Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Терехин, Базисы Рисса, порожденные сжатиями и сдвигами функции на отрезке, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 4, 547–560

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm444>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:36:22

УДК 517.51

БАЗИСЫ РИССА, ПОРОЖДЕННЫЕ СЖАТИЯМИ И СДВИГАМИ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

П. А. Терехин

Даны условия базисности по Риссу систем сжатий и сдвигов функции.

Библиография: 6 названий.

1. Формулировки теорем

Пусть функция $\varphi(x)$ задана на полуинтервале $[0, 1)$ и принимает, вообще говоря, комплексные значения.

Для $n \in \mathbb{N}$ по стандартному представлению $n = 2^k + j$, $k \in \mathbb{P} = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq j < 2^k$, обозначая $\Delta_i^{(k)} = [j/2^k, (j+1)/2^k)$, полагаем

$$\varphi_n(x) = \varphi_{kj}(x) = \begin{cases} 2^{k/2} \varphi(2^k x - j), & x \in \Delta_j^{(k)}, \\ 0, & x \notin \Delta_j^{(k)}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Пусть, кроме того, $\varphi_0 = \chi[0, 1)$ – характеристическая функция $[0, 1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Семейство (φ_n) , $n \in \mathbb{P}$, называем *системой сдвигов и сжатий функции* φ .

Классическая система Хаара (χ_n) , где $\chi_0 = \chi[0, 1)$ и

$$\chi_n(x) = \chi_{kj}(x) = \begin{cases} 2^{k/2}, & x \in \Delta_{2j}^{(k+1)}, \\ -2^{k/2}, & x \in \Delta_{2j+1}^{(k+1)}, \\ 0, & x \notin \Delta_j^{(k)}, \end{cases} \quad (1.2)$$

для $n = 2^k + j$ (стандартное представление), является, как нетрудно видеть, системой сжатий и сдвигов функции $\chi = \chi[0, 1/2) - \chi[1/2, 1)$.

В статье изучается

ВОПРОС. При каких условиях на функцию φ система ее сжатий и сдвигов есть базис пространства $L_2[0, 1]$, эквивалентный ортонормированному (базис Рисса), т.е. $\varphi_n = A e_n$, где A – обратимый и вместе с A^{-1} ограниченный оператор в $L_2[0, 1]$, (e_n) – ортонормированный базис.

Отметим, что вообще для базисности системы сжатий и сдвигов функции φ принципиально необходимо, чтобы $\int_0^1 \varphi(x) dx = 0$. В ином случае, как следует из результатов Филиппова и Освальда [1], система переполнена и потому базисом быть не может.

В статье указываются два способа построения базисов Рисса. Первый из них заключается в следующем.

Пусть H^∞ – банахова алгебра аналитических в открытом единичном круге функций, $G(H^\infty)$ – группа обратимых элементов алгебры H^∞ . Заметим, что для принадлежности $u \in G(H^\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $u(z)$ была аналитической в круге $|z| < 1$ и чтобы в этом круге выполнялись неравенства

$$0 < \inf |u(z)|, \quad \sup |u(z)| < \infty.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть система (ψ_n) сжатий и сдвигов функции ψ является базисом Рисса, и пусть разложение функции φ по системе (ψ_n) имеет вид

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2} c_k \sum_{j=0}^{2^k-1} \psi_{kj}. \quad (1.3)$$

Тогда для того чтобы система (φ_n) сжатий и сдвигов функции φ была базисом Рисса, необходимо и достаточно, чтобы функция

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

принадлежала группе $G(H^\infty)$.

ПРИМЕЧАНИЕ 1. В качестве функции ψ в посылке теоремы можно взять, например, функцию ψ , порождающую систему Хаара.

ПРИМЕЧАНИЕ 2. Функции

$$2^{-k/2} \sum_{j=0}^{2^k-1} \psi_{kj},$$

фигурирующие в разложении (1.3), являются формальными аналогами функций Радемахера, соответствующих случаю $\psi = \chi$.

Второй способ построения базисов Рисса дается теоремой 2, основанной на следующем определении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть (b_k) , $k \in \mathbb{N}$, – последовательность неотрицательных чисел, суммируемая с квадратом: $b_k \geq 0$, $\sum b_k^2 < \infty$; функция ψ такова, что система ее сжатий и сдвигов является базисом Рисса. Обозначим через $A(\psi, (b_k))$ – класс функций φ , разложение которых по (ψ_n)

$$\varphi = c_0 \psi + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} c_{kj} \psi_{kj} \quad (1.4)$$

удовлетворяет условиям

$$c_0 \neq 0, \quad \sum_{j=0}^{2^k-1} |c_{kj}|^2 \leq (|c_0| b_k)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.5)$$

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы для любой функции $\varphi \in A(\psi, (b_k))$ система ее сжатий и сдвигов была базисом Рисса, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k < 1.$$

ПРИМЕЧАНИЕ 3. Классы $A(\psi, (b_k))$ являются аналогами классов $A_\alpha(g, M)$, определенных Сабуровой [2] в связи с вопросом базисности в $C[0, 1]$.

