Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Туманов, А. А. Шкаликов, О локализации спектра задачи Орра–Зоммерфельда для больших чисел Рейнольдса, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 4, 561–569

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm445>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 11:54:02

О ЛОКАЛИЗАЦИИ СПЕКТРА ЗАДАЧИ ОРРА–ЗОММЕРФЕЛЬДА ДЛЯ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА

С. Н. Туманов, А. А. Шкаликов

Вместе с задачей Орра–Зоммерфельда в работе изучается модельная задача

$$-i\varepsilon^2 y'' - q(x)y = -\lambda y, \quad y(-1) = y(1) = 0.$$

Профилям Куэтта и Пуазейля отвечают функции $q(x) = x$ и $q(x) = x^2$ соответственно. Большим значениям чисел Рейнольдса отвечают малые значения параметра ε . При стремлении ε к нулю спектр модельной задачи локализуется вблизи некоторых критических кривых в комплексной плоскости, явный вид которых можно указать. Более того, имеются асимптотические формулы распределения собственных значений вдоль этих кривых при $\varepsilon \rightarrow 0$. Основной результат работы состоит в следующем: спектр задачи Орра–Зоммерфельда, когда число Рейнольдса стремится к бесконечности, для течений Куэтта и Пуазейля локализуется к тем же критическим кривым, что и в модельной задаче. Более того, главные члены асимптотических формул распределения собственных значений на предельных кривых сохраняются.

Библиография: 14 названий.

В гидромеханике хорошо известна следующая спектральная задача, называемая *задачей Орра–Зоммерфельда*:

$$\{(D^2 - \alpha^2)^2 - i\alpha R[q(x)(D^2 - \alpha^2) - q''(x)]\}y = -\lambda(D^2 - \alpha^2)y, \quad (1)$$

$$y(-1) = y'(-1) = y(1) = y'(1) = 0. \quad (2)$$

Здесь $D = d/dx$, α – волновое число, R – число Рейнольдса, характеризующее вязкость жидкости, а $q(x)$ – профиль скорости течения жидкости в канале $|x| < 1$. Эта задача получается после линеаризации уравнений Навье–Стокса для плоско-параллельных течений между двумя фиксированными стенками. Более полную информацию об этой задаче читатель может найти, например, в монографиях Драйзина и Рида [1], Дикого [2], обзоре Редди, Хеннингсона и Шмидта [3].

Хорошо известно, что спектр задачи Орра–Зоммерфельда на конечном интервале дискретен. Цель настоящей заметки – выяснить характер поведения собственных значений этой задачи при больших числах Рейнольдса R (что соответствует малой вязкости жидкости).

В литературе наиболее часто изучались два стационарных профиля скорости, именно $q(x) = x$ и $q(x) = x^2$. Первый называется *профилем Куэтта*, второй – *профилем Пуазейля* (во втором случае часто пишут $q(x) = 1 - x^2$, а не $q(x) = x^2$, но это не меняет существа дела: спектр задачи для $q(x) = x^2$ получается симметричным отражением относительно прямой $\operatorname{Re} \lambda = 1/2$ спектра для $q(x) = 1 - x^2$). В этой заметке мы также ограничимся рассмотрением этих двух классических случаев.

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим соответствующую ей модельную задачу:

$$-i\varepsilon^2 y'' - q(x)y = -\lambda y, \quad \varepsilon = (\alpha R)^{-1/2}, \quad (3)$$

$$y(-1) = y(1) = 0. \quad (4)$$

До недавнего времени анализ поведения собственных значений как модельной задачи (3), (4), так и оригинальной задачи (1), (2) проводился с помощью компьютерных вычислений (см., например, [1], [3]–[5]). В этой заметке мы также приводим рисунки, на которых изображены собственные значения для обеих задач. Соответствующие расчеты были получены с помощью программы, реализованной Нейманом-заде и Шкаликовым [6]. Программа рассчитывает собственные значения методом Галёркина, но выбор базиса для задачи (1), (2) проводится особым образом (не в пространстве $L_2(-1, 1)$, а в пространстве Соболева $H_{2,U}^2(-1, 1)$, где индекс U указывает, что функции этого пространства подчинены краевым условиям (2)).

