Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Усков, О нахождении точного значения колмогоровских поперечников компакта в гильбертовом пространстве, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 4, 570–586

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm446>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:35:14

УДК 517.518.224

О НАХОЖДЕНИИ ТОЧНОГО ЗНАЧЕНИЯ КОЛМОГОРОВСКИХ ПОПЕРЕЧНИКОВ КОМПАКТА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

К. В. Усков

Доказана теорема о двусторонней оценке колмогоровских поперечников компакта в гильбертовом пространстве. Вычислены колмогоровские поперечники набора равноотстоящих точек в вещественном гильбертовом пространстве и найден 1-поперечник непрерывной винеровой спирали.

Библиография: 4 названия.

1. Интегральная оценка колмогоровских поперечников компакта в гильбертовом пространстве. Напомним (см. [1, с. 14–15]), что n -м колмогоровским поперечником компакта K в гильбертовом пространстве H (комплексном или вещественном) называется величина

$$d_n(K, H) = \inf_{a, L_n} d(K, a + L_n),$$

где a – вектор из H , L_n – подпространство H размерности n , $d(K, a + L_n)$ означает отклонение компакта от плоскости $a + L_n$:

$$d(K, a + L_n) = \sup_{x \in K} d(x, a + L_n) = \sup_{x \in K} \inf_{y \in L_n} \|x - a - y\|.$$

Нередко используют частный случай данного определения, полагая $a = O$ (O – нулевой элемент из H). Это приводит к величине

$$d_n^o(K, H) = \inf_{L_n} d(K, L_n).$$

Приведем метод оценки величин d_n^o , изложенный в работе [2] (далее модификация этого метода будет применена для оценки и вычисления поперечников d_n). Пусть K_1 – компакт, H – комплексное гильбертово пространство, $\varphi: K_1 \mapsto H$ – непрерывное отображение, $K = \varphi(K_1)$. Возьмем на K_1 положительную вероятностную меру σ и введем в комплексном пространстве $L_2(K_1, \sigma)$ линейный самосопряженный оператор:

$$(T_0 f)(x) = \int_{K_1} (\varphi(x), \varphi(y)) f(y) d\sigma(y), \quad x \in K_1, \quad f \in L_2(K_1, \sigma).$$

Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ – отличные от нуля собственные числа этого оператора, а $f_1, f_2, \dots$ – соответствующие собственные функции, ортонормированные в $L_2(K_1, d\sigma)$. Тогда поперечник $d_n^o(K, H)$ удовлетворяет неравенствам

$$\sqrt{\sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j} \leq d_n^o(K, H) \leq \sqrt{\max_{x \in K_1} \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j |f_j(x)|^2}. \quad (1.1)$$

Кроме того, справедлива формула для минимума среднеквадратичного отклонения компакта от подпространств H :

$$\inf_{L_n} \int_{K_1} d^2(\varphi(x), L_n) d\sigma(x) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j. \quad (1.2)$$

В случае вещественного пространства H формулы (1.1), (1.2) сохраняют вид при условии, что f_j – вещественные собственные функции оператора T_0 , λ_j – соответствующие собственные значения.

Теперь модифицируем данный метод с целью получить аналогичные оценки поперечников d_n . Для этого на $L_2(K_1, \sigma)$ введем оператор $T_1 = PT_0P$, где P – проектор на подпространство $L_2^o(K_1, \sigma)$, ортогональное функции $f_o(x) \equiv 1, x \in K_1$:

$$L_2^o(K_1, \sigma) = \left\{ f \in L_2(K_1, \sigma) : \int_{K_1} f(x) d\sigma(x) = 0 \right\}.$$

Оператор T_1 является линейным, самосопряженным, интегральным оператором с ядром $(\varphi(x) - C, \varphi(y) - C)$, где C – центр тяжести компакта K по мере σ :

$$C = \int_{K_1} \varphi(x) d\sigma(x).$$

Пусть $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$ – отличные от нуля собственные числа этого оператора, а $g_1(x), g_2(x), \dots$ – соответствующие собственные функции, ортонормированные в $L_2(K_1, \sigma)$. Тогда верна

ТЕОРЕМА 1. *n -й поперечник компакта K в гильбертовом пространстве H удовлетворяет неравенствам*

$$\sqrt{\sum_{j=n+1}^{\infty} \mu_j} \leq d_n(K, H) \leq \sqrt{\max_{x \in K_1} \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu_j |g_j(x)|^2}. \quad (1.3)$$

Как и ранее, для вещественного пространства H неравенства сохраняют вид при условии, что g_j – вещественные собственные функции оператора T_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Очевидно, что $d_n(K, H) \leq d_n^o(K - C, H)$. Верхнюю оценку величины $d_n^o(K - C, H)$ дает правая часть неравенства (1.1), если заменить отображение $x \mapsto \varphi(x)$ на $x \mapsto \varphi(x) - C$, $x \in K_1$. Данная замена переводит ядро оператора T_0 в ядро оператора T_1 , и правая часть неравенства (1.3) доказана.

Для доказательства левой части неравенства (1.3) оценим снизу величину $d_n(K, a + L_n)$ через среднеквадратичное отклонение компакта K от плоскостей из H :

$$\begin{aligned} d_n^2(K, H) &= \inf_{a, L_n} \sup_{y \in K} d^2(y, a + L_n) = \inf_{a, L_n} \sup_{x \in K_1} d^2(\varphi(x), a + L_n) \\ &\geq \inf_{a, L_n} \int_{K_1} d^2(\varphi(x), a + L_n) d\sigma(x) = \inf_{L_n} \inf_a \int_{K_1} d^2(\varphi(x), a + L_n) d\sigma(x). \end{aligned}$$