ПРИМЕЧАНИЕ 4. Поскольку свойство базисности по Риссу однородно (не зависит от умножения φ на ненулевой числовой множитель), то в (1.4) и (1.5) можно считать $c_0 = 1$.

2. Вспомогательные утверждения

ОБОЗНАЧЕНИЯ. Пусть L_2^0 – пространство функций, определенных на $[0, 1)$, интегрируемых с квадратом и имеющих нулевой интеграл;

$r_k = 2^{-k/2} \sum_{j=0}^{2^k-1} \chi_{kj}$ – функции Радемахера, $k \in \mathbb{P}$;

$k(n), j(n)$ определяются из стандартного представления (см. раздел 1) натурального $n = 2^k + j$ по правилу $k(n) = k, j(n) = j$;

$\prod_{\nu=1}^k A_\nu$ – произведение операторов A_ν в следующем порядке: $A_1 \cdots A_k$ (первым действует оператор A_k , последним – A_1), при $k = 0$ пустое произведение считаем равным тождественному оператору.

Здесь и далее под словом оператор понимаем ограниченный линейный оператор, действующий в пространстве L_2^0 .

2.1. Предложения. Определим операторы сжатия-сдвига $S_n, n \in \mathbb{N}$, посредством равенства

$$S_n \varphi = \varphi_n, \quad (2.1)$$

где φ_n – элемент системы сжатий и сдвигов функции φ (см. раздел 1).

Корректность определения (линейность и ограниченность сжатия-сдвига) нетрудно проверить, пользуясь равенством (1.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливо представление*

$$S_n = \prod_{\nu=1}^k S(\varepsilon_\nu), \quad (2.2)$$

где $k = k(n)$, ε_ν определяются из двоичного разложения $j(n) = \sum_{\nu=1}^k \varepsilon_\nu 2^{k-\nu}$ так, что $\varepsilon_\nu = 0$ или 1; операторы $S(\varepsilon)$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, определяются из равенства

$$S(\varepsilon)\varphi(x) = \begin{cases} 2^{1/2}\varphi(2x - \varepsilon), & x \in [\varepsilon/2, (\varepsilon + 1)/2), \\ 0, & x \notin [\varepsilon/2, (\varepsilon + 1)/2). \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продолжим функцию $\varphi \in L_2^0$ нулем за полуинтервал $[0, 1)$. Будем иметь

$$\begin{aligned} S_n \varphi(x) &= \varphi_n(x) = \varphi_{kj}(x) = 2^{k/2} \varphi(2^k x - j) \\ &= 2^{k/2} \varphi(2^k x - 2^{k-1} \varepsilon_1 - \dots - 2 \varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k) \\ &= 2^{1/2} \dots 2^{1/2} \varphi(2(2 \dots (2x - \varepsilon_1) - \dots - \varepsilon_{k-1}) - \varepsilon_k) = S(\varepsilon_1) \dots S(\varepsilon_k) \varphi(x). \end{aligned}$$

Учли (2.1), определение 1 функций φ_n и пояснения к (2.2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для оператора A следующие условия эквивалентны:

- (а) для некоторой функции ψ имеем $A\chi_n = \psi_n$, $n \in \mathbb{N}$;
- (б) A перестановочен с S_n , $n \in \mathbb{N}$;
- (в) если $A\omega = \varphi$, то $A\omega_n = \varphi_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (а) следует (б). В самом деле, условие (а) ввиду определения (2.1) оператора S_n можно записать в виде $AS_n\chi = S_nA\chi$.

Пусть $p, q \in \mathbb{N}$. Согласно представлению (2.2) произведение $S_p S_q$ равно S_n для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда, учитывая дважды равенство (2.1) для q и последнее равенство (для n и для q), находим

$$AS_p\chi_q = AS_p S_q\chi = AS_n\chi = S_nA\chi = S_p S_q A\chi = S_p AS_q\chi = S_p A\chi_q.$$

В силу полноты в пространстве L_2^0 системы (χ_q) , $q \in \mathbb{N}$, получаем $AS_p f = S_p A f$ для любой функции $f \in L_2^0$, что означает условие (б).

Из (б) следует (в). В самом деле, согласно определению (2.1) оператора S_n и посылке условия (в) имеем $A\omega_n = AS_n\omega = S_nA\omega = S_n\varphi = \varphi_n$.

