Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ф. Меньших, О законах сохранения второго порядка для уравнения Борна–Инфельда и других родственных уравнений, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 6, 874–881

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4443>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:00:43

О законах сохранения второго порядка для уравнения Борна–Инфельда и других родственные уравнений

О. Ф. Меньших

Описан класс квазилинейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными в общем случае смешанного типа, для которого построены законы сохранения второго порядка, квадратичные относительно вторых производных. В качестве примеров приведены подобные законы сохранения для уравнения Борна–Инфельда, для уравнения минимальных и максимальных поверхностей в пространстве Минковского и для классического уравнения минимальных поверхностей.

Библиография: 17 названий.

Введение. Данная работа является продолжением статьи [1], в которой рассматривались законы сохранения [2], [3] первого порядка вида

$$\frac{\partial \varphi(U_t, U_x)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(U_t, U_x)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

для уравнения Борна–Инфельда

$$L(U) = (1 + U_x^2)U_{tt} - 2U_x \cdot U_t \cdot U_{xt} + (U_t^2 - 1)U_{xx} = 0 \quad (2)$$

и родственных уравнений вида

$$U_{tt} = 2A_{13}(p, \lambda)U_{tx} + A_{11}(p, \lambda)U_{xx}, \quad p = U_x, \quad \lambda = U_t. \quad (3)$$

Целью данной статьи является построение законов сохранения второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial t}[E(p, \lambda, U_{xx}, U_{xt})] + \frac{\partial [G(p, \lambda), U_{xx}, U_{xt}]}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

для уравнения (2) и более широкого класса родственных уравнений (3). Будем предполагать, что функции E и G являются квадратичными формами по U_{xx} , U_{xt} .

Будем рассматривать класс квазилинейных уравнений (3) в общем случае смешанного типа. Предполагаем, что коэффициенты уравнения (3) являются достаточно гладкими функциями переменных p , λ в некоторой области $D(p, \lambda)$, в которой

$$\frac{\partial(A_{11}, A_{13})}{\partial(p, \lambda)} \neq 0. \quad (5)$$

Введем необходимые для дальнейшего изложения определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1], [4]. Квазилинейные уравнения с частными производными (3), решения которых рассматриваются в гиперболической области

$$A_{13}^2 + A_{11} > 0, \quad (6)$$

а коэффициенты удовлетворяют условиям (5) и дополнительным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{11}}{\partial p} &= -2A_{11} \frac{\partial A_{13}}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial A_{11}}{\partial \lambda} &= -\left(2 \frac{\partial A_{13}}{\partial p} + 4A_{13} \frac{\partial A_{13}}{\partial \lambda}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

будем называть *A-гиперболическими уравнениями*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [5]. Квазилинейные уравнения с частными производными (3), решения которых рассматриваются в эллиптической области

$$A_{13}^2 + A_{11} < 0, \quad (8)$$

а коэффициенты удовлетворяют условию (5) и тем же условиям (7), будем называть *A-эллиптическими уравнениями*.

Введенные классы уравнений приводятся к специальным каноническим системам [5], [6]. Здесь только отметим, что любое *A-гиперболическое* уравнение приводится к слаболинейной [7] системе квазилинейных уравнений первого порядка, записанной в инвариантах Римана [1], [4]

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} + r_2 \frac{\partial r_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r_2}{\partial t} + r_1 \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

где

$$r_1 = -A_{13} - \sqrt{A_{13}^2 + A_{11}}, \quad r_2 = -A_{13} + \sqrt{A_{13}^2 + A_{11}}.$$

В частности, для уравнения Борна–Инфельда инварианты Римана имеют вид [1], [4]:

$$r_1 = -\left(\frac{p\lambda + \sqrt{1 + p^2 - \lambda^2}}{1 + p^2}\right), \quad r_2 = \frac{-p\lambda + \sqrt{1 + p^2 - \lambda^2}}{1 + p^2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В дальнейшем для сокращения записи будем называть класс *A-гиперболических* и класс *A-эллиптических* уравнений сокращенно *A-уравнениями*.