Чтобы найти последнюю величину, зафиксируем подпространство L_n и определим нижнюю грань интеграла по всем векторам $a \in H$. Для этого введем оператор Q_n — проектор на ортогональное дополнение к подпространству L_n , тогда

$$\begin{aligned} \int_{K_1} d^2(\varphi(x), a + L_n) d\sigma(x) &= \int_{K_1} (Q_n(\varphi(x) - a), \varphi(x) - a) d\sigma(x) \\ &= \int_{K_1} (Q_n\varphi(x), \varphi(x)) d\sigma(x) - (Q_n C, a) - (Q_n a, C) + (Q_n a, a) \\ &= \int_{K_1} \|Q_n\varphi(x)\|^2 d\sigma(x) - \|Q_n C\|^2 - \|Q_n(a - C)\|^2 \\ &= \int_{K_1} d^2(\varphi(x) - C, L_n) d\sigma(x) + \|Q_n(a - C)\|^2. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое достигает минимума при $a = C$, поэтому

$$d_n^2(K, H) \geq \inf_{L_n} \int_{K_1} d^2(\varphi(x) - C, L_n) d\sigma(x).$$

Применив равенство (1.2) с заменой отображения $x \mapsto \varphi(x)$ на $x \mapsto \varphi(x) - C$, $x \in K_1$, получаем нижнюю оценку (1.3) поперечника $d_n(K, H)$.

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЕ 1. Функция $f_o \equiv 1$ является собственной для оператора T_1 и соответствующее собственное значение $\mu = 0$. Поскольку из интегральных оценок (1.3) исключены нулевые собственные числа оператора T_1 , для вычисления оценок достаточно описания оператора на $L_2^o(K_1, \sigma)$ — это подпространство ортогонально функции f_o и инвариантно относительно T_1 . На элементы $L_2^o(K_1, \sigma)$ оператор T_1 действует по формуле

$$T_1 f = T_0 f - \int_{K_1} (C, \varphi(y)) f(y) d\sigma(y).$$

Неравенства (1.3) служат источником ряда оценок для величин $d_n(K, H)$. Однако в данной работе нас интересует случай, когда неравенства приводят к точному значению величины поперечников. Это имеет место, когда неравенства при некотором выборе меры σ переходят в равенства. Далее мы будем говорить, что имеет место *совмещение* интегральных оценок поперечника $d_n(K, H)$, если верхняя и нижняя оценки (1.3)

совпадают. Очевидно, достаточным условием совпадения оценок является постоянство функции

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \mu_j |g_j(x)|^2 = \text{Const}(x). \quad (1.4)$$

Используя разложение ядра линейного самосопряженного оператора, последнее условие можно переписать в виде

$$(\varphi(x) - C, \varphi(y) - C) - \sum_{j=1}^n \mu_j |g_j(x)|^2 = \text{Const}(x). \quad (1.5)$$

Отметим, что константа в правой части равенств (1.4) и (1.5) равна квадрату величины $d_n(K, H)$. Далее мы приводим два примера вычисления точного значения колмогоровских поперечников методом совмещения интегральных оценок.

2. Колмогоровские поперечники набора равноотстоящих точек в вещественном гильбертовом пространстве. Пусть H – вещественное гильбертово пространство, X_N – набор из N точек H с попарным расстоянием 1. В этом пункте в качестве иллюстрации применения метода совмещения интегральных оценок мы вычислим величины $d_n(X_N, H)$ для всех n, N , кроме “особых” случаев: $n = 1, N$ нечетно и $n = N - 2, N$ нечетно; в “особых” случаях наш метод не применим, и рассмотрение этих случаев вынесено в приложение.

Результат, который мы приводим, был ранее получен Пуховым (см. [3], [4]). Заменив геометрические рассуждения Пухова работой с интегральным неравенством, мы несколько сокращаем необходимые для решения задачи вычисления; таким образом, данный пункт имеет методический характер.

ТЕОРЕМА 2. Для всех $n \leq N - 1$, за исключением “особых” случаев, справедлива формула

$$d_n(X_N, H) = \sqrt{\frac{N - n - 1}{2N}}.$$

Заметим, что для любых двух множеств X'_N, X''_N , состоящих из N точек с попарным расстоянием 1 в вещественном гильбертовом пространстве, существует движение, переводящее одно множество в другое. Это позволяет при доказательстве теоремы ограничиться вычислением поперечников $d_n(E_N, H)$, где $E_N = \{e_k\}_{k=1}^N$ – произвольный ортонормированный набор в H (от величин $d_n(X_N, H)$ соответствующие поперечники ортонормированного набора отличаются множителем $\sqrt{2}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Воспользуемся результатом теоремы 1. Положим $K_1 = \{1, \dots, N\}$, $K = E_N$. Отображение $\varphi: K_1 \mapsto K$ зададим формулой $\varphi(k) = e_k$, $1 \leq k \leq N$. Мету σ возьмем равномерно распределенной на K_1 : $\sigma(k) = 1/N$, $1 \leq k \leq N$. Пространство $L_2^0(K_1, \sigma)$ отождествим с $\mathbb{R}_0^N = \{x \in \mathbb{R}^N, x_1 + \dots + x_N = 0\}$. Тогда оператор T_1 сводится к $N^{-1}I$, где I – тождественный оператор в $\mathbb{R}_0^N$. Спектр оператора T_1 – это $(N - 1)$ -кратное собственное значение $1/N$, а соответствующие собственные функции – произвольный, ортонормированный с весом $1/N$ базис $\mathbb{R}_0^N$. Условие совмещения (1.4) интегральных оценок поперечников $d_n(E_N, H)$ имеет вид

$$\sum_{j=1}^{N-n-1} |a_{jk}|^2 = \text{Const}(k), \quad (2.6)$$

где $(a_{jk})_{j=1, \dots, N-n-1}^{k=1, \dots, N}$ – матрица, строки которой образованы векторами произвольного ортонормированного набора в $\mathbb{R}_0^N$.