Из (в) следует (а). Достаточно положить $\psi = A\chi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для степеней оператора $U = 2^{-1/2}(S(0) + S(1))$ имеем

$$U^k \varphi = 2^{-k/2} \sum_{j=0}^{2^k-1} \varphi_{kj}, \quad (2.3)$$

в частности,

$$U^k \chi = r_k. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имея в виду определение оператора U , находим

$$U^k = 2^{-k/2} (S(0) + S(1))^k = 2^{-k/2} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k} \prod_{\nu=1}^k S(\varepsilon_\nu) = 2^{-k/2} \sum_{k(n)=k} S_n$$

– в последнем равенстве учли представление (2.2).

Тогда

$$U^k \varphi = 2^{-k/2} \sum_{k(n)=k} S_n \varphi = 2^{-k/2} \sum_{k(n)=k} \varphi_n = 2^{-k/2} \sum_{j=0}^{2^k-1} \varphi_{kj};$$

мы учли (2.1) и определение системы сжатий и сдвигов из раздела 1. Равенство (2.3) установлено. Полагая в нем $\varphi = \chi$, получаем (2.4) (см. обозначение r_k).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $k, m \in \mathbb{P}$, $0 \leq j < 2^k$, $0 \leq i < 2^m$, и функция φ представлена рядом по системе Радемахера

$$\varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} r_{\nu}.$$

Тогда выполняются равенства

$$\sum_{j=0}^{2^k-1} (\varphi_{kj}, \chi_{mi}) = 2^{-(m-k)/2} c_{m-k}, \quad \text{если } k < m; \quad (2.51)$$

$$(\varphi_{kj}, \chi_{mi}) = \delta_{ij} c_0, \quad \text{если } k = m; \quad (2.52)$$

$$(\varphi_{kj}, \chi_{mi}) = 0, \quad \text{если } k > m. \quad (2.53)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $k < m$.

Согласно посылке предложения и равенству (2.4) имеем

$$U^k \varphi = U^k \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} r_{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} U^{k+\nu} \chi = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} r_{k+\nu},$$

откуда, используя (2.3), получаем

$$\sum_{j=0}^{2^k-1} (\varphi_{kj}, \chi_{mi}) = 2^{k/2} (U^k \varphi, \chi_{mi}) = 2^{k/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} (r_{k+\nu}, \chi_{mi}) = 2^{-(m-k)/2} c_{m-k},$$

в последнем равенстве мы учли обозначение r_k и ортонормированность системы Хаара. Установлено равенство (2.51).

Пусть теперь $k = m$. Если $j \neq i$, то $\Delta_j^{(k)} \cap \Delta_i^{(m)} = \emptyset$ (см. раздел 1). Поэтому ввиду (1.1) поточечное произведение $\varphi_{kj}(x) \chi_{mi}(x)$ тождественно равно нулю. Тем более, $(\varphi_{kj}, \chi_{mi}) = 0$.

Если же $j = i$, то снова ввиду (1.1)

$$\begin{aligned} (\varphi_{kj}, \chi_{mi}) &= (\varphi_{mi}, \chi_{mi}) = \int_{\Delta_i^{(m)}} 2^{m/2} \varphi(2^m x - i) 2^{m/2} \chi(2^m x - i) dx \\ &= \int_0^1 \varphi(x) \chi(x) dx = (\varphi, \chi) = c_0, \end{aligned}$$

в последнем равенстве мы учли посылку предложения. Таким образом, установлено равенство (2.52).

Наконец, пусть $k > m$.

Если $\Delta_j^{(k)} \cap \Delta_i^{(m)} = \emptyset$, то $(\varphi_{jk}, \chi_{mi}) = 0$ — так же, как и выше в случае $k = m$, $j = i$.

Если же $\Delta_j^{(k)} \cap \Delta_i^{(m)} \neq \emptyset$, то $\Delta_j^{(k)} \subset \Delta_i^{(m)}$, причем в силу строгого неравенства $k > m$ последнее включение строгое. Но поскольку $\Delta_j^{(m)} = \Delta_{2i}^{(m+1)} \cup \Delta_{2i+1}^{(m+1)}$, то либо $\Delta_j^{(k)} \subset \Delta_{2i}^{(m+1)}$, либо $\Delta_j^{(k)} \subset \Delta_{2i+1}^{(m+1)}$. Функция φ_{kj} обращается в нуль вне $\Delta_j^{(k)}$ (см. (1.1)); на каждом из полуинтервалов $\Delta_{2i}^{(m+1)}$ и $\Delta_{2i+1}^{(m+1)}$ функция χ_{mi} постоянна (см. (1.2)). Поэтому скалярное произведение $(\varphi_{kj}, \chi_{mi})$ пропорционально интегралу от функции φ_{kj} . Последний, в свою очередь, пропорционален интегралу от функции φ (см. (1.1)), который, как видно из посылки предложения, равен нулю. Итак, $(\varphi_{kj}, \chi_{mi}) = 0$. Установлено равенство (2.53).