1. Формулировка основного результата. Сформулируем теперь основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА 1. Все *A-уравнения* (3), коэффициенты которых удовлетворяют условиям (5), (7) и дополнительному условию

$$\frac{\partial^2 A_{13}}{\partial \lambda^2} = 0, \quad (10)$$

допускают следующий закон сохранения второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial t} [S(p, \lambda)((U_{xt})^2 + A_{11} \cdot (U_{xx})^2)] - \frac{\partial}{\partial x} [2S(p, \lambda)(A_{11} \cdot U_{xx} \cdot U_{xt} + A_{13} \cdot (U_{xt})^2)] = 0, \quad (11)$$

где функция $S(p, \lambda)$ определяется формулой

$$S(p, \lambda) = \frac{1}{A_{11}} \exp \left[-4 \int K_1(p) dp \right], \quad (12)$$

а функция $K_1(p, \lambda)$ связана с представлением коэффициента A_{13} :

$$A_{13}(p, \lambda) = K_1(p)\lambda + K_2(p). \quad (13)$$

2. Доказательство основного результата. Предварительно выведем формулы, определяющие коэффициенты $A_{13}(p, \lambda)$ для всех A -уравнений при дополнительном условии (10).

Для этого записываем условие совместности для системы уравнений (7) с учетом исследуемого класса уравнений (3). После вычислений при учете условия (10) получим следующее уравнение относительно коэффициента A_{13} :

$$\frac{\partial^2 A_{13}}{\partial p^2} + 2A_{13} \frac{\partial^2 A_{13}}{\partial p \partial \lambda} + 4 \frac{\partial^2 A_{13}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial^2 A_{13}}{\partial p} + 4A_{13} \left(\frac{\partial A_{13}}{\partial \lambda} \right)^2 = 0. \quad (14)$$

Подставим теперь в (14) формулу (13): после “расщепления” полученного уравнения по переменной λ получим следующую систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $K_1(p)$, $K_2(p)$:

$$K_1'' + 6K_1 \cdot K_1' + 4K_1^3 = 0, \quad (15)$$

$$K_2'' + 4K_1 \cdot K_2' + (4K_1^2 + 2K_1')K_2 = 0, \quad (16)$$

$$K_i' = \frac{dK_i}{dp}, \quad i = 1, 2.$$

Уравнение (15) является частным случаем известного уравнения Лъенарда [8; с. 232]

$$y'' + f(y)y' + g(y) = 0,$$

где $f(y)$, $g(y)$ – функции из достаточно широкого класса непрерывных функций, и может быть проинтегрировано приведением к уравнению Абеля.

Кроме того, уравнение (15) может быть с помощью специальных подстановок преобразовано к линейному уравнению второго порядка [9; с. 278]. Полное интегрирование системы (15), (16) приведено в работе [10; с. 59] в связи с решением несколько другой задачи. Приведем здесь только необходимое для дальнейшего изложения решение уравнения (15). Это уравнение имеет общее решение

$$K_1(p) = \frac{p + C_1}{(p + C_1)^2 + C_2} \quad (17)$$

и решение, которое не получается из общего решения

$$K_1(p) = \frac{1}{2(p + C_1)},$$

C_1 , C_2 – две произвольные постоянные.