ЛЕММА 1. Пусть m, N – натуральные числа, $m \leq N-1$. Тогда, кроме случаев $m=1$, N нечетно и $m=N-2$, N нечетно, существует вещественная матрица $(a_{jk})_{j=1, \dots, m}^{k=1, \dots, N}$, строки которой ортонормированны и ортогональны вектору $\mathbf{1}_N = (1, \dots, 1)$, а сумма квадратов по столбцам постоянна и равна

$$\sum_{j=1}^m a_{jk}^2 = \frac{m}{N}, \quad k = 1, \dots, N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что векторы

$$\begin{aligned} c_j^{(N)} &= \sqrt{\frac{2}{N}} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{N} jk \right) \right)_{k=0}^{N-1}, \quad 1 \leq j \leq \frac{N-1}{2}, \\ s_j^{(N)} &= \sqrt{\frac{2}{N}} \left(\sin \left(\frac{2\pi}{N} jk \right) \right)_{k=0}^{N-1}, \quad 1 \leq j \leq \frac{N-1}{2}, \end{aligned}$$

образуют в $\mathbb{R}^N$ ортонормированную систему, ортогональную вектору $\mathbf{1}_N$. Видно, что в случае четного m набор векторов $c_j^{(N)}, s_j^{(N)}, j = 1, \dots, m/2$, образует искомую матрицу. В случае нечетного m и четного N набор $c_j^{(N)}, s_j^{(N)}, j = 1, \dots, (m-1)/2$, следует дополнить вектором

$$c_{N/2}^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{N}} ((-1)^k)_{k=0}^{N-1}.$$

Итак, искомая матрица построена для всех случаев, кроме случая нечетных m, N .

Пусть теперь m, N нечетны и $1 < m < N-2$. Заметим, что если $m_1 + m_2 = N-1$ и построена матрица порядка $m_1 \times N$ с указанными в лемме свойствами, то существует также матрица порядка $m_2 \times N$ с теми же свойствами. Действительно, к матрице размера $m_1 \times N$ можно добавить строку $N^{-1/2} \mathbf{1}$ и дополнить полученную матрицу до ортогональной. Тогда добавленные строки, отличные от $N^{-1/2} \mathbf{1}_N$, образуют матрицу размера $(N - m_1 - 1) \times N$ с нужными свойствами. Поэтому далее считаем, что $1 < m \leq (N-1)/2$.

Положим $N_1 = (N-1)/2, N_2 = (N+1)/2$. Так как $m-1$ четно и $m-1 < N_i, i = 1, 2$, то существуют матрицы A, B порядка $(m-1) \times N_1$ и $(m-1) \times N_2$ соответственно с указанными в лемме свойствами. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha A & \beta B \\ t \mathbf{1}_{N_1} & s \mathbf{1}_{N_2} \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{mN_1 - N_2}{N(m-1)}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{mN_2 - N_1}{N(m-1)}}, \quad t = -\sqrt{\frac{N_2}{NN_1}}, \quad s = \sqrt{\frac{N_1}{NN_2}},$$

удовлетворяет требованиям леммы.

Лемма 1 доказана.

Пусть теперь $m = N - n - 1$. Тогда для матрицы $(a_{jk})_{j=1, \dots, m}^{k=1, \dots, N}$, указанной в лемме, выполняется условие совмещения интегральных оценок (2.6), а значение константы в правой части условия дает квадрат искомой величины поперечника:

$$d_n^2(E_N, H) = \frac{m}{N} = \frac{N - n - 1}{N}.$$

Теорема 2 доказана.

3. 1-поперечник винеровой спирали. *Винеровой спиралью* мы будем называть подмножество $W \in L_2([0, 1])$ вида

$$W = \{w_x \in L_2([0, 1]) : w_x(t) = 1, t \leq x, w_x(t) = 0, t > x, x \in [0, 1]\}.$$

Очевидно, W есть образ отрезка $[0, 1]$ при отображении $\varphi: [0, 1] \rightarrow L_2^0([0, 1])$, $\varphi(x) = w_x$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть M – корень уравнения

$$1 = x \ln \frac{1 + 2x}{1 - 2x}.$$

Тогда

$$d_1(W, L([0, 1])) = \sqrt{\frac{1}{4} - M^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем на отрезке $[0, 1]$ вероятностную меру σ такую, что $\sigma(\{0\}) = \sigma(\{1\}) = m$ и $\sigma([x, x + dx]) = p(x) dx$, где $p \in C([0, 1])$, $p(x) = p(1 - x)$ для всех $x \in (0, 1)$. Таким образом, мера σ инвариантна относительно преобразования отрезка $[0, 1]: x \mapsto 1 - x$. Условие $\sigma([0, 1]) = 1$ приводит к равенству

$$2m + \int_0^1 p(x) dx = 1.$$

Оператор T_1 действует в $L_2^0([0, 1], \sigma)$ по формуле

$$(T_1 g)(x) = x g(1) m + \int_0^x y g(y) p(y) dy + x \int_x^1 g(y) p(y) dy + \tau(g), \quad x \in [0, 1],$$

где $\tau(g)$ – значение некоторого линейного функционала от функции g . Исследование собственных значений и собственных функций оператора T_1 в пространстве $L_2^0([0, 1], \sigma)$ разобьем на шаги.

Шаг 1. Стандартное рассуждение (двукратное дифференцирование по x) показывает, что уравнение $T_1 g = \mu g$, $g \in L_2^0([0, 1], \sigma)$, равносильно условиям

$$\mu g'' + p g = 0, \tag{3.7}$$

$$\mu g'(1) = m g(1), \tag{3.8}$$

$$\mu g'(0) = -m g(0) \tag{3.9}$$

(из (3.7)–(3.9) вытекает, что $g \perp 1$, где 1 – функция, тождественно равная единице на $[0, 1]$).

Обозначим через L^+ и L^- подпространства функций из $L_2^2([0, 1], \sigma)$, удовлетворяющих условию $g(x) = g(1 - x)$ и соответственно $g(x) = -g(1 - x)$, $x \in [0, 1]$. Из инвариантности меры σ относительно отображения $x \mapsto 1 - x$ вытекает, что $L_2^2 = L^+ \oplus L^-$ и подпространства L^+ , L^- инвариантны относительно T_1 . Следовательно, спектр оператора T_1 есть объединение спектров $T_1|L^+$ и $T_1|L^-$, и нам достаточно изучить задачу (3.7)–(3.9) в каждом из подпространств L^+ , L^- . В дальнейшем, *решением задачи* (3.7)–(3.9) мы будем называть пару (μ, g) , удовлетворяющую условиям задачи, такую, что функция g принадлежит одному из подпространств L^+ , L^- и $\|g\| = 1$. Заметим, что для нахождения таких решений задачу достаточно рассмотреть на отрезке $[1/2, 1]$, дополнив уравнения (3.7)–(3.9) в случае L^+ условием $g'(1/2) = 0$, а в случае L^- условием $g(1/2) = 0$.

