Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Акопян, А. С. Тарасов, Конструктивное доказательство теоремы Киршбрауна, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 5, 781–784

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4438>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:32:26

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Конструктивное доказательство теоремы Киришбрауна

А. В. Акопян, А. С. Тарасов

В статье пойдет речь о теореме Киришбрауна, утверждающей, что любое 1-липшицево (нерастягивающее) отображение из подмножества $\mathbb{E}^d$ в $\mathbb{E}^d$ может быть продолжено на все пространство $\mathbb{E}^d$. Валентайном в [1] было доказано аналогичное утверждение для сферических и гиперболических пространств. Здесь и далее $\mathcal{X}$ будет обозначать одно из трех пространств $\mathbb{E}^d$, $\mathbb{S}^d$ или $\mathbb{H}^d$.

ТЕОРЕМА (Киришбраун, Валентайн [1]). Пусть U – подмножество в $\mathcal{X}$ и $f: U \rightarrow \mathcal{X}$ – нерастягивающее отображение. Тогда это f может быть продолжено до нерастягивающего отображения $f': \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$.

Имеется множество интересных обобщений теоремы Киришбрауна, например, [2]–[5].

Все имеющиеся на данный момент доказательства теорем Киришбрауна являются аналитическими. Данцер, Грюнбаум и Кли в [6] поднимают задачу о построении простого геометрического продолжения.

В данной работе будет показано, как в случае конечного множества U построить продолжение функции f в классе PL -изометрий, т.е. кусочно-линейных отображений, сохраняющих длины кривых. Дадим более строгое определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. PL -изометрией $\varphi: P \rightarrow \mathcal{X}$ политопа P из $\mathcal{X}$ называется непрерывное отображение, обладающее следующим свойством: существует такая локально-конечная триангуляция P , что для любого симплекса T из этой триангуляции ограничение φ на T есть движение.

Наглядным примером PL -изометрии служит отображение, переводящее обычный лист бумаги в фигуру оригами.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть на конечном множестве точек $U \subset \mathcal{X}$ задано слабосжимающее отображение f . Тогда это слабосжимающее отображение можно продолжить до PL -изометрии на все пространство.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пользуясь теоремой Хелли и тем фактом, что пространство $\mathcal{X}$ всегда сепарабельно, не сложно показать, что из основной теоремы следует полная теорема Киришбрауна–Валентайна (не обязательно для конечного U).

Понятно, что PL -изометрия является нерастягивающим (иногда его также называют коротким или слабосжимающим) отображением, т.е. не увеличивает расстояние между любыми двумя точками.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 06-01-00648 и 08-01-00565-а), а также Фонда поддержки молодых ученых “Конкурс Мёбиуса”. Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00565-а, 08-01-91202-ЯФ_а).

Пусть PL -изометрия φ переводит точки A и B в точки $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$. Предположим, что существует такое движение g , что $\varphi(A) = g(A)$, а $\varphi(B) = g(B)$. Тогда в силу слабого сжатия для любой точки X , лежащей на отрезке $[A, B]$, верно $\varphi(X) = g(X)$ (иначе бы нарушалось неравенство треугольника).

Поэтому каждому движению из набора движений PL -изометрии соответствует одна и притом выпуклая область. Далее будем называть такие области *листами* и считать, что всем листам соответствуют разные движения.

Рассмотрим какие-нибудь два соседних по гиперграни листа L и L' . Поскольку на этой гиперграни движения листов совпадают, но сами они отличаются, можно сказать, что движение первого листа это композиция движений второго листа и симметрии относительно этой гиперграни (поскольку существует только два движения, совпадающие на гиперплоскости):

$$g_{L'} = g_L \circ \text{sym}(L \cap L').$$

Отметим еще одно важное свойство, которое является удобным инструментом при построении различных PL -изометрий и пригодится для доказательства основной теоремы.

ЛЕММА. *Для любой PL -изометрии φ , заданной на конечном политопе P , можно указать несколько точек и их образов под действием φ , так что по этим точкам PL -изометрия φ восстанавливается однозначно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $\mathbb{E}^d$ и $\mathbb{H}^d$ достаточно выбрать все вершины всех многогранников. Поскольку каждый выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой своих вершин, все листы (которые в данном случае будут выпуклыми многогранниками) можно однозначно восстановить.