2.2. Леммы.

ЛЕММА 1. Пусть система (ψ_n) сжатий и сдвигов функции ψ является базисом Рисса. Тогда системы сжатий и сдвигов функций

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} c_{kj} \psi_{kj} \quad \text{и} \quad \omega = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} c_{kj} \chi_{kj}$$

одновременно являются или не являются базисами Рисса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как (ψ_n) – базис Рисса, то ввиду отмеченного в разделе 1 необходимого условия базисности функция ψ имеет нулевой интеграл, т.е. $\psi \in L_2^0$; тогда $\psi_n \in L_2^0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Значит, система (ψ_n) , $n \in \mathbb{N}$, является базисом Рисса в L_2^0 , что означает существование обратимого оператора A , действующего в пространстве L_2^0 , такого, что $A\chi_n = \psi_n$, $n \in \mathbb{N}$. В таком случае на основании предложения 2 будем иметь $A\omega_n = \varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$, если установим равенство $A\omega = \varphi$.

Но

$$A\omega = A \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} c_{kj} \chi_{kj} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} c_{kj} A\chi_{kj} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} c_{kj} \psi_{kj} = \varphi$$

– здесь учли определения φ и ω в формулировке леммы и равенство $A\chi_{kj} = \psi_{kj}$, равносильное доказанному равенству $A\chi_n = \psi_n$.

Итак, $A\omega_n = \varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Кроме этого, функции ω_0 и φ_0 совпадают (каждая из них по определению равна $\chi[0, 1)$). Следовательно, системы (ω_n) и (φ_n) связаны обратимым ограниченным преобразованием и если одна из них является базисом Рисса, то другая тоже.

ЛЕММА 2. Если A – обратимый оператор, перестановочный с S_n , $n \in \mathbb{N}$,

$$A\chi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r_k,$$

то

$$A^{-1}\chi = \sum_{k=0}^{\infty} d_k r_k, \quad (2.6)$$

причем последовательности (d_k) и (c_k) связаны соотношениями

$$d_0 c_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^m d_k c_{m-k} = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$A^{-1}\chi = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2} \sum_{j=0}^{2^k-1} d_{kj} \chi_{kj} \quad (2.8)$$

– ряд Фурье–Хаара функции $A^{-1}\chi \in L_2^0$.

Требуется доказать, что, во-первых, коэффициенты $d_{kj} = d_k$ не зависят от индекса j , что сразу повлечет за собой (2.6) (см. обозначение r_k); во-вторых, справедливы соотношения (2.7). Для этого воспользуемся индукцией по $k \in \mathbb{P}$.

Обозначим $\varphi = A\chi$. Используя перестановочность A и S_n , $n \in \mathbb{N}$, получаем согласно предложению 2 равенство $\varphi_n = A\chi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Записывая его в виде $\varphi_{kj} = A\chi_{kj}$ и учитывая (2.8), получаем

$$\chi = AA^{-1}\chi = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2} \sum_{j=0}^{2^k-1} d_{kj} A\chi_{kj} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2} \sum_{j=0}^{2^k-1} d_{kj} \varphi_{kj}. \quad (2.9)$$

При $k = 0$ имеем всего один коэффициент d_{kj} ; его обозначим d_0 . На основании полученного в (2.9) представления для χ и равенства (2.5₃) с $m = 0$ находим

$$\begin{aligned} 1 = (\chi, \chi) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2} \sum_{j=0}^{2^k-1} d_{kj} \varphi_{kj}, \chi \right) \\ &= d_0(\varphi, \chi) + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k/2} \sum_{j=0}^{2^k-1} d_{kj} (\varphi_{kj}, \chi) = d_0 c_0, \end{aligned}$$

в последнем равенстве мы учли также посылку леммы.

Выполним следующий шаг индукции. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Предположим, что для всех $0 \leq k \leq m-1$, $0 \leq j < 2^k$ выполняется равенство $d_{kj} = d_k$; докажем его для $k = m$.

Снова используя (2.9), а также равенства (2.5), для $0 \leq i < 2^m$ получаем

$$\begin{aligned} 0 = (\chi, \chi_{mi}) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2} \sum_{j=0}^{2^k-1} d_{kj} \varphi_{kj}, \chi_{mi} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-k/2} d_k \sum_{j=0}^{2^k-1} (\varphi_{kj}, \chi_{mi}) + 2^{-m/2} \sum_{j=0}^{2^m-1} d_{mj} (\varphi_{mj}, \chi_{mi}) \\ &\quad + \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{-k/2} \sum_{j=0}^{2^k-1} d_{kj} (\varphi_{kj}, \chi_{mi}) \\ &= 2^{-m/2} \sum_{k=0}^{m-1} d_k c_{m-k} + 2^{-m/2} d_{mi} c_0. \end{aligned}$$

Поскольку последняя сумма нулевая, то, во-первых, видно, что d_{mi} не зависит от i ($c_0 \neq 0$ в силу уже доказанного равенства $d_0 c_0 = 1$). Во-вторых, положив $d_{mi} = d_m$ и домножив нулевую сумму на $2^{m/2}$, придем к соотношению (2.7).