Шаг 2. Пусть (μ, g) – одно из решений (3.7)–(3.9) в L^- , причем $g(x) \neq 0$ для всех $x \in (1/2, 1]$. Докажем, что μ – наибольшее собственное значение оператора T_1 .

Для этого возьмем любое другое решение $(\tilde{\mu}, \tilde{g})$ и докажем, что $\mu \geq \tilde{\mu}$. Действительно, функция $\tilde{g}$ обращается в 0 в некоторой точке интервала $(1/2, 1)$: если $\tilde{g} \in L^+$, то это вытекает из условия $\tilde{g} \perp 1$; если $\tilde{g} \in L^-$, то это следствие условия $\tilde{g} \perp g$. Таким образом, существует точка $a \in (1/2, 1)$ такая, что $\tilde{g}(a) = 0$ и $\tilde{g}(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, 1)$. Можно считать, что функции $\tilde{g}$ и g положительны на интервале $(a, 1)$, домножив их в случае необходимости на -1 . Интегрируя по частям и используя (3.7), (3.8), приходим к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^1 \tilde{g}(\mu g'' + pg) dx = \int_a^1 g(\mu \tilde{g}'' + p\tilde{g}) dx + \mu(\tilde{g}g' - g\tilde{g}')|_a^1 \\ &= \left(1 - \frac{\mu}{\tilde{\mu}}\right) \left(\int_a^1 g\tilde{g}p dx + m g(1)\tilde{g}(1)\right) + \mu g(a)\tilde{g}'(a). \end{aligned}$$

Так как функции $\tilde{g}, g$ положительны на $(a, 1]$, $\tilde{g}'(a) \geq 0$ и $\mu > 0$, видно, что $\mu \geq \tilde{\mu}$.

Шаг 3. Пусть μ – наибольшее собственное значение, g – соответствующая нормированная собственная функция оператора T_1 . Выясним, как выглядит условие совмещения интегральных оценок (1.5).

Пусть C – центр тяжести винеровой спирали по мере σ . Легко видеть, что

$$C(t) = m + \int_t^1 p(x) dx, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.10)$$

Условие (1.5) сводится к тому, что функция

$$x - 2 \int_0^x C(t) dt - \mu g^2(x)$$

постоянна на $[0, 1]$, что, в свою очередь, равносильно условию

$$C(x) + \mu g(x) g'(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in [0, 1]. \quad (3.11)$$

Из (3.10), (3.11) получаем, что $m = 1/2 - \mu g(1) g'(1)$ и $p = \mu((g')^2 + g g'')$. Подставляя полученные выражения в (3.7)–(3.9), имеем

$$g'' + \frac{(g')^2}{1 + g^2} g = 0, \quad (3.12)$$

$$\mu g'(1) = \frac{g(1)}{2(1 + g^2(1))}, \quad (3.13)$$

$$\mu g'(0) = -\frac{g(0)}{2(1 + g^2(0))}. \quad (3.14)$$

Условие нормировки функции g приводит к равенству

$$\mu \int_0^1 (g'(x))^2 dx = 1. \quad (3.15)$$

Шаг 4. Найдем функцию g , удовлетворяющую (3.12)–(3.15), такую, что $g(1/2) = 0$ и $g(x) > 0$ для всех $x \in (1/2, 1]$.

Уравнение (3.12) равносильно уравнению

$$g'(x) = \frac{c}{\sqrt{1 + g^2(x)}}, \quad x \in [0, 1], \quad (3.16)$$

с некоторой постоянной c , при этом условие (3.13) приводит к равенству

$$g(1) = \frac{2\mu c}{\sqrt{1 - 4(\mu c)^2}}. \quad (3.17)$$

Обозначим через G решение задачи Коши

$$G' = \frac{1}{\sqrt{1 + G^2}}, \quad G(0) = 0.$$

Несложно показать, что функция G нечетна, строго возрастает и $G(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Ясно, что функция $g(x) = G(c(x - 1/2))$ удовлетворяет уравнению (3.16), является строго положительной на $(1/2, 1]$ и $g(1/2) = 0$; при этом условие (3.17) переписется в виде $G(c/2) = 2\mu c / \sqrt{1 - 4(\mu c)^2}$, а условие нормировки (3.15) преобразуется следующим образом:

$$1 = 2\mu c \int_0^{c/2} (G'(x))^2 dx = 2\mu c \int_0^{G(c/2)} \frac{dG}{\sqrt{1 + G^2}} = \mu c \ln \frac{1 + 2\mu c}{1 - 2\mu c}.$$

Итак, числа μ и c определяются из уравнений

$$1 = \mu c \ln \frac{1 + 2\mu c}{1 - 2\mu c}, \quad G\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{2\mu c}{\sqrt{1 - 4(\mu c)^2}}. \quad (3.18)$$

Очевидно, что первое из этих уравнений однозначно определяет величину μc , а второе (в силу перечисленных выше свойств функции G) однозначно определяет c . Искомая функция g построена.

Вспоминая шаг 2, приходим к следующему результату: g – нормированная собственная функция оператора T_1 , соответствующая максимальному собственному значению μ , а функция $\psi(x) = (\varphi(x) - C, \varphi(x) - C) - \mu g^2(x)$ постоянна на отрезке $[0, 1]$, что обеспечивает совмещение оценок в интегральном неравенстве (1.3).

Шаг 5. Вычислим значение $d_1(W, L_2([0, 1], \sigma))$.