Это свойство можно обобщить и на все сферическое пространство. Но возникает трудность, поскольку лист может содержать полусферы в качестве своих граней и тогда вершин листов не достаточно для их определения (например, в $\mathbb{S}^2$ существует целое семейство полуокружностей с общими концами). “Разрежем” сферу $\mathbb{S}^d$ с помощью $d+1$ попарно перпендикулярных гиперплоскостей. Эти гиперплоскости также и разрезают листы, из которых состоит наша PL -изометрия. Новые “маленькие” листы не могут содержать полусферы, потому мы можем задать действие PL -изометрии на них, задав его только на вершинах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. Если размерность пространства равна 0, то утверждение очевидно. Далее мы воспользуемся утверждением теоремы для $\mathbb{S}^{d-1}$.

Доказательство будем проводить индукцией по числу точек, на которых задано отображение f .

В случае, если у нас задано отображение только для одной точки, теорема очевидна. Действительно, все пространство можно считать одним листом, а соответствующим движением – какое-нибудь движение, переводящее точку $A \in U$ в $f(A)$.

Итак, будем считать, что теорема доказана в случае, когда число точек в отображении не превосходит $n-1$. Докажем ее для случая, когда число точек равно n .

Обозначим точки множества U через $A_1, A_2, \dots, A_n$. Без ограничения общности можно считать, что f оставляет точку A_n на месте. По предположению индукции существует PL -изометрия ψ (заданная на всем d -мерном пространстве), переводящая A_i в B_i для $i = 1, \dots, n-1$.

Пусть ψ не оставляет A_n на месте (иначе в качестве нужной нам PL -изометрии можно взять само ψ). Рассмотрим множество точек X , удаляющихся от A_n при отображении ψ , иначе говоря, множество точек X таких, что

$$d(A_n, X) < d(A_n, \psi(X)).$$

Обозначим его через Ω . Понятно, что Ω не пусто, открыто (ψ – непрерывное отображение, а неравенство, ограничивающее Ω , – строгое) и не заполняет все пространство, поскольку точки A_i , $i = 1, \dots, n-1$, ему не принадлежат (они по-условию теоремы не удаляются от A_n).

Покажем, что вместе с любой точкой X , принадлежащей Ω , отрезок $[A_n, X]$ также целиком лежит в Ω . Возьмем произвольную точку Y , лежащую на этом отрезке. Так как ψ – слабосжимающее отображение, $d(X, Y) \geq d(\psi(X), \psi(Y))$, а поскольку $d(A_n, X) < d(A_n, \psi(X))$, имеем

$$d(A_n, Y) = d(A_n, X) - d(X, Y) < d(A_n, \psi(X)) - d(\psi(X), \psi(Y)) \leq d(A_n, \psi(Y)).$$

Последнее верно в силу неравенства треугольника.

Посмотрим, как образуется граница Ω . Пусть L – какой-нибудь лист PL -изометрии ψ , а g_L – соответствующее ему движение. Рассмотрим точку $g_L^{-1}(A_n)$ (она не обязательно должна лежать в L). Легко понять, что $L \cap \Omega$ суть множество точек L , лежащих ближе к A_n , чем к $g_L^{-1}(A_n)$. Если это множество не пусто и не весь лист L (эти случаи нам не интересны, поскольку тогда L лежит либо целиком вне, либо целиком внутри Ω), то часть границы Ω , лежащей в L , – это просто пересечение L и срединной гиперплоскости между точками A_n и $g_L^{-1}(A_n)$. Таким образом, рассматривая все листы ψ , приходим к тому, что граница Ω состоит из выпуклых политопов.

Теперь опишем построение нужного нам отображения φ . Вне множества Ω отображение φ будет совпадать с ψ . Далее, пусть L' – часть границы Ω , лежащей внутри листа L . Рассмотрим пирамиду с вершиной в A_n и основанием L' (или, проще говоря, их выпуклую оболочку) – это будет лист φ' . Сопоставим ему движение $g_L \circ s_{L'}$, где $s_{L'}$ – симметрия относительно гиперплоскости, содержащей L' . По построению этой симметрии $s_{L'}(A_n) = g_L^{-1}(A_n)$. Проведем эту процедуру для всей границы Ω .