Рис. 1. Спектр модельной задачи (слева) и задачи Орра–Зоммерфельда (справа) для профиля Куэтта, $R = 3000$, $\alpha = 1$

Аналитическое объяснение поведения собственных значений модельной задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$ было дано в работах Шкаликова [7], Дьяченко и Шкаликова [8] (случай $q(x) = x$), Туманова и Шкаликова [9] (случай $q(x) = x^2$). В этих работах были выписаны асимптотические по ε формулы распределения собственных значений вдоль критических кривых, изображенных на рисунках. В настоящей заметке мы покажем, что *предельные спектральные кривые для задачи (1), (2) остаются такими же, как и в модельной задаче, и асимптотические формулы сохраняются*.

В этой связи отметим важную работу Моравец [10], где показано, что при $q(x) = x$ собственные значения задачи Орра–Зоммерфельда могут локализоваться только вблизи отрезков $[-1, -i/\sqrt{3}]$, $[-i/\sqrt{3}, 1]$, $[-i/\sqrt{3}, -i\infty]$, хотя в [10] подчеркивается, что не

Рис. 2. Спектр модельной задачи (слева) и задачи Орра–Зоммерфельда (справа) для профиля Пуазейля, $R = 5000$, $\alpha = 1$. Собственные значения первой задачи, лежащие вблизи предельной кривой, проходящей через точку 1, имеют (асимптотически) кратность 2

удается получить информацию о собственных значениях в малых окрестностях первых двух отрезков. Для $q(x) = x^2$ предположения работы [10] не реализуются.

В наших доказательствах мы существенно используем идеи из монографии Дикого [2], которые, в свою очередь, опираются на методы, развитые Гейзенбергом, Вазовым, Лином, Моравец и др. (см. библиографию в [1]).

Приведенные здесь портреты локализации собственных значений модельной и реальной задач показывают, что для модельной задачи концентрация собственных значений вдоль предельных кривых ярко выражена, но это не так для исходной задачи Орра–Зоммерфельда. Концентрация вдоль верхних “усов” происходит существенно медленнее (из рисунков ее трудно обнаружить), при этом может возникать явление интерференции: раздвоение предельной кривой на две, которые постепенно сливаются в одну.

Для формулировки результатов нам потребуется понятие функции распределения нулей голоморфных функций вдоль кривой. Пусть $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, – ориентированная гладкая кривая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с начальной точкой z_0 и конечной z_1 (допускается, что z_0 или z_1 могут принимать значение ∞). Для точек $\lambda_1, \lambda_2 \in \gamma$ имеется соотношение порядка $\lambda_1 \prec \lambda_2$, если $\lambda_j = \gamma(t_j)$, $j = 1, 2$, и $t_1 < t_2$. Через $\Pi_\delta(\gamma; \lambda_1, \lambda_2)$ будем обозначать криволинейную полосу ширины 2δ , для которой γ является средней линией, а боковыми сторонами служат перпендикулярные к γ отрезки, проходящие через λ_1 и λ_2 . Пусть функция $F(z)$ голоморфна в $\Pi_\delta(\gamma; z_0, z_1)$. Фиксируем точку $\lambda_1 \in \gamma$ и обозначим через $n(\lambda, \lambda_1)$ число нулей функции $F(z)$ в $\Pi_\delta(\gamma; \lambda, \lambda_1)$, если $\lambda \prec \lambda_1$. При $\lambda_1 \prec \lambda$ полагаем $n(\lambda, \lambda_1) = -n(\lambda_1, \lambda)$. Функцию $N(\lambda) = n(\lambda, \lambda_1) + C$, где C – произвольная постоянная, назовем *функцией распределения нулей $F(z)$ в δ -окрестности кривой γ (или вдоль кривой γ)*. При таком определении выбор точки λ_1 не имеет значения. Так как собственные значения изучаемых нами спектральных задач являются нулями характеристических определителей, голоморфно зависящих от λ , то в этом же контексте можно говорить о функциях распределений собственных значений вдоль кривых.

