpha)((\lambda-z^\alpha)I + (z^\alpha I - A))(\lambda I - A)p}{z^{1-\alpha}(\lambda-z^\alpha)^2} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z)}{z^{1-\alpha}(\lambda-z^\alpha)} R(z^\alpha)(\lambda I - A)p dz, \quad p \in D(A^2). \end{aligned} \quad (21)$$

Если обозначить $p_1 = (\lambda I - A)p$, то $p_1 \in D(A)$ и $p = R(\lambda)p_1$. Поэтому равенство (20) примет вид

$$BR(\lambda)p_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z)}{z^{1-\alpha}(\lambda-z^\alpha)} R(z^\alpha)p_1 dz, \quad p_1 \in D(A). \quad (22)$$

Левая и правая части равенства (22) представляют собой ограниченные операторы, которые совпадают на $D(A)$. В силу плотности $D(A)$ в E , равенство (21) справедливо при всех $p_1 \in E$. Но тогда $p = R(\lambda)p_1 \in D(A)$ и для таких p справедливо представление

$$\begin{aligned} Bp &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z)}{z^{1-\alpha}(\lambda-z^\alpha)} R(z^\alpha)((\lambda-z^\alpha)I + (z^\alpha I - A))p dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} z^{\alpha-1} E_{1,k+\alpha+\beta}(z) R(z^\alpha)p dz. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме 3 ограничение $k > \alpha$ наложено для того, чтобы функция $f(t) = t^{k-1}p$ удовлетворяла условию 2, (ii). Можно заменить это ограничение требованием гладкости элемента p , а именно, $p \in D(A)$. Тогда функция $f(t) = t^{k-1}p$ будет удовлетворять условию 2, (i).

Переходим теперь к установлению достаточных условий однозначной разрешимости задачи (1)–(3). Как следует из теоремы 2, нам придется потребовать, чтобы ни один нуль μ_n функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ не являлся собственным значением оператора A . Более того, для установления разрешимости потребуем, чтобы все нули принадлежали резольвентному множеству $\rho(A)$. Учитывая их асимптотику (12), отметим, что при $k + \beta > 1$ условие будет налагаться лишь на конечное число нулей μ_n , $n = 1, 2, \dots, n_0$, с $\operatorname{Re} \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$, поскольку остальные автоматически принадлежат $\rho(A)$. В случае $k + \beta \leq 1$ нулей с $\operatorname{Re} \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ будет счетное множество.

ТЕОРЕМА 4. Пусть оператор A удовлетворяет условию 1, $k > \alpha$, $k + \beta > 1$, $\sigma > \omega$ и $u_0, u_1 \in D(A^3)$. Если каждый нуль μ_n , $n = 1, 2, \dots, n_0$, функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ с $\operatorname{Re} \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ принадлежит $\rho(A)$, то задача (1)–(3) имеет единственное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже отмечали, что существование единственного решения задачи (1)–(3) (или операторного уравнения (15)) сводится к доказательству существования обратного у ограниченного оператора B , определяемого равенством (16) (или (18)). При $u_0, u_1 \in D(A^3)$ в силу инвариантности $D(A)$ относительно

$T_\alpha(t)$ правая часть уравнения (15) принадлежит $D(A^3)$. Покажем, что оператор B имеет обратный оператор $B^{-1}: D(A^3) \rightarrow E$.

Поскольку каждый нуль $\mu_n^{1/\alpha}$ функции $E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z^\alpha)$ с $\operatorname{Re} \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ принадлежит $\rho(A)$, то он принадлежит $\rho(A)$ вместе с некоторой круговой окрестностью Ω_n . Пусть Γ – контур на комплексной плоскости, состоящий из прямой $\operatorname{Re} z = \sigma > \omega$ и границ γ_n круговых окрестностей Ω_n , т.е.

$$\Gamma = \{\operatorname{Re} z = \sigma\} \bigcup_{\operatorname{Re} \mu_n^{1/\alpha} < \sigma} \gamma_n.$$