Теперь переходим к выводу формулы (12). Выполним дифференцирование в законе сохранения (11). После вычислений с учетом уравнения (3) получим следующее выражение:

$$l_1 \cdot U_{xxx} + l_2 \cdot U_{xxt} + l_3(U_{xx})^3 + l_4(U_{xt})^3 + l_5(U_{xx})^2 \cdot U_{xt} + l_6(U_{xt})^2 \cdot U_{xx} = 0. \quad (18)$$

Здесь $l_i = l_i(U_{xt}, U_{xx}, p, \lambda)$, $i = 1, 2$, тождественно обращаются в нуль. Остальные коэффициенты будут следующими:

$$\begin{aligned} l_3 &= (A_{11})^2 \frac{\partial S}{\partial \lambda} + A_{11} \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial \lambda} \right) S, \\ l_4 &= \frac{\partial S}{\partial p} + 2 \frac{\partial A_{13}}{\partial \lambda} S, \\ l_5 &= 2A_{11} \cdot A_{13} \frac{\partial S}{\partial \lambda} - A_{11} \frac{\partial S}{\partial p} + S \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial p} + 2A_{13} \frac{\partial A_{11}}{\partial \lambda} \right), \\ l_6 &= -A_{11} \frac{\partial S}{\partial \lambda} - 2A_{13} \frac{\partial S}{\partial p} + 2S \frac{\partial A_{13}}{\partial p}. \end{aligned} \quad (19)$$

Поскольку l_k , $k = 3, \dots, 6$, зависят только от p , λ , для удовлетворения уравнения (18) необходимо положить $l_k = 0$, $k = 3, \dots, 6$. Тогда из первых двух уравнений (19) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial p} &= -2 \frac{\partial A_{13}}{\partial \lambda} S, \\ \frac{\partial S}{\partial \lambda} &= -\frac{1}{A_{11}} \cdot \frac{\partial A_{11}}{\partial \lambda} S, \quad A_{11} \neq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Остальные уравнения $l_j = 0$, $j = 3, 4$, являются следствием системы (20) при учете (7).

Интегрируя систему (20) с учетом (13), получим формулу (12).

3. Примеры.

ПРИМЕР 1. Уравнение Борна–Инфельда (2). Для этого уравнения будем иметь

$$A_{11} = \frac{1 - \lambda^2}{1 + p^2}, \quad A_{13} = \frac{p}{1 + p^2} \lambda.$$

С учетом (13) получим

$$K_1(p) = \frac{p}{1 + p^2}, \quad K_2(p) = 0. \quad (21)$$

Интегрируя систему (20), получим

$$S = \frac{1}{(1 - \lambda^2)(1 + p^2)}, \quad \lambda \neq 1.$$

Закон сохранения будет следующий:

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\partial G_1}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(U_{xt})^2}{(1 - U_t^2)(1 + U_x^2)} + \frac{(U_{xx})^2}{(1 + U_x^2)} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2}{1 + U_x^2} \cdot U_{xx} \cdot U_{xt} + \frac{2U_x \cdot U_t}{(1 - U_t^2)(1 + U_x^2)} (U_{xt})^2 \right] = 0. \quad (22)$$

Если на решениях уравнения Борна-Инфельда (2) выполняется условие

$$|U_t| < 1, \quad (23)$$

то функция E_1 в (22) будет положительной (плотность закона сохранения).

ПРИМЕР 2. Рассмотрим уравнение минимальных и максимальных поверхностей в пространстве Минковского [11; с. 5–21]

$$((U_x)^2 - 1)U_{tt} - 2U_x \cdot U_t \cdot U_{xt} + ((U_t)^2 - 1)U_{xx} = 0. \quad (24)$$

Это уравнение в соответствии с (6) и (8) будет принадлежать к гиперболическому типу в области

$$(U_t)^2 + (U_x)^2 > 1,$$

а в области

$$(U_t)^2 + (U_x)^2 < 1$$

будет принадлежать к эллиптическому типу. Предполагая, что на решениях уравнения (23) $|U_x| \neq 1$, $|U_t| \neq 1$, можно получить

$$K_1(p) = \frac{p}{p^2 - 1}, \quad K_2(p) = 0, \quad S(p, \lambda) = \frac{1}{(1 - p^2)(\lambda^2 - 1)}. \quad (25)$$