Теперь сформулируем основные результаты заметки (первая теорема в менее полной форме была ранее анонсирована Шкаликовым [11]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q(x) = x$ (случай течения Куэтта). Считаем, что волновое число $\alpha > 0$ фиксировано. Пусть γ_+ и γ_- — отрезки, соединяющие точку $-i/\sqrt{3}$ с точками 1 и -1 соответственно, а γ_∞ — луч отрицательной мнимой оси, выходящий из $-i/\sqrt{3}$. Положим

$$\Gamma = \gamma_+ \cup \gamma_- \cup \gamma_\infty.$$

Тогда для любого $\delta > 0$ найдется число $R_0 = R_0(\delta)$ такое, что при $R > R_0$ весь спектр задачи Орра–Зоммерфельда (1), (2) лежит внутри δ -окрестности множества Γ . При этом функции распределения собственных значений вдоль отрезков γ_+ , γ_- и луча γ_∞ при $R \rightarrow \infty$ имеют следующую асимптотику:

$$N_\pm(\lambda, R) = \pm \frac{(\alpha R)^{1/2}}{\pi} \int_\lambda^{\pm 1} e^{-i\pi/4} \sqrt{\xi - \lambda} d\xi (1 + o(1)), \quad \lambda \in \gamma_\pm,$$

$$N_\infty(\lambda, R) = \frac{(\alpha R)^{1/2}}{\pi} \int_{-1}^1 e^{-i\pi/4} \sqrt{\xi - \lambda} d\xi (1 + o(1)), \quad \lambda \in \gamma_\infty.$$

В этих формулах величина $o(1)$ стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$ равномерно по λ , если λ принадлежит отрезкам, компактно вложенным в γ_+ , γ_- и γ_∞ соответственно, т.е. если λ находится вне некоторых фиксированных окрестностей точек ± 1 , $-i/\sqrt{3}$ и ∞ .

Аналогичный результат справедлив и для течения Пуазейля. Конечно, предельные спектральные кривые в этом случае будут другими. Туманов и Шкаликов [9], [12] показали, что спектр модельной задачи (3), (4) для случая $q(x) = x^2$ концентрируется при $\varepsilon \rightarrow 0$ вблизи кривых γ_0 , γ_1 , γ_∞ , которые определяются следующим образом:

$$\gamma_\infty = \left\{ \lambda \in \Pi : 0 < \arg \lambda \leq -\frac{\pi}{4}, 0 < \operatorname{Re} \lambda < 1, \operatorname{Re} \int_{-1}^1 e^{i\pi/4} \sqrt{q(\zeta) - \lambda} d\zeta = 0 \right\},$$

$$\gamma_1 = \left\{ \lambda \in \Pi : -\frac{\pi}{4} \leq \arg \lambda < 0, 0 < \operatorname{Re} \lambda < 1, \operatorname{Re} \int_{\sqrt{\lambda}}^1 e^{i\pi/4} \sqrt{q(\zeta) - \lambda} d\zeta = 0 \right\},$$

$$\gamma_0 = [0, \lambda_0], \quad \arg \lambda_0 = -\frac{\pi}{4}, \quad \lambda_0 \in \gamma_\infty \cap \gamma_1.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $q(x) = x^2$ (случай течения Пуазейля), а волновое число $\alpha > 0$ фиксировано. Пусть γ_0 , γ_1 , γ_∞ — определенные выше предельные спектральные кривые для соответствующей модельной задачи с $q(x) = x^2$. Тогда для любого $\delta > 0$ найдется число $R_0 = R_0(\delta)$ такое, что при $R > R_0$ весь спектр задачи (1), (2) лежит внутри δ -окрестности множества

$$\Gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_\infty.$$

При этом функции распределения собственных значений вдоль кривых γ_0 , γ_1 , γ_∞ имеют следующую асимптотику:

$$N_0(\lambda, R) = \frac{(\alpha R)^{1/2}}{2} \lambda (1 + o(1)), \quad \lambda \in \gamma_0,$$

$$N_1(\lambda, R) = \frac{(\alpha R)^{1/2}}{\pi} \int_{\sqrt{\lambda}}^1 e^{-i\pi/4} \sqrt{\xi^2 - \lambda} d\xi (1 + o(1)), \quad \lambda \in \gamma_1,$$

$$N_\infty(\lambda, R) = \frac{(\alpha R)^{1/2}}{\pi} \int_{-1}^1 e^{-i\pi/4} \sqrt{\xi^2 - \lambda} d\xi (1 + o(1)), \quad \lambda \in \gamma_\infty.$$

Здесь $o(1) \rightarrow 0$ равномерно при $R \rightarrow \infty$, если λ принадлежит отрезкам, компактно вложенным в $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$.