Квадрат искомой величины поперечника равен значению функции ψ в любой из точек отрезка $[0, 1]$ (см. замечание к (1.5)); следовательно, имеем

$$\begin{aligned} d_1^2(W, L_2([0, 1], \sigma)) &= \int_0^1 \psi(x) dx = \int_0^1 x d\sigma(x) - \|C\|^2 - \mu, \\ d_1^2(W, L_2([0, 1], \sigma)) &= \psi(0) = \|C\|^2 - \mu g^2(1). \end{aligned}$$

Исключив из приведенных выражений $\|C\|^2$ и заметив, что $\int_0^1 x d\sigma(x) = 1/2$ (это, очевидно, следует из инвариантности меры σ относительно преобразования $x \mapsto 1 - x$), приходим к равенству

$$d_1^2(W, L_2([0, 1], \sigma)) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\mu(1 + g^2(1)).$$

Применяя (3.17) и (3.18), окончательно получаем

$$d_1^2(W, L_2([0, 1], \sigma)) = \frac{1}{4} - (\mu c)^2,$$

где μc – решение первого из уравнений (3.18).

Теорема 3 доказана.

4. Приложение. Рассмотрим отмеченные в п. 2 “особые” случаи задачи о поперечниках $d_n(X_N, H)$. Случай $d_{N-2}(X_N, H)$, N нечетно, был полностью разобран Пуховым в [4], и мы его не изучаем. Задачу о поперечнике $d_1(X_N, H)$, N нечетно, Пухов свел (см. [3], [4]) к задаче на условный экстремум функции многих переменных (ниже эта задача приводится под номером (4.39)). После того как статья была сдана в печать, автору стало известно, что задачу на условный экстремум решил А. П. Буслаев, однако, решение не было опубликовано. Мы приводим полное решение задачи о поперечнике $d_1(E_N, H)$ в случае нечетного N ; это решение публикуется после обсуждения его с А. П. Буслаевым, С. В. Пуховым и В. М. Тихомировым.

Напомним, что для решения задачи о поперечниках $d_n(X_N, H)$ достаточно найти поперечники $d_n(E_N, H)$, где E_N – произвольный ортонормированный набор из N точек в H . Далее считаем, что $H = \mathbb{R}^N$ (скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$ стандартное) и $E_N = \{e_k\}_{k=1}^N$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^N$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть N нечетно. Тогда

$$d_1(E_N, \mathbb{R}^N) = \frac{2N - 3}{2\sqrt{N(N - 1)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в $\mathbb{R}^N$ плоскость $\mathbb{R}_1^N = \{x \in \mathbb{R}^N, x_1 + \dots + x_N = 1\}$. Так как $E_N \subset \mathbb{R}_1^N$, для вычисления величины $d_1(E_N, \mathbb{R}^N)$ достаточно рассмотреть отклонение множества E_N от прямых, лежащих в $\mathbb{R}_1^N$. Произвольная прямая из плоскости $\mathbb{R}_1^N$ имеет вид

$$\{x \in \mathbb{R}^N, x = a + \lambda h, \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad h \in \mathbb{R}_o^N, \quad \|h\| = 1, \quad a \in \mathbb{R}_1^N, \quad (a, h) = 0.$$

Квадрат отклонения множества E_N от такой прямой есть

$$\max_{1 \leq k \leq N} (\|a - e_k\|^2 - (a - e_k, h)^2) = \max_{1 \leq k \leq N} (1 + \|a\|^2 - 2a_k - h_k^2),$$

$$a = (a_1, \dots, a_N), \quad h = (h_1, \dots, h_N).$$

Таким образом, величина поперечника определяется решением задачи

$$\max_{1 \leq k \leq N} (1 + \|a\|^2 - 2a_k - h_k^2) \xrightarrow{a, h} \min, \quad (4.19)$$

$$\sum_{k=1}^N h_k = 0, \quad \sum_{k=1}^N h_k^2 = 1, \quad (4.20)$$

$$\sum_{k=1}^N a_k = 1, \quad \sum_{k=1}^N a_k h_k = 0. \quad (4.21)$$

Пусть a, h – искомые векторы, $d^2 = d_1^2(E_N, \mathbb{R}^N)$ – минимум целевой функции. Применяя к решению задачи (4.19)–(4.21) стандартный метод множителей Лагранжа, для векторов a, h и величины d получаем следующие условия:

$$2a_j \sum_{k=1}^N \lambda_k - 2\lambda_j + \mu_3 + 2\mu_4 h_j = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.22)$$

$$-2\lambda_j h_j + \mu_1 + 2\mu_2 h_j + 2\mu_4 a_j = 0, \quad (4.23)$$

$$\lambda_j (1 + \|a\|^2 - 2a_j - h_j^2 - d^2) = 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{k=1}^N |\lambda_k| + \sum_{i=1}^4 |\mu_i| \neq 0. \quad (4.24)$$

Кроме того, выполняется очевидное неравенство

$$1 + \|a\|^2 - 2a_j - h_j^2 \leq d^2, \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.25)$$

Из (4.20)–(4.25) нетрудно найти, что $\mu_1 = \mu_3 = 0$. Тогда из (4.22) получаем

$$\Lambda a_j + \mu_4 h_j = \lambda_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.26)$$

$$\mu_4 a_j + \mu_2 h_j = \lambda_j h_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.27)$$

где введено обозначение

$$\Lambda = \sum_{k=1}^N \lambda_k.$$

Дальнейшее рассуждение разделим на два случая.

Случай 1. Среди чисел λ_j , $j = 1, \dots, N$, имеется ровно p нулей, $p \geq 1$. Изменив при необходимости нумерацию, можно считать, что $\lambda_j = 0$ при $j = 1, \dots, p$ и $\lambda_j \neq 0$ при $j = p+1, \dots, N$.

Разбор этого случая разобьем на три шага.

Шаг 1. Покажем, что $\Lambda\mu_2 - \mu_4^2 = 0$. Для этого рассмотрим уравнения (4.26), (4.27) при $j = 1, \dots, p$. Так как $\lambda_j = 0$, то, допустив неравенство $\Lambda\mu_2 - \mu_4^2 \neq 0$, получаем $a_j = h_j = 0$ при $j = 1, \dots, p$. Тогда из (4.25) следует, что $d \geq 1$. Это противоречит очевидному неравенству $d_1(E_N, \mathbb{R}^N) < 1$. Итак, $\Lambda\mu_2 - \mu_4^2 = 0$.