Закон сохранения (11) для уравнения (24) будет таким:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{(1 - (U_x)^2)((U_t)^2 - 1)} (U_{xt})^2 + \frac{1}{(1 - (U_x)^2)^2} (U_{xx})^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2U_x \cdot U_t}{(1 - (U_x)^2)((U_t)^2 - 1)} (U_{xt})^2 - \frac{2}{(1 - (U_x)^2)^2} U_{xx} \cdot U_{xt} \right] = 0. \quad (26)$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим уравнение, описывающее потенциал скоростей в случае одномерного нестационарного движения газа Чаплыгина [4]

$$U_{tt} + 2U_x \cdot U_{xt} - (1 + 2U_t)U_{xx} = 0. \quad (27)$$

В этом примере $A_{13} = -p$, поэтому

$$K_1(p) = 0, \quad K_2(p) = -p, \quad S = \frac{\lambda}{1 + 2\lambda}. \quad (28)$$

Закон сохранения (11) здесь будет таким:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(U_{xt})^2}{1 + 2U_t} + (U_{xx})^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2U_x}{1 + 2U_t} (U_{xt})^2 - 2U_{xx} \cdot U_{xt} \right] = 0. \quad (29)$$

ПРИМЕР 4. В качестве примера A -эллиптического уравнения найдем закон сохранения (11) для классического уравнения минимальных поверхностей [12], которое запишем в стандартной форме в переменных x, y :

$$(1 + U_y^2)U_{xx} - 2U_x \cdot U_y \cdot U_{xy} + (1 + U_x^2)U_{yy} = 0. \quad (30)$$

Чтобы воспользоваться формулой (11), положим

$$t = x, \quad x = y, \quad U_y = 0.$$

Тогда

$$K_1 = \frac{U_y}{1 + U_y^2} = \frac{p}{1 + p^2}, \quad K_2 = 0. \quad (31)$$

Получим

$$S = \frac{1}{(1 + U_x^2)(1 + U_y^2)}.$$

Закон сохранения (11) для уравнения (30) будет следующим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{(1 + U_x^2)(1 + U_y^2)} (U_{xy})^2 - \frac{(U_{xx})^2}{(1 + U_x^2)^2} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2U_{xx} \cdot U_{xy}}{(1 + U_x^2)^2} - \frac{2U_x \cdot U_y}{(1 + U_x^2)(1 + U_y^2)} (U_{xy})^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Уравнения (2), (27) при условиях

$$|U_x| \leq 1, \quad |U_t| \leq 1$$

совпадают с одномерным волновым уравнением

$$U_{tt} - U_{xx} = 0. \quad (33)$$

Соответственно, законы сохранения (22) и (29) при этих условиях будут совпадать с законом сохранения второго порядка для волнового уравнения (33)

$$\frac{\partial}{\partial t} [(U_{xt})^2 + (U_{xx})^2] - \frac{\partial}{\partial x} [2U_{xx} \cdot U_{xt}] = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Уравнения (24), (30) при условиях $|U_x| \leq 1, |U_y| \leq 1$ (в (24) следует положить $t = x, x = y$) будут совпадать с уравнением Лапласа

$$U_{xx} + U_{yy} = 0. \quad (34)$$

Законы сохранения (26) и (32) при этом будут совпадать с законом сохранения второго порядка для уравнения Лапласа (34)

$$\frac{\partial}{\partial x} [(U_{yy})^2 - (U_{xy})^2] - \frac{\partial}{\partial y} [2U_{yy} \cdot U_{xy}] = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Нетрудно проверить, что во всех примерах функции $K_i(p)$, $i = 1, 2$, определяемые формулами (21), (25), (28), (31) удовлетворяют системе (15), (16). В примере 3 $K_1(p) = 0$ получается из (17) при $C_2 \rightarrow \infty$.