В дальнейшем при доказательстве сформулированных теорем мы будем оперировать произвольной вещественной голоморфной функцией, переходя к конкретным функциям лишь там, где это необходимо.

Положим

$$S(z_0, z) = \int_{z_0}^z \sqrt{i(q(\zeta) - \lambda)} d\zeta.$$

Если z_0 – корень уравнения $q(z) - \lambda = 0$ (точка поворота), то линии $\operatorname{Re} S(z_0, z) = 0$ в z -плоскости называются *линиями Стокса*. С основными понятиями теории графов Стокса можно познакомиться в монографии Федорюка [13].

Следуя [2], сделаем замену переменных

$$\psi = w'' - \alpha^2 w, \quad \xi = w', \quad \eta = \varepsilon \psi', \quad w = y.$$

Введем вектор

$$\vec{\zeta} = (\xi, w, \eta, \psi)$$

и матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -iq'' & 0 & \alpha^2 \varepsilon^2 + i(q - \lambda) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\varepsilon \vec{\zeta}' = P \vec{\zeta}. \quad (5)$$

Сделаем еще одну замену

$$\vec{\zeta} = T \vec{\theta},$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ r & -r & 0 & 0 \\ 1 & 1 & t & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{r'}{4r} & -\frac{r'}{4r} & t' & t \\ \frac{r'}{4r^2} & \frac{r'}{4r^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \frac{7r'}{4r^3} & \frac{7r'}{4r^3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r^2} & \frac{1}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t}{r^2} & \frac{t}{r^2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $r = \sqrt{i(q(z) - \lambda)}$, $t = iq''/r^2$. Тогда получим

$$\vec{\theta}' = (T^{-1}PT - \varepsilon T^{-1}T')\vec{\theta}. \quad (6)$$

В [2] доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть в комплексной z -плоскости имеется дуга γ с начальной точкой z_0 , вдоль которой величина $\operatorname{Re} S(z_0, z)$ монотонна. Положим

$$\chi_1 = C_1 (i(q(z) - \lambda))^{-1/4} e^{S(z_0, z)/\varepsilon},$$

$$\chi_2 = C_2 (i(q(z) - \lambda))^{-1/4} e^{-S(z_0, z)/\varepsilon},$$

где z_0 – произвольная фиксированная точка. Пусть (θ_1^3, θ_1^4) , (θ_2^3, θ_2^4) – пара независимых решений системы

$$\begin{aligned}\frac{d\theta^3}{dz} &= \theta^4, \\ \frac{d\theta^4}{dz} &= \left(\alpha^2 + \frac{q''}{q - \lambda} \right) \theta^3.\end{aligned}$$

Тогда уравнение (6) имеет четыре линейно независимых решения, которые на γ имеют следующие асимптотические представления:

$$\begin{aligned}\vec{\theta}_1 &= \chi_1 \begin{pmatrix} 1 + O(\varepsilon) \\ O(\varepsilon) \\ O(\varepsilon^2) \\ O(\varepsilon^2) \end{pmatrix}, & \vec{\theta}_2 &= \chi_2 \begin{pmatrix} O(\varepsilon) \\ 1 + O(\varepsilon) \\ O(\varepsilon^2) \\ O(\varepsilon^2) \end{pmatrix}, \\ \vec{\theta}_3 &= \begin{pmatrix} O(\varepsilon) \\ O(\varepsilon) \\ \theta_1^3 + O(\varepsilon^2) \\ \theta_1^4 + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix}, & \vec{\theta}_4 &= \begin{pmatrix} O(\varepsilon) \\ O(\varepsilon) \\ \theta_2^3 + O(\varepsilon^2) \\ \theta_2^4 + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

где $\varepsilon = (\alpha R)^{-1/2}$.

Из доказательства леммы 1, приведенного в [2], непосредственно следует, что сформулированное утверждение можно усилить следующим образом.

ЛЕММА 2. Пусть пара точек z_1 и z_2 в комплексной z -плоскости и компакт Λ в комплексной λ -плоскости таковы, что

- 1) для всякого $\lambda \in \Lambda$ существует путь γ_λ , соединяющий точки z_1 и z_2 , вдоль которого функция $\operatorname{Re} S(z_1, z)$ монотонна;
- 2) длины путей γ_λ равномерно ограничены по $\lambda \in \Lambda$;
- 3) величина $1/(q(z) - \lambda)$ равномерно ограничена при $\lambda \in \Lambda$, $z \in \gamma_\lambda$.