Возьмем $\lambda \in \rho(A)$, $\operatorname{Re} \lambda > \sigma > \omega$ и рассмотрим ограниченный оператор

$$\Upsilon q = \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1} R(z^\alpha) q dz}{E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha - \lambda)^3}, \quad \Upsilon: E \rightarrow E. \quad (23)$$

Отметим, что интеграл в (23) абсолютно сходится в силу выбора контура Γ , оценки (5), асимптотики (12) и известного (см. [12; с. 134]) асимптотического поведения функции Миттаг-Леффлера при $0 < \alpha < 2$ и $|z| \rightarrow \infty$

$$E_{\alpha, \mu}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\mu)/\alpha} \exp(z^{1/\alpha}) - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Gamma(\mu - \alpha j) z^j} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \quad (24)$$

$$|\arg z| \leq \nu\pi, \quad \nu \in \left(\frac{\alpha}{2}, \alpha\right),$$

$$E_{\alpha, \mu}(z) = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Gamma(\mu - \alpha j) z^j} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \quad \nu\pi \leq |\arg z| \leq \pi. \quad (25)$$

Пусть $q \in D(A)$, $\sigma < \sigma_1 < \operatorname{Re} \lambda$. Тогда, подставляя (18) в (23) и применяя тождество Гильберта, получим

$$\begin{aligned} \Upsilon Bq &= \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1} R(z^\alpha) dz}{E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha - \lambda)^3} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - \infty}^{\sigma_1 + \infty} \xi^{\alpha-1} E_{1, k+\alpha+\beta}(\xi) R(\xi^\alpha) q d\xi \\ &= \frac{\alpha}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\sigma_1 - \infty}^{\sigma_1 + \infty} \frac{z^{\alpha-1} \xi^{\alpha-1} E_{1, k+\alpha+\beta}(\xi)}{E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha - \lambda)^3} \cdot \frac{R(z^\alpha) q - R(\xi^\alpha) q}{\xi^\alpha - z^\alpha} d\xi dz. \end{aligned} \quad (26)$$

Интеграл в (26) абсолютно сходится, поэтому меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$\begin{aligned} \Upsilon Bq &= \frac{\alpha}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1} R(z^\alpha) q dz}{E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha - \lambda)^3} \cdot \int_{\sigma_1 - \infty}^{\sigma_1 + \infty} \frac{\xi^{\alpha-1} E_{1, k+\alpha+\beta}(\xi) d\xi}{\xi^\alpha - z^\alpha} - \\ &\quad - \frac{\alpha}{(2\pi i)^2} \int_{\sigma_1 - \infty}^{\sigma_1 + \infty} \xi^{\alpha-1} E_{1, k+\alpha+\beta}(\xi) R(\xi^\alpha) q d\xi \\ &\quad \times \int_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1} dz}{E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha - \lambda)^3 (\xi^\alpha - z^\alpha)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Внутренний интеграл (после замены $\eta = z^\alpha$) во втором слагаемом (27) равен нулю в силу выбора контура Γ и леммы Жордана, а для вычисления интегралов в первом слагаемом, используем равенство (20), формулу (см. [11; с. 33])

$$\int_0^{+\infty} \exp(-t\xi) E_{\alpha, 1}(t^\alpha z^\alpha) dt = \frac{\xi^{\alpha-1}}{\xi^\alpha - z^\alpha}, \quad \left| \frac{z^\alpha}{\xi^\alpha} \right| < 1,$$