ЛЕММА 3. Если оператор A перестановочен с S_n , $n \in \mathbb{N}$,

$$A\chi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r_k,$$

то функция

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

принадлежит H^{∞} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через R замкнутую линейную оболочку функции Радемахера. Пусть H^2 – пространство аналитических функций, последовательность коэффициентов ряда Тейлора (в нуле) которых суммируема с квадратом.

В силу равенства (2.4) функции $U^k \chi$ совпадают с функциями Радемахера. Последние образуют ортонормированный базис в R , поэтому по известной терминологии [3, с. 81] сужение оператора U на R унитарно эквивалентно одностороннему сдвигу. Определив оператор F из R в H^2 равенством $Fr_k = z^k$, видим, что оператор FUE^{-1} есть тот самый односторонний сдвиг (умножение на z в H^2).

Покажем, что R инвариантно относительно оператора A . Для этого достаточно показать, что $Ar_m \in R$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Заметим, что оператор A перестановочен с U , так как он перестановочен с $S(0)$ и $S(1)$, поскольку это частные случаи S_n . Тогда, учитывая также равенство (2.4) и условие леммы, получаем

$$Ar_m = AU^m \chi = U^m A\chi = U^m \sum_{k=0}^{\infty} c_k r_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k U^{m+k} \chi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r_{m+k}.$$

Таким образом, $Ar_m \in R$. Инвариантность R относительно A установлена.

Последнее позволяет корректно определить оператор $B = FAF^{-1}$ в H^2 . Так как A перестановочен с U , то B перестановочен с односторонним сдвигом FUF^{-1} . Следовательно [3, с. 80], оператор B есть оператор умножения на функцию из H^∞ . Покажем, что это функция $u(z)$, введенная в условии леммы.

Учитывая определения B , F и представление Ar_m в последней цепочке равенств, получаем

$$Bz^m = FAF^{-1}z^m = FAr_m = F \sum_{k=0}^{\infty} c_k r_{m+k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{m+k} = u(z)z^m.$$

ЛЕММА 4. Существует оператор T , действующий в пространстве L_2^0 , изометрический, вполне неунитарный (т.е. не являющийся унитарным ни в одном ненулевом подпространстве пространства L_2^0) и такой, что

$$T^k \chi_n = S_n r_k, \quad k \in \mathbb{P}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n \in \mathbb{N}$ положим

$$T\chi_n = 2^{-1/2}(\chi_{2n} + \chi_{2n+1}). \quad (2.11)$$

Продолжив оператор T по линейности на конечные линейные комбинации функций χ_n , будем иметь

$$\left\| T \sum a_n \chi_n \right\|^2 = \frac{1}{2} \left\| \sum a_n \chi_{2n} + \sum a_n \chi_{2n+1} \right\|^2 = \sum |a_n|^2,$$

откуда вытекает возможность продолжения оператора T до изометрического оператора во всем пространстве L_2^0 .

Для доказательства того факта, что оператор T вполне неунитарный, сначала установим для сопряженного оператора T^* неравенство

$$\|(T^*)^k f\|^2 \leq \sum_{n=2^k}^{\infty} |(f, \chi_n)|^2, \quad f \in L_2^0. \quad (2.12)$$

Заметим, что сопряженный оператор мы понимаем в смысле пространства L_2^0 .

Докажем неравенство (2.12) индукцией по $k \in \mathbb{P}$. При $k = 0$ имеем

$$\|(T^*)^k f\|^2 = \|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \chi_n)|^2.$$

Предположим, что неравенство (2.12) справедливо при некотором k , и получим его при $k + 1$.

Используя (2.12) с $g = T^* f$ вместо f и учитывая определение (2.11) оператора T , находим

$$\begin{aligned} \|(T^*)^{k+1} f\|^2 &= \|(T^*)^k g\|^2 \leq \sum_{n=2^k}^{\infty} |(g, \chi_n)|^2 \\ &= \sum_{n=2^k}^{\infty} |(f, T\chi_n)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=2^k}^{\infty} |(f, \chi_{2n}) + (f, \chi_{2n+1})|^2 \\ &\leq \sum_{n=2^k}^{\infty} (|(f, \chi_{2n})|^2 + |(f, \chi_{2n+1})|^2) = \sum_{n=2^{k+1}}^{\infty} |(f, \chi_n)|^2. \end{aligned}$$

Неравенство (2.12) при $k + 1$ установлено.