Тогда асимптотические представления решений справедливы равномерно по $\lambda \in \Lambda$, $z \in \gamma_\lambda$.

Из лемм 1, 2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть дуга γ удовлетворяет условию леммы 1. Тогда система (5) имеет четыре линейно независимых решения, первые две компоненты которых имеют следующие асимптотические представления:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ w_1 \end{pmatrix} &= \chi_1 \frac{\varepsilon}{r} \begin{pmatrix} 1 + O(\varepsilon) \\ O(\varepsilon) \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \xi_2 \\ w_2 \end{pmatrix} &= -\chi_2 \frac{\varepsilon}{r} \begin{pmatrix} 1 + O(\varepsilon) \\ O(\varepsilon) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \xi_3 \\ w_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \theta_1^4 + O(\varepsilon^2) \\ \theta_1^3 + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \xi_4 \\ w_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \theta_2^4 + O(\varepsilon^2) \\ \theta_2^3 + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Если компакт $\Lambda \in \mathbb{C}$ и контуры γ_λ удовлетворяют условиям леммы 2, то асимптотические соотношения равномерны по $\lambda \in \Lambda$, $z \in \gamma_\lambda$.

Запишем характеристический определитель задачи (1), (2)

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \xi_1(-1) & \xi_2(-1) & \xi_3(-1) & \xi_4(-1) \\ \xi_1(1) & \xi_2(1) & \xi_3(1) & \xi_4(1) \\ w_1(-1) & w_2(-1) & w_3(-1) & w_4(-1) \\ w_1(1) & w_2(1) & w_3(1) & w_4(1) \end{vmatrix}.$$

ЛЕММА 4. Пусть точки $z_1 = -1$, $z_2 = 1$ и компакт $\Lambda \in \mathbb{C}$ таков, что выполнены условия леммы 2. Тогда равномерно по $\lambda \in \Lambda$ справедливо следующее соотношение на характеристический определитель:

$$\Delta(\lambda) = \varepsilon^2 \left((1 - e^{-2S(-1,1)/\varepsilon}) \left| \begin{array}{cc} \theta_1^3(-1) & \theta_2^3(-1) \\ \theta_1^3(1) & \theta_2^3(1) \end{array} \right| + O(\varepsilon) \right). \quad (7)$$

Здесь выбор ветви функции S сделан так, что $\operatorname{Re} S(-1, 1) > 0$, а интеграл $S(-1, 1)$ берется вдоль пути γ_λ , на котором функция $\operatorname{Re} S(-1, z)$ монотонна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее для сокращения записи при $a = 0, 1$ будем использовать обозначения: $[a] = a + O(\varepsilon)$, $\{a\} = a + O(\varepsilon^2)$. Кроме того, положим $p(z) := 1/r(z) = 1/\sqrt{i(q(z) - \bar{\lambda})}$.

Так как точки -1 и 1 мы можем соединить кривой, удовлетворяющей лемме 2, то можно воспользоваться асимптотическими представлениями для элементов характеристического определителя (см. лемму 3):

$$\Delta(\lambda) = \varepsilon^2 \left| \begin{array}{cc} \chi_1(-1)p(-1)[1] & -\chi_2(-1)p(-1)[1] & \theta_1^4(-1) + \{0\} & \theta_2^4(-1) + \{0\} \\ \chi_1(1)p(1)[1] & -\chi_2(1)p(1)[1] & \theta_1^4(1) + \{0\} & \theta_2^4(1) + \{0\} \\ \chi_1(-1)p(-1)[0] & -\chi_2(-1)p(-1)[0] & \theta_1^3(-1) + \{0\} & \theta_2^3(-1) + \{0\} \\ \chi_1(1)p(1)[0] & -\chi_2(1)p(1)[0] & \theta_1^3(1) + \{0\} & \theta_2^3(1) + \{0\} \end{array} \right|.$$

После преобразований получим

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = \varepsilon^2 \left((-\chi_1(-1)\chi_2(1)[1] + \chi_1(1)\chi_2(-1)[1]) \left| \begin{array}{cc} \theta_1^3(-1) + \{0\} & \theta_2^3(-1) + \{0\} \\ \theta_1^3(1) + \{0\} & \theta_2^3(1) + \{0\} \end{array} \right| \right. \\ \left. + \chi_1(-1)\chi_2(1)\{0\} + \chi_1(1)\chi_2(-1)\{0\} + \{0\} \right). \end{aligned}$$

Выберем константы в определении функций χ_j так, чтобы $\chi_1(1) = 1$, $\chi_2(-1) = 1$.