Докажем, что $\Lambda \neq 0$. Действительно, если $\Lambda = 0$, то из последнего равенства имеем $\mu_4 = 0$. Тогда из (4.26) следует, что $\lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$, а из (4.27) находим, что $\mu_2 = 0$ (так как $h \neq 0$). Приходим к противоречию с (4.24).

Итак, $\Lambda \neq 0$. Поскольку числа λ_j, μ_i определены с точностью до ненулевого множителя, можно считать $\Lambda = 1$; тем самым, $\mu_2 = \mu_4^2$. Теперь необходимые условия на векторы a, h и число d принимают вид

$$a_j + \mu_4 h_j = 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad (4.28)$$

$$a_j + \mu_4 h_j = \lambda_j, \quad j = p+1, \dots, N, \quad (4.29)$$

$$\mu_4(a_j + \mu_4 h_j) = \lambda_j h_j, \quad j = p+1, \dots, N, \quad (4.30)$$

$$1 + \|a\|^2 - 2a_j - h_j^2 \leq d^2, \quad j = 1, \dots, p, \quad (4.31)$$

$$1 + \|a\|^2 - 2a_j - h_j^2 = d^2, \quad j = p+1, \dots, N. \quad (4.32)$$

К этим условиям следует добавить (4.20), (4.21).

Шаг 2. Пользуясь условиями (4.28)–(4.32), выразим все содержащиеся в них величины через переменные $h_1, \dots, h_p$, точнее, через величины

$$s_1 = \sum_{j=1}^p h_j, \quad s_2 = \sum_{j=1}^p h_j^2.$$

Из уравнений (4.29), (4.30) видно, что $h_{p+1} = \dots = h_N = \mu_4$. Это равенство позволяет выразить μ_4 через s_1 и s_2 , используя уравнения (4.20):

$$\mu_4 = -\frac{s_1}{N-p}, \quad \mu_4^2 = \frac{1-s_2}{N-p}. \quad (4.33)$$

Из полученных выражений следует соотношение между s_1 и s_2 :

$$\frac{s_1^2}{N-p} + s_2 = 1. \quad (4.34)$$

Теперь выразим координаты вектора a . Из равенства $h_{p+1} = \dots = h_N$ и уравнений (4.32) следует равенство $a_{p+1} = \dots = a_N$. Тогда из (4.29) видно, что $\lambda_{p+1} = \dots$

$= \lambda_N$. Так как $\lambda_{p+1} + \dots + \lambda_N = \Lambda = 1$, получаем, что $\lambda_j = 1/(N-p)$, $j = p+1, \dots, N$. Теперь из уравнений (4.28), (4.29) и (4.33) находим выражения для координат вектора a :

$$a_j = \begin{cases} \frac{s_1 h_j}{N-p}, & j = 1, \dots, p, \\ \frac{s_2}{N-p}, & j = p+1, \dots, N. \end{cases}$$

Из этих выражений и уравнения (4.34) следует, что $\|a\|^2 = s_2/(N-p)$, после чего из (4.32) находим

$$d^2 = 1 - \frac{1}{N-p}. \quad (4.35)$$

Шаг 3. Оценим сверху параметр p при помощи неравенств (4.31).

Подставляя в неравенства найденные выражения для величин d^2 , $\|a\|^2$ и координат вектора a , получаем

$$\left(h_j + \frac{s_1}{N-p}\right)^2 \geq \frac{2}{N-p}, \quad j = 1, \dots, p. \quad (4.36)$$

Положим

$$t_j = h_j + \frac{s_1}{N-p}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Пользуясь определением s_1 и s_2 , несложно подсчитать, что

$$s_1 = \frac{N-p}{N} \sum_{j=1}^p t_j, \quad s_2 = \sum_{j=1}^p t_j^2 - \frac{2N-p}{N^2} \left(\sum_{j=1}^p t_j\right)^2.$$

Тогда из (4.34) и (4.36) имеем

$$\sum_{j=1}^p t_j^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^p t_j\right)^2 = 1, \quad t_j^2 \geq \frac{2}{N-p}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Следствием этих условий и очевидного неравенства

$$\left(\sum_{j=1}^p t_j\right)^2 \leq p \sum_{j=1}^p t_j^2$$

является оценка $p \leq N/2$. Так как N нечетно, то $p \leq (N-1)/2$; откуда, используя (4.35), получаем

$$d \geq \sqrt{\frac{N-1}{N+1}}. \quad (4.37)$$

Случай 2. Среди чисел λ_j , $j = 1, \dots, N$, нет нулей. В этом случае из (4.23) видно, что экстремальная прямая равноудалена от точек набора E_N и величина отклонения определяется решением задачи

$$\begin{aligned} d^2 &\longrightarrow \min, \\ \sum_{k=1}^N h_k &= 0, \quad \sum_{k=1}^N h_k^2 = 1, \\ \sum_{k=1}^N a_k &= 1, \quad \sum_{k=1}^N a_k h_k = 0, \\ d^2 &= 1 + \|a\|^2 - 2a_j - h_j^2, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Выразив из уравнений связи координаты вектора a и величину d^2 через $h_1, \dots, h_N$:

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{3}{2N} - \frac{h_j^2}{2}, \quad j = 1, \dots, N, \\ d^2 &= \frac{4N-9}{4N} + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N h_j^4, \end{aligned} \quad (4.38)$$

приходим к задаче

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N h_j^4 &\longrightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^N h_j &= 0, \quad \sum_{j=1}^N h_j^2 = 1, \quad \sum_{j=1}^N h_j^3 = 0, \end{aligned} \quad (4.39)$$

N нечетно.