равенство $I^\nu E_{\alpha,1}(t^\alpha z^\alpha) = t^\nu E_{\alpha,\nu+1}(t^\alpha z^\alpha)$, $\nu > 0$, и лемму Жордана. Таким образом, для $q \in D(A)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \Upsilon Bq &= \frac{\alpha}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1} R(z^\alpha) q dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha - \lambda)^3} \cdot \lim_{t \rightarrow 1} I^{k+\alpha+\beta-1} \int_{\sigma_2-\infty}^{\sigma_2+\infty} \frac{\xi^{\alpha-1} \exp(\xi t) d\xi}{\xi^\alpha - z^\alpha} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1} R(z^\alpha) q dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha - \lambda)^3} \cdot \lim_{t \rightarrow 1} I^{k+\alpha+\beta-1} E_{\alpha,1}(t^\alpha z^\alpha) \\ &= \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1} R(z^\alpha) q dz}{(z^\alpha - \lambda)^3} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)_\alpha} \frac{R(\eta) q d\eta}{(\eta - \lambda)^3} = R^3(\lambda) q, \end{aligned}$$

где $(\Gamma)_\alpha$ – контур, полученный из контура Γ после замены $\eta = z^\alpha$: $z \in \Gamma$, $\eta \in (\Gamma)_\alpha$.

Коммутирующие операторы Υ , B , $R(\lambda)$ ограничены и область определения $D(A)$ плотна в E , поэтому равенство $\Upsilon Bq = R^3(\lambda)q$ справедливо и для $q \in E$, $\Upsilon B: E \rightarrow D(A^3)$. Отсюда следует, что оператор $B^{-1}q = (\lambda I - A)^3 \Upsilon q$ при $q \in D(A^3)$ является обратным по отношению к B . Действительно,

$$\begin{aligned} BB^{-1}q &= B(\lambda I - A)^3 \Upsilon q = R^3(\lambda)(\lambda I - A)^3 q = q, \quad q \in D(A^3), \\ B^{-1}Bq &= (\lambda I - A)^3 \Upsilon Bq = q, \quad q \in E. \end{aligned}$$

Что касается решения задачи (1)–(3), то принадлежащий E элемент p имеет вид $p = (\lambda I - A)^3 \Upsilon q$, где элемент $q \in D(A^3)$ определяется равенством (17), оператор Υ – равенством (23), $\lambda \in \rho(A)$, $\operatorname{Re} \lambda > \sigma > \omega$, а для функции $u(t)$ справедливо представление

$$u(t) = T_\alpha(t)u_0 + \int_0^t T_\alpha(t-s)p ds.$$

Теорема доказана.

В случае $k + \beta \leq 1$, как уже отмечалось, у функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ нулей μ_n с $\operatorname{Re} \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ будет счетное множество, поэтому мы потребуем выполнения следующего условия.

УСЛОВИЕ 3. Каждый нуль μ_n , $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ с $\operatorname{Re} \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ принадлежит $\rho(A)$, и существует $d > 0$ такое, что

$$\sup_{\operatorname{Re} \mu_n^{1/\alpha} < \sigma} \left\| \frac{R(\mu_n)}{\mu_n^k} \right\| \leq d.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены условия 1 и 3, $k > \alpha$, $k + \beta \leq 1$ и $u_0, u_1 \in D(A^3)$. Тогда задача (1)–(3) имеет единственное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и в теореме 4, введем в рассмотрение оператор Υ , определяемый равенством (23). В рассматриваемом случае контур Γ содержит уже счетное множество окружностей γ_n , и для доказательства абсолютной сходимости интеграла в равенстве (23) рассмотрим интеграл по окружностям γ_n . Пусть $(\gamma_n)_\alpha$ – контур, получаемый из γ_n после замены $\xi = z^\alpha$: $z \in \gamma_n$, $\xi \in (\gamma_n)_\alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{\bigcup \gamma_n} \frac{z^{\alpha-1} R(z^\alpha) q dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha - \lambda)^3} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\bigcup (\gamma_n)_\alpha} \frac{R(\xi) q dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\xi)(\xi - \lambda)^3} \\ &= \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \frac{R(\mu_n) q}{E'_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n)(\lambda - \mu_n)^3}, \end{aligned} \quad (28)$$