Тогда имеем

$$S(-1, -1) = 0, \quad \chi_1(-1) = C_3, \quad \chi_2(1) = C_4 \exp\left(-\frac{S(-1, 1)}{\varepsilon}\right),$$

где C_3, C_4 – не зависящие от ε константы. Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \varepsilon^2 \left((-\chi_1(-1)\chi_2(1)[1] + \chi_1(1)\chi_2(-1)[1]) \left| \begin{array}{cc} \theta_1^3(-1) + \{0\} & \theta_2^3(-1) + \{0\} \\ \theta_1^3(1) + \{0\} & \theta_2^3(1) + \{0\} \end{array} \right| + \{0\} \right) \\ &= \varepsilon^2 \left((1 - e^{-2S(-1,1)/\varepsilon} + [0]) \left| \begin{array}{cc} \theta_1^3(-1) & \theta_2^3(-1) \\ \theta_1^3(1) & \theta_2^3(1) \end{array} \right| + \{0\} \right). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Известно [2] (это легко видеть независимо), что нули определителя

$$R(\lambda) = \left| \begin{array}{cc} \theta_1^3(-1) & \theta_2^3(-1) \\ \theta_1^3(1) & \theta_2^3(1) \end{array} \right|$$

совпадают с собственными значениями задачи Релея

$$(q - \lambda)(w'' - \alpha^2 w) - q''w = 0, \quad w(-1) = w(1) = 0.$$

Известно также [1], что задача Релея не имеет собственных значений для $q(x) = x$ или $q(x) = x^2$ (в [1] есть достаточное условие отсутствия собственных значений задачи Релея и для профилей $q(x)$ более общего вида).

Для определенности далее рассмотрим случай $q(x) = x^2$. Воспользуемся следующим результатом, установленным в [9]: если $q(x) = x^2$ и компакт Λ не пересекает множество

$$\Gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_\infty,$$

то точки $-1, 1$ и Λ удовлетворяют условиям леммы 2.

Теперь заметим, что функция $R(\lambda)$ не зависит от ε и не имеет нулей, следовательно, $|R(\lambda)| \geq C$ на Λ , если $\Lambda \cap \Gamma = \emptyset$. Но тогда из представления (7) и теоремы Руше следует, что $\Delta(\lambda) \neq 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Тем самым, доказано первое утверждение теоремы 2: нули $\Delta(\lambda)$ лежат вне δ -окрестности множества Γ . Для получения утверждения об асимптотике нулей нам потребуется еще одно важное предложение.

ЛЕММА 5. Пусть γ — кривая в комплексной λ -плоскости с концевыми точками λ_0 и λ_1 , а функции $F_\varepsilon(\lambda)$ и $G_\varepsilon(\lambda)$ голоморфны в криволинейной полосе $\Pi_\delta(\gamma; \lambda_0, \lambda_1)$ (см. определение выше). Пусть $N(F_\varepsilon, \lambda)$ — функция распределения нулей $F_\varepsilon(\lambda)$ вдоль γ (выберем $N(F_\varepsilon, \lambda) \geq 1$) и выполнены следующие условия:

а) при некотором $\lambda^* \in \partial\Pi_\delta$

$$|\ln |F_\varepsilon(\lambda)| - \ln |F_\varepsilon(\lambda^*)|| < C(1 + |N(F_\varepsilon, \lambda) - N(F_\varepsilon, \lambda')|), \quad (8)$$

где λ' — проекция λ^* на γ , а постоянная C не зависит от ε ;

б) предельное соотношение

$$\frac{|N(F_\varepsilon, \tilde{\lambda}) - N(F_\varepsilon, \lambda)|}{N(F_\varepsilon, \lambda)} \rightarrow 0, \quad \tilde{\lambda} \rightarrow \lambda_1, \quad (9)$$

выполняется равномерно при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $\lambda \in \gamma$;

с) при любом достаточно малом фиксированном $\delta > 0$

$$|F_\varepsilon(\lambda) - G_\varepsilon(\lambda)| = o(1)|F_\varepsilon(\lambda)|, \quad \text{где } o(1) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (10)$$

равномерно по λ на сторонах криволинейной полосы $\Pi_\delta(\gamma; \lambda_0, \lambda_1)$, $\text{dist}(\lambda, \gamma) = \delta$.