Применив к решению данной задачи метод множителей Лагранжа, легко видеть, что экстремальный вектор имеет не более трех различных координат. Таким образом, задачу можно переписать в следующем виде:

$$ax^4 + by^4 + cz^4 \longrightarrow \min, \quad (4.40)$$

$$ax^3 + by^3 + cz^3 = 0, \quad (4.41)$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, \quad (4.42)$$

$$ax + by + cz = 0, \quad (4.43)$$

$$a + b + c = N, \quad N \text{ нечетно}, \quad (4.44)$$

$$a \geq b \geq c, \quad (4.45)$$

$$a, b, c \in \{0, 1, 2, \dots, N\}. \quad (4.46)$$

ЛЕММА 2. Решением задачи (4.40)–(4.46) являются точки

$$(a, b, c) = \left(\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}, 1 \right), \quad (x, y, z) = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}, -\frac{1}{\sqrt{N-1}}, 0 \right),$$

в которых целевая функция принимает значение $1/(N-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разобьем на шаги.

Шаг 1. Легко показать, что при $c = 0$ условия (4.41)–(4.44), (4.46) несовместны, поэтому далее полагаем $c \geq 1$. Тогда из (4.44)–(4.46) видно, что вектор (a, b) пробегает все целочисленные точки треугольника

$$D = \{(a, b) : a \geq b, a + 2b \geq N, a + b \leq N - 1\}.$$

Целевая функция задачи (4.40)–(4.45) (мы временно отбросим условие целочисленности (4.46)) является, очевидно, многозначной функцией $F(a, b)$, $(a, b) \in D$. Наша цель – выделить ее непрерывные ветви и исследовать их минимумы на множестве целочисленных точек из D . Это приведет к решению задачи (4.40)–(4.46).

Рис. 1. Область определения многозначной функции $F(a, b)$

Шаг 2. Выделим непрерывные ветви многозначной функции $F(a, b)$, $(a, b) \in D$.

Пусть сначала $(a, b) \in D$ и $(a, b) \neq A_0$, где $A_0 = (N/3, N/3)$. В этом случае любой вектор (x, y, z) , определяемый из уравнений (4.41)–(4.43), удовлетворяет условию $y \neq 0$ (действительно, допустив, что $y = 0$, из (4.41)–(4.45) получаем $a = b = N/3$). Но тогда замена $t = x/y$ позволяет выразить многозначную функцию F по формулам

$$F(a, b) = \left(\frac{(at + b)^4}{c^3} + at^4 + b \right) / \left(\frac{(at + b)^2}{c} + at^2 + b \right)^2, \quad (4.47)$$

$$f(a, b, t) = 0, \quad \text{где } f(a, b, t) = \frac{(at + b)^3}{c^2} - at^3 - b. \quad (4.48)$$

Функция $f(a, b, t)$, $t \in \mathbb{R}$, имеет в точках

$$\tau_1 = -\frac{b}{a - c}, \quad \tau_2 = -\frac{b}{a + c}$$

экстремумы, и значения функции в этих точках определяются по формулам

$$f(a, b, \tau_1) = \frac{b}{(a - c)^2} (b + c - a)(b + a - c),$$

$$f(a, b, \tau_2) = \frac{b}{(a + c)^2} N(b - a - c) < 0 \quad \forall (a, b) \in D.$$

Рис. 2. Графики функции $f(a, b, t)$, $t \in \mathbb{R}$

Ниже приведены графики функции f , соответствующие разным знакам $f(a, b, \tau_1)$.

Видно, что при $(a, b) \in D$ уравнение $f(a, b, t) = 0$ задает непрерывную функцию $t_3(a, b)$. Кроме того, при $(a, b) \in D \setminus A_0$, $a \leq N/2$, это уравнение задает еще две непрерывные функции $t_1(a, b)$ и $t_2(a, b)$. Таким образом, получаем следующие непрерывные ветви многозначной функции $F(a, b)$ на множестве $D \setminus A_0$: во-первых, функция $F_3(a, b)$, где $(a, b) \in D \setminus A_0$; во-вторых, функции $F_1(a, b)$, $F_2(a, b)$, где $(a, b) \in D \setminus A_0$, $a \leq N/2$.

Обратимся теперь к исключенной точке $A_0 = (N/3, N/3)$. Из (4.40)–(4.43) легко видеть, что многозначная функция $F(a, b)$ принимает в A_0 единственное значение $3/(2N)$. Покажем, что $F_k(a, b) \rightarrow 3/(2N)$ при $(a, b) \rightarrow A_0$, $(a, b) \in D$. Действительно, если $(a, b) \rightarrow A_0$, $(a, b) \in D$, то, во-первых, $t_2(a, b) \rightarrow -1$, $t_3(a, b) \rightarrow 0$, значит, $F_2(a, b) \rightarrow 3/(2N)$, $F_3(a, b) \rightarrow 3/(2N)$; во-вторых, $t_1(a, b) \rightarrow -\infty$, $y^2 \sim (t_1^2(a + a^2/c))^{-1} \sim 3/(2Nt_1^2)$, откуда $F_1(a, b) \sim y^4 t_1^4(a + a^4/c^3) \rightarrow 3/(2N)$. Теперь, если доопределить функции $F_k(a, b)$ в точке A_0 равенством $F_k(N/3, N/3) = 3/(2N)$, то ветвь F_3 становится непрерывной в D , а ветви F_1 и F_2 – при $(a, b) \in D$, $a \leq N/2$.

Шаг 3. Найдем ограничения функций F_k на прямые $a = b$ и $a + 2b = N$.

Пусть сначала $a = b$. Из (4.48) находим, что $t_2(a, a) = -1$, а $t_1(a, a)$ и $t_3(a, a)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{t}{(1+t)^2} = \frac{c^2 - a^2}{3c^2}. \quad (4.49)$$

Положив $a = b$ в (4.47), упрощаем это выражение, используя найденное значение $t_2(a, a)$ и уравнение (4.49). В результате получаем (здесь мы опускаем рутинные вычисления) следующие формулы:

$$F_2(a, a) = \frac{1}{2a}, \quad F_{1,3}(a, a) = \frac{1}{N} \varphi\left(\frac{N-2a}{a}\right), \quad (4.50)$$

где использовано обозначение

$$\varphi(x) = \frac{1 + 3x - x^2}{1 + x}.$$

Пусть теперь $a + 2b = N$ (что равносильно условию $b = c$). Из (4.48) получаем, что $t_3 = 0$, а t_1 и t_2 удовлетворяют уравнению

$$\frac{b + at}{bt^2} = \frac{b^2 - a^2}{3b^2}.$$

Далее из (4.47) находим

$$F_3\left(a, \frac{N-a}{2}\right) = \frac{1}{N-a}, \quad F_{1,2}\left(a, \frac{N-a}{2}\right) = \frac{1}{N} \varphi\left(\frac{2a}{N-a}\right), \quad (4.51)$$

где φ – функция, определенная выше.