Из неравенства (2.12) следует, что $(T^*)^k f \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ для любой функции $f \in L_2^0$. Отсюда получаем вполне неунитарность оператора T стандартным образом.

Предположим, что оператор T унитарный в подпространстве $\mathcal{L} \subset L_2^0$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{L}$ и любого k будет выполняться равенство $\|f\| = \|(T^*)^k f\|$. Устремляя здесь $k \rightarrow \infty$, получим $f = 0$, откуда $\mathcal{L} = \{0\}$, что и требовалось.

Наконец, докажем равенство (2.10); сделаем это индукцией по k .

При $k = 0$ имеем

$$T^k \chi_n = \chi_n = S_n \chi = S_n r_0 = S_n r_k;$$

мы учли определение (2.1) оператора S_n и равенство $r_0 = \chi$.

Предположим по индукции, что равенство (2.10) справедливо при некотором k для любого $n \in \mathbb{N}$, и получим его при $k + 1$.

Учитывая определение (2.11) оператора T и равенство (2.10) с χ_{2n} и χ_{2n+1} вместо χ_n , находим

$$T^{k+1} \chi_n = T^k T \chi_n = T^k 2^{-1/2} (\chi_{2n} + \chi_{2n+1}) = 2^{-1/2} (S_{2n} + S_{2n+1}) r_k.$$

Пусть $n = 2^k + \sum_{\nu=1}^k \varepsilon_\nu 2^{k-\nu}$ — двоичное разложение и $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Тогда $2n + \varepsilon = 2^{k+1} + \sum_{\nu=1}^{k+1} \varepsilon_\nu 2^{k+1-\nu}$, если положить $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon$. Отсюда и в силу представления (2.2) получаем

$$S_{2n+\varepsilon} = S_n S(\varepsilon).$$

Подставим это равенство в правую часть последней цепочки равенств, учтем определение оператора U (см. предложение 3), равенство (2.4). Найдем

$$T^{k+1} \chi_n = S_n 2^{-1/2} (S(0) + S(1)) r_k = S_n U r_k = S_n U^{k+1} \chi = S_n r_{k+1}.$$

Равенство (2.10) установлено.

ЛЕММА 5. Пусть функция φ разлагается в ряд

$$\varphi = \chi + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} c_{kj} \chi_{kj}.$$

Для $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\theta_k = \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} |c_{kj}|^2 \right)^{1/2}$$

и предположим, что сходится ряд

$$\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k.$$

Тогда для любой конечной последовательности комплексных чисел $\{a_n\}$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum a_n (\varphi_n - \chi_n) \right\| \leq \theta \left(\sum |a_n|^2 \right)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $f \in L_2^0$ положим

$$\sigma_N(f) = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^{2^k-1} (f, \chi_{kj}) \chi_{kj}$$

— это частная сумма Фурье–Хаара функции f .

Обозначим $\psi = \varphi - \chi$. Учитывая определение (2.1) оператора S_n , имеем

$$\sigma_N \left(\sum a_n (\varphi_n - \chi_n) \right) = \sum a_n \sigma_n S_n \psi.$$

Подставляя сюда разложение

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} c_{kj} \chi_{kj} = \sum c_m \chi_m = \sum c_m S_m \chi, \quad (2.13)$$

находим

$$\sigma_N \left(\sum a_n (\varphi_n - \chi_n) \right) = \sum \sum a_n c_m \sigma_N S_n S_m \chi. \quad (2.14)$$

Из представления (2.2) следует, что $S_n S_m = S_p$ для некоторого p , причем $k(p) = k(n) + k(m)$.

Отсюда и из очевидных соотношений

$$\sigma_N S_p \chi = \begin{cases} S_p \chi, & k(p) \leq N, \\ 0, & k(p) > N, \end{cases}$$

а также из равенства (2.14) получаем

$$\sigma_N \left(\sum a_n (\varphi_n - \chi_n) \right) = \sum_{k(n)+k(m) \leq N} \sum a_n c_m S_n S_m \chi = \sum_{k=1}^N \sum_{k(m)=k} c_m \sum_{k(n)=0}^{N-k} a_n S_n S_m \chi, \quad (2.15)$$

в первой сумме последнего выражения суммирование начинается с $k = 1$, а не с $k = 0$, ввиду того, что $c_m = 0$ при $k = k(m) = 0$ (см. разложение (2.13)).

Зафиксируем k и покажем, что семейство $(S_n S_m \chi)$, $n \in \mathbb{N}$, $k(m) = k$, ортонормировано.