Тогда

$$N(G_\varepsilon, \lambda) = (1 + o(1))N(F_\varepsilon, \lambda) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

равномерно вдоль кривой $\gamma' \in \gamma$, если γ' не содержит концевых точек γ .

Сформулированное утверждение можно квалифицировать как теорему тауберова типа о распределении нулей голоморфных функций. При этом роль тауберова условия играет (8). Доказательство этого утверждения без труда получается с помощью методов,

развитых в работе [14], и здесь мы его не приводим. (В [14] нет теорем в приведенной формулировке, но ясен вывод леммы 5 из полученных в [14] результатов.)

Теперь рассмотрим функции

$$G_\varepsilon(\lambda) = \varepsilon^{-2}\Delta(\lambda), \quad F_\varepsilon(\lambda) = (1 - e^{-2S(-1,1)/\varepsilon})R(\lambda),$$

где $R(\lambda) \neq 0$ – определитель соответствующей задачи Релея. Согласно лемме 4 эти функции удовлетворяют условию (10). Информация о росте функции $F_\varepsilon(\lambda)$ и об асимптотике ее нулей для случая $q(x) = x^2$ получена в [9], а для $q(x) = x$ – в [8]. Этой информации достаточно, чтобы проверить условия (8) и (9) на замкнутых подмножествах критических кривых, не содержащих конечных точек. Поэтому утверждения об асимптотиках функций распределения собственных значений в теоремах 1, 2 непосредственно следуют из леммы 5. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Drazin R. G., Reid W. H. Hydrodynamic Stability. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.
- [2] Дикий Л. А. Гидро-динамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометиздат, 1973.
- [3] Reddy S. G., Schmidt P. J., Henningson D. S. Pseudospectra of the Orr–Sommerfeld operator // SIAM J. Appl. Math. 1993. V. 53. № 1. P. 15–47.
- [4] Orszag S. A. Accurate solution of the Orr–Sommerfeld equation // J. Fluid Mech. 1971. V. 50. P. 689–703.
- [5] Trefethen L. N. Pseudospectra of linear operators // ISIAM 95: Proceeding of the Third Int. Congress on Industrial and Appl. Math. Academic Verlag. Berlin, 1996. P. 401–434.
- [6] Нейман-заде М. И., Шкаликов А. А. О вычислении собственных значений задачи Орра–Зоммерфельда // Фундаментальная и прикладная матем. 2002. Т. 10. № 2. С. 301–305.
- [7] Шкаликов А. А. О предельном поведении спектра при больших значениях параметра одной модельной задачи // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 6. С. 950–953.
- [8] Дьяченко А. В., Шкаликов А. А. О модельной задаче для уравнения Орра–Зоммерфельда с линейным профилем // Функцион. анализ и его прилож. 2002. Т. 36. № 4. С. 71–75.
- [9] Туманов С. Н., Шкаликов А. А. О предельном поведении спектра модельной задачи для уравнения Орра–Зоммерфельда с профилем Пуазейля // Изв. РАН. 2002. Т. 66. № 4. С. 177–204.
- [10] Morawetz C. S. The eigenvalues of some stability problems involving viscosity // J. Rational Mech. Analysis. 1952. V. 1. P. 579–603.
- [11] Шкаликов А. А. Линии Стокса и “спектральный галстук” в проблеме Орра–Зоммерфельда // УМН. 1998. Т. 53. № 4. С. 140.
- [12] Tumanov S. N. Model problem for Poiseuille profile. Critical spectrum curve // International Conference “Differential Equations and Related Topics” Dedicated to the Centenary Anniversary of I. G. Petrovskii. Abstracts. Moscow: Moscow Univ., 2001. P. 413–414.
- [13] Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
- [14] Шкаликов А. А. Теоремы тауберова типа о распределении нулей голоморфных функций // Матем. сб. 1994. Т. 125. № 3. С. 317–347.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: shkal@mech.math.msu.su, ashkalikov@yahoo.com

Поступило
07.12.2001
Исправленный вариант
05.04.2002