4. Заключительные замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если какое-либо уравнение с частными производными или система таких уравнений допускает законы сохранения, то, как правило, это связано с наличием у данного уравнения (или системы) определенных симметрий: классических, т.е. точечных [13], или обобщенных [2], [3]. В связи с этим обстоятельством полученные в данной статье законы сохранения второго порядка, по-видимому, связаны с некоторыми симметриями системы (9) и соответствующей системы в эллиптической области [10]. Однако работы на эту тему автору не известны.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Закон сохранения (11) связан с нахождением одной функции $S = S(U_x, U_t)$. Обобщение этого закона в случае квазилинейных уравнений второго порядка со многими независимыми переменными (например, для многомерного уравнения Борна–Инфельда [14]) связано с преодолением больших вычислительных трудностей, так как возникает задача об исследовании на совместность перепределенной системы уравнений относительно нескольких функций $S_1, S_2, \dots, S_k$, зависящих от первых производных функции U .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Отметим, наконец, следующий интересный факт. Условие (23) означает, что на таких решениях уравнение Борна–Инфельда будет t -гиперболическим по Петровскому [15], а задача Коши для уравнения Борна–Инфельда, впервые исследованная в работе [16], будет иметь классическое решение в целом в произвольном характеристическом треугольнике [17].

Выражаю сердечную благодарность С. И. Похожаеву, который поставил задачу о нахождении законов сохранения второго порядка для уравнения Борна–Инфельда.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. Ф. Меньших, “О законах сохранения и преобразованиях Беклунда, связанных с уравнением Борна–Инфельда”, *Матем. заметки*, **77**:4 (2005), 551–565.
- [2] Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983.
- [3] П. Олвер, *Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [4] О. Ф. Меньших, “О взаимодействии финитных уединенных волн для уравнений типа Борна–Инфельда”, *ТМФ*, **79**:1 (1989), 16–29.
- [5] О. Ф. Меньших, “Об одном обобщении формул Вейерштрасса в теории минимальных поверхностей”, *Арифметика и геометрия многообразий*, Самарский гос. ун-т, Самара, 1992, 93–100.
- [6] О. Ф. Меньших, “О задаче Коши и краевых задачах для одного класса систем квазилинейных гиперболических уравнений”, *Докл. АН СССР*, **314**:1 (1990), 105–110.
- [7] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Наука, М., 1978.
- [8] В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Физматлит, М., 2001.
- [9] Л. М. Беркович, *Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения*, РХД, М., 2002.
- [10] О. Ф. Меньших, *Об одном обобщении уравнения Борна–Инфельда*, деп. в ВИНТИ 7920-B86.
- [11] В. М. Миклюков, “Геометрический анализ поверхностей нулевой средней кривизны”, *Геометрический анализ и его приложения*, Волгоградск. гос. ун-т, Волгоград, 1999, 5–21.

- [12] Дао Чонг Тхи, А. Т. Фоменко, *Минимальные поверхности и проблема Плато*, Наука, М., 1987.
- [13] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [14] Б. М. Барбашов, Н. А. Черников, “Решение задачи о рассеянии двух плоских волн в нелинейной скалярной теории поля типа Борна–Инфельда”, *ЖЭТФ*, **51**:8 (1966), 658–668.
- [15] О. Ф. Меньших, *О классификации квазилинейных уравнений второго порядка*, деп. в ВИНТИ 1081-B2005.
- [16] Б. М. Барбашов, Н. А. Черников, “Решение и квантование нелинейной двумерной модели типа Борна–Инфельда”, *ЖЭТФ*, **50**:5 (1966), 1296–1308.
- [17] О. Ф. Меньших, “О взаимодействии уединенных волн для системы уравнений Борна–Инфельда”, *ТМФ*, **84**:2 (1990), 181–194.

О. Ф. Меньших

Самарский государственный аэрокосмический университет
им. С. П. Королева (СГАУ)
E-mail: oleg_menshin@mail.ru

Поступило
06.12.2005