при этом, поскольку (см. [12; формула (1.5) на с. 118])

$$E'_{\alpha, k+\alpha+\beta}(\mu_n) = \frac{1}{\alpha\mu_n} (E_{\alpha, k+\alpha+\beta-1}(\mu_n) - (k+\alpha+\beta-1)E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(\mu_n)),$$

учитывая асимптотику (24) функции Миттаг-Леффлера и асимптотику (12), получим

$$\begin{aligned} E'_{\alpha, k+\alpha+\beta}(\mu_n) = \frac{1}{\alpha\mu_n} & \left(\frac{\mu_n^{(2-k-\beta)/\alpha-1} (2\pi|n|)^{k+\beta-1} \exp(i \operatorname{Im} \mu_n)}{\Gamma(k+\beta)} - \frac{1}{\Gamma(k+\beta-1)\mu_n} \right. \\ & - \frac{(k+\alpha+\beta-1)\mu_n^{(2-k-\beta)/\alpha-2} (2\pi|n|)^{k+\beta-1} \exp(i \operatorname{Im} \mu_n)}{\Gamma(k+\beta)} \\ & \left. - \frac{k+\alpha+\beta-1}{\Gamma(k+\beta)\mu_n} + O\left(\frac{1}{|\mu_n|^2}\right) \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|E'_{\alpha, k+\alpha+\beta}(\mu_n)| = \frac{1}{|\mu_n|^{2-1/\alpha}} \left(\frac{1}{\alpha\Gamma(k+\beta)} + O\left(\frac{1}{|\mu_n|}\right) \right). \quad (29)$$

В силу равенства (29), условия 3 и асимптотики (12) ряд (28), а следовательно, и интеграл по $\bigcup \gamma_n$, абсолютно сходятся.

Сходимость же в равенстве (23) интеграла по прямой $\operatorname{Re} z = \sigma$, очевидно, следует из условия 3 и асимптотики (25).

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 4, мы его опускаем, и доказательство теоремы 5, тем самым, завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Учитывая замечание 1, в теоремах 4 и 5 можно заменить ограничение $k > \alpha$ требованием дополнительной гладкости данных задачи (1)–(3), а именно: при $0 < k \leq \alpha$ элементы u_0 и u_1 должны принадлежать $D(A^4)$. При этом $p \in D(A)$, а решение $(u(t), p)$ задачи (1)–(3) определяется теми же формулами, что и в теоремах 4 и 5.

Таким образом, из теорем 4 и 5 следует, что при $k + \beta > 1$ рассматриваемая обратная задача (1)–(3) разрешима при меньших ограничениях на оператор A .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin, *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **231**, Marcel Dekker, 2000.
- [2] Ю. С. Эйдельман, “Двухточечная краевая задача для дифференциального уравнения с параметром”, *Докл. АН УССР. Сер. А*, 1983, № 4, 15–18.
- [3] Ю. С. Эйдельман, “Одна обратная задача для эволюционного уравнения”, *Матем. заметки*, **49:5** (1991), 135–141.
- [4] И. В. Тихонов, Ю. С. Эйдельман, “Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции Миттаг-Леффлера”, *Дифференц. уравнения*, **38:5** (2002), 637–644.
- [5] И. В. Тихонов, Ю. С. Эйдельман, “Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым”, *Матем. заметки*, **77:2** (2005), 273–290.

- [6] А. В. Глушак, “О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной”, *Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Матем.*, 2001, № 2, 74–77.
- [7] А. В. Глушак, “О задаче типа Коши для неоднородного абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной”, *Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Матем.*, 2002, № 1, 121–123.
- [8] W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander, *Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*, Monogr. Math., **96**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.
- [9] В. А. Костин, “К задаче Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными”, *Докл. РАН*, **326**:4 (1992), 597–600.
- [10] А. М. Седлецкий, “О нулях функции типа Миттаг-Леффлера”, *Матем. заметки*, **68**:5 (2000), 710–724.
- [11] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987.
- [12] М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, М., 1966.

А. В. Глушак

Белгородский государственный университет

E-mail: aleglu@mail.ru

Поступило

21.01.2008