Пусть точка X принадлежит L' . Тогда легко понять, что движение $g_L \circ s_{L'}$ переводит отрезок $[X, A_n]$ в отрезок $[\psi(X), A_n]$. Действительно, $g_L \circ s_{L'}(X) = g_L(X) = \psi(X)$, а $g_L \circ s_{L'}(A_n) = g_L(g_L^{-1}(A_n)) = A_n$, и отрезок $[X, A_n]$ лежит целиком внутри одного листа отображения ψ .

Таким образом, на границе двух листов соответствующие листам движения совпадают, поскольку они совпадают на границе Ω .

Если мы определили отображение φ на всем Ω , то оно является искомым. Однако φ может быть определено не на всем Ω . Рассмотрим луч, выходящий из A_n . Если он пересекает границу Ω , то на нем отображение φ определено. Если же он полностью лежит в Ω , то A_n является единственной точкой на луче, на которой определено отображение φ .

Покажем, что в случае, если мы находимся в $\mathbb{S}^d$, φ уже определен на всем пространстве. Заметим, что точка A'_n – противоположная A_n , не может удалиться от A_n (поскольку уже находится на максимальном расстоянии). Покажем, что она принадлежит внутренности дополнения к Ω .

1. Если A'_n не остается на месте, значит она приближается к A_n , а в силу непрерывности приближается вместе с некоторой своей окрестностью.

2. Если $\psi(A'_n) = A'_n$. Легко понять, что существует такая окрестность точки A'_n , что для любой точки X из этой окрестности $A'_n X = A'_n \psi(X)$ (в качестве этой окрестности можно взять все точки листов, содержащих A'_n). Поскольку точки A_n и A'_n – противоположные, для любой точки сферы верно равенство

$$d(A_n, X) = d(A_n, A'_n) - d(A'_n, X) = d(A_n, \psi(X)).$$

Значит, выбранная нами окрестность не пересекается с Ω . Таким образом, любая дуга большой окружности $[A_n, A'_n]$ пересекает границу Ω , а значит, на ней определено отображение φ .

Теперь покажем, что можно доопределить φ в случае пространств $\mathbb{E}^d, \mathbb{H}^d$.

Рассмотрим сферу S с центром в A_n и достаточно маленькую, чтобы она целиком лежала внутри Ω . Построенная нами неполная PL -изометрия φ (т.е. PL -изометрия, область определения которой не совпадает со всем пространством) отображает S в себя. Таким образом, у нас определена неполная PL -изометрия на S . Из леммы следует, что движение каждого листа можно однозначно восстановить по движению нескольких точек (вершин и иногда точек внутри и на границе листа). Отметим все такие точки для

каждого листа. Если у нас задана PL -изометрия, которая действует так же, как и φ на всех этих точках, то она совпадает с действием φ на сфере S . Такая PL -изометрия существует, поскольку для сферических пространств наша теорема уже доказана. Ее можно продолжить на все Ω . Действительно, если точка X , лежащая на сфере, переходит в точку X' , то луч $[A_n, X)$ (точнее его часть, лежащая внутри Ω) переведем в $[A_n, X')$. Это отображение будет совпадать с φ там, где φ определено. Поэтому, если мы доопределим φ таким образом, то получим PL -изометрию, действующую на все пространство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. A. Valentine, *Amer. J. Math.*, **67**:1 (1945), 83–93. [2] U. Lang, V. Schroeder, *Geom. Funct. Anal.*, **7**:3 (1997), 535–560. [3] B. Grünbaum, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13**:5 (1962), 812–814. [4] K. Ball, *Geom. Funct. Anal.*, **2**:2 (1992), 137–172. [5] W. Johnson, J. Lindenstrauss, *Conference in Modern Analysis and Probability* (New Haven, Conn., 1982), *Contemp. Math.*, **26**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984, 189–206. [6] Л. Данцер, Л. Грюнбаум, В. Кли, *Теорема Хелли и ее применения*, Мир, М., 1968.

А. В. Акопян

Институт системного анализа РАН

E-mail: akopjan@gmail.com

Поступило

05.02.2008

А. С. Тарасов

Институт системного анализа РАН

E-mail: tarasov@isa.ru