Рассмотрим упорядоченную пару (n, m) , где $k(m) = k$, а в остальном $n, m \in \mathbb{N}$ произвольные.

Пусть

$$n = 2^{k(n)} + \sum_{\nu=1}^{k(n)} \varepsilon_\nu 2^{k(n)-\nu}, \quad m = 2^k + \sum_{\nu=1}^k \zeta_\nu 2^{k-\nu} \quad (2.16)$$

– двоичные разложения.

Положим

$$p = 2^{k+k(n)} + 2^k \sum_{\nu=1}^{k(n)} \varepsilon_\nu 2^{k(n)-\nu} + \sum_{\nu=1}^k \zeta_\nu 2^{k-\nu}. \quad (2.17)$$

Тогда

$$S_n S_m = \prod_{\nu=1}^{k(n)} S(\varepsilon_\nu) \prod_{\nu=1}^k S(\zeta_\nu) = S_p, \quad (2.18)$$

причем $k(p) = k + k(n) \geq k$ (см. представление (2.2)).

Обратно, возьмем $p \in \mathbb{N}$, $k(p) \geq k$ и обозначим $k(n) = k(p) - k$. Нетрудно видеть, что двоичному разложению числа p можно придать вид (2.17). Тогда, определив числа n и m равенствами (2.16), снова получим (2.18).

Таким образом, между упорядоченными парами (n, m) , $n \in \mathbb{N}$, $k(m) = k$, и числами p , $k(p) \geq k$, построено с помощью разложений (2.16) и (2.17) взаимнооднозначное соответствие, которое равенством (2.18) переносится на операторы S_p .

Следовательно, семейства $(S_n S_m \chi)$, $n \in \mathbb{N}$, $k(m) = k$, и $(S_p \chi)$, $k(p) \geq k$, одновременно ортонормированы или нет.

Ортонормированность же второго семейства следует из определения (2.1) операторов S_p и ортонормированности системы Хаара.

Итак, установлена ортонормированность семейства $(S_n, S_m \chi)$, $n \in \mathbb{N}$, $k(m) = k$, для любого k .

Отсюда и из равенства (2.15) находим

$$\begin{aligned} \left\| \sigma_n \left(\sum a_n (\varphi_n - \chi_n) \right) \right\| &\leq \sum_{k=1}^N \left\| \sum_{k(m)=k} c_m \sum_{k(n)=0}^{N-k} a_n S_n S_m \chi \right\| \\ &= \sum_{k=1}^N \left(\sum_{k(m)=k} |c_m|^2 \sum_{k(n)=0}^{N-k} |a_n|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{k=1}^N \left(\sum_{k(m)=k} |c_m|^2 \sum |a_n|^2 \right)^{1/2} \\ &= \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} |c_{kj}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum |a_n|^2 \right)^{1/2} = \sum_{k=1}^N \theta_k \left(\sum |a_n|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Устремляя $N \rightarrow \infty$ и учитывая, что $\|\sigma_N(f)\| \rightarrow \|f\|$, получаем доказываемое неравенство.

3. Доказательство теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Ввиду леммы 1 теореме достаточно будет доказать для случая $\psi = \chi$. В этом случае разложение (1.3) из посылки теоремы примет вид

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2} c_k \sum_{j=0}^{2^k-1} \chi_{kj} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r_k \quad (3.1)$$

(см. обозначения раздела 2).

Необходимость. Пусть система сжатий и сдвигов (φ_n) является базисом Рисса. Покажем, что функция $u(z)$ из формулировки теоремы принадлежит группе $G(H^\infty)$.

Так же, как и в начале доказательства леммы 1, убеждаемся в существовании обратимого оператора A , действующего в пространстве L_2^0 и такого, что $A\chi_n = \varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Такой оператор в силу предложения 2 перестановочен с S_n , а ввиду (3.1) для него выполняется равенство

$$A\chi = \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r_k.$$

Согласно лемме 2

$$A^{-1}\chi = \sum_{k=0}^{\infty} d_k r_k,$$

причем последовательности (d_k) и (c_k) связаны соотношениями

$$d_0 c_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^m d_k c_{m-k} = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Применяя лемму 3 дважды: к оператору A и последовательности (c_k) , затем к оператору A^{-1} и последовательности (d_k) , находим, что функции

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$$

принадлежат H^∞ . Применение леммы 3 к A^{-1} законно в силу перестановочности A^{-1} с S_n , вытекающей из перестановочности A и S_n .

Тогда ввиду соотношений (3.2) получаем $u(z)v(z) \equiv 1$. Таким образом, $u(z) \in G(H^\infty)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть функция $u(z)$ принадлежит $G(H^\infty)$. Требуется доказать, что система сжатий и сдвигов (φ_n) является базисом Рисса.

Так как $u(z) \in G(H^\infty)$, то $1/u = v \in H^\infty$. Пусть T – оператор из леммы 4. Для него существуют сильные операторные пределы

$$u(T) = \lim_{t \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (tT)^k \quad \text{для} \quad u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

и

$$v(T) = \lim_{t \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (tT)^k \quad \text{для} \quad v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k,$$

причем операторы $u(T)$ и $v(T)$ взаимно обратны, т.е.

$$u(T)v(T) = I = v(T)u(T),$$

где I – тождественный оператор в пространстве L_2^0 [4, с. 131].

Используем свойство (2.10) оператора T и определение (2.1) оператора S_n , $n \in \mathbb{N}$. Получаем

$$\begin{aligned} u(T)\chi_n &= \lim_{t \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (tT)^k \chi_n = \lim_{t \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k S_n r_k \\ &= S_n \lim_{t \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k r_k = S_n \sum_{k=0}^{\infty} c_k r_k = S_n \varphi = \varphi_n. \end{aligned}$$

Доказанное равенство $u(T)\chi_n = \varphi_n$ означает, что система (φ_n) , $n \in \mathbb{N}$, является базисом Рисса в L_2^0 . Добавив к системе функцию $\varphi_0 = \chi[0, 1)$, получим базис Рисса в $L_2[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Необходимость. Пусть для любой функции $\varphi \in A(\psi, (b_k))$ система ее сжатий и сдвигов является базисом Рисса. Требуется доказать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k < 1. \quad (3.3)$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi = \psi - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k/2} b_k \sum_{j=0}^{2^k-1} \psi_{kj}.$$

Согласно определению 2 функция φ принадлежит классу $A(\psi, (b_k))$. Значит, система (φ_n) является базисом Рисса. В силу доказанной теоремы 1 функция

$$u(z) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$$

принадлежит $G(H^\infty)$ и, следовательно, удовлетворяет условию

$$0 < \delta = \inf |u(z)|, \quad |z| < 1.$$

Отсюда ввиду неотрицательности коэффициентов b_k и равенства $u(0) = 1$ для $t \in (0, 1)$ получаем неравенство $u(t) \geq \delta$, за ним и следующие неравенства:

$$t^n \sum_{k=1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^n b_k t^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k = 1 - u(t) \leq 1 - \delta.$$

Устремив здесь сначала $t \rightarrow 1$, затем $n \rightarrow \infty$, окончательно получим неравенство (3.3). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнено условие (3.3). Требуется доказать, что для всякой функции $\varphi \in A(\psi, (b_k))$ система (φ_n) является базисом Рисса.

Пусть сначала $\psi = \chi$. Тогда функция φ принадлежит классу $A(\chi, (b_k))$ и разлагается в ряд

$$\varphi = c_0\chi + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} c_{kj}\chi_{kj},$$

коэффициенты которого удовлетворяют соотношениям (1.5). Согласно примечанию 4 к теореме 2 считаем $c_0 = 1$. Тогда в обозначениях леммы 5 на основании соотношений (5.1) и в силу неравенства (3.3) будем иметь

$$\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} |c_{kj}|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k < 1.$$

Применив лемму 5, получим неравенство

$$\left\| \sum a_n(\varphi_n - \chi_n) \right\| \leq \theta \left(\sum |a_n|^2 \right)^{1/2}$$

для любой конечной последовательности комплексных чисел $\{a_n\}$.

Так как в полученном неравенстве $\theta < 1$, то по теореме Пэли–Винера (см. например, [5, с. 225]) система (φ_n) будет базисом, для которого при любой функции $f \in L_2[0, 1]$ выполняются неравенства

$$(1 - \theta)\|f\| \leq \left(\sum |f, \varphi_n|^2 \right)^{1/2} \leq (1 + \theta)\|f\|.$$

Подобные неравенства характеризуют базисы Рисса [6, с. 69].

Достаточность для случая $\psi = \chi$ доказана. Произвольный случай следует из леммы 1 и определения 2.

Автор искренне благодарен В.И. Филиппову за постановку задачи, полезные обсуждения и постоянное внимание в процессе работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Filippov V. I., Oswald P. Representation in L_p by series of translates and dilates of one function // J. Approx. Theory. 1995. V. 82. № 1. P. 15–29.
- [2] Сабурова Т. Н. О базисах в $C[0, 1]$ типа Фабера–Шаудера // Теория функций и приближений. Ч. 3. Тр. 3-й Саратовской зимней школы (Саратов, 1986). Саратов, 1988. С. 44–46.
- [3] Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970.
- [4] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.
- [5] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
- [6] Крейн С. Г. (ред.) Функциональный анализ. Серия “Справочная математическая библиотека”. М.: Наука, 1972.