Шаг 4. Перейдем теперь к задачам на минимум функций F_k .

Область определения функций F_1, F_2 не содержит точек с двумя целыми координатами в полосе $(N-1)/2 < a \leq N/2$, поэтому исходная задача (4.40)–(4.46) свелась к задачам

$$F_i(a, b) \xrightarrow[(a, b) \in D_1]{a, b \in \mathbb{N}} \min, \quad i = 1, 2, \quad F_3(a, b) \xrightarrow[(a, b) \in D]{a, b \in \mathbb{N}} \min,$$

где $D_1 = \{(a, b) \in D : a \leq (N-1)/2\}$.

Шаг 5. Найдем $\partial F_k / \partial a, \partial F_k / \partial b, k = 1, 2, 3$. Поскольку необходимые для этого вычисления стандартны, мы лишь наметим вывод данных функций.

Из определения функций $F_k(a, b)$ следует, что

$$dF_k = d(ax_k^4 + by_k^4 + cz_k^4) + \alpha d(ax_k^3 + by_k^3 + cz_k^3) + \beta d(ax_k^2 + by_k^2 + cz_k^2) + \gamma d(ax_k + by_k + cz_k),$$

где переменные x, y, z, a, b, c связаны соотношениями (4.41)–(4.44), α, β, γ – произвольные функции. Подобрав эти функции так, чтобы множители при dx, dy, dz в формуле для dF_k обратились в нуль, получаем искомые выражения дифференциалов $dF_k(a, b)$. Из этих выражений с учетом замены $t = x/y$ находим

$$\frac{\partial F_k}{\partial a} = M \left(t_k + \frac{b}{a+c} \right)^3 \left(t_k + \frac{2c+b}{a-c} \right), \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial b} = N \left(t_k + \frac{b+c}{a} \right)^3 \left(t_k + \frac{b-c}{a+2c} \right), \quad (4.53)$$

где M, N – положительные (кроме точки A_0) функции:

$$M = \frac{y^4}{3c^4} (a+c)^3 (a-c), \quad N = \frac{y^4}{3c^4} (a+2c) a^3.$$

Шаг 6. Докажем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial a} &< 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial b} > 0 & \forall (a, b) \in D_1 \setminus A_0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} &< 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial b} < 0 & \forall (a, b) \in D_1 \setminus A_0, \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} &> 0 & \forall (a, b) \in D \setminus A_0. \end{aligned}$$

Рассмотрим, например, функцию $\partial F_2 / \partial b$. Из (4.53) видно, что знак $\partial F_2 / \partial b$ зависит от знака $t_2 + (b+c)/a$ и $t_2 + (b-c)/(a+2c)$. Найдем знаки этих величин.

Во-первых, $t_2 + (b-c)/(a+2c) < \tau_2 + (b-c)/(a+2c) < 0$. Во-вторых, $-(b+c)/a < \tau_2$ и

$$f \left(-\frac{b+c}{a} \right) = (b+c) \left(\left(\frac{b+c}{a} \right)^2 - 1 \right) < 0 \quad \forall (a, b) \in D_1,$$

из чего следует (см. рис. 2) неравенство $-(b+c)/a < t_2$.

Итак, имеем $t_2 + (b-c)/(a+2c) < 0$ и $t_2 + (b+c)/a > 0$; из (4.53) находим, что $\partial F_2 / \partial b < 0$. Остальные неравенства доказываются аналогично.

Шаг 7. Найдем минимум функций F_k (см. шаг 4), отбросив условия $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$.

Из доказанных неравенств для частных производных функций $F_k(a, b)$ (см. также рис. 1) видно, что минимум функций F_1 и F_2 в D_1 достигается в точках $((N-1)/2, (N+1)/4)$ и $((N-1)/2, (N-1)/2)$ соответственно. Для функции F_3 минимум достигается на одном из отрезков $\{(a, b) \in D_1 : a = b\}$ и $\{(a, b) \in D : a + 2b = N\}$. Используя результаты шага 3, находим, что

$$\begin{aligned}\min_{D_1} F_2 &= F_2\left(\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}\right) = \frac{1}{N-1}, \\ \min_{D_1} F_1 &= \frac{1}{N} \varphi\left(\frac{2(N-1)}{N+1}\right) \geq \frac{1}{N-1} \quad \forall N \geq 2, \\ \min_D F_3 &= \min\left\{\min_{N/3 \leq a \leq (N-1)/2} F_3(a, a), \min_{N/3 \leq a \leq N-2} F_3\left(a, \frac{N-a}{2}\right)\right\} \\ &= \min\left\{\min_{2/(N-1) \leq x \leq 1} \varphi(x), F_3\left(\frac{N}{3}, \frac{N}{3}\right)\right\} \geq \frac{1}{N-1} \quad \forall N \geq 3\end{aligned}$$

(обоснование указанных здесь неравенств не представляет сложности).

Наименьший из найденных минимумов, равный $1/(N-1)$, достигается в точке $(a, b) = ((N-1)/2, (N-1)/2)$ с целыми координатами и потому является искомым для исходной задачи (4.40)–(4.46). Соответствующие значения переменных x, y, z определяются из условия $x/y = t_2((N-1)/2, (N-1)/2) = -1$ и уравнений связи (4.42), (4.43).

Лемма 2 доказана.

Возвращаясь к задаче об отклонении набора E_N от экстремальной равноудаленной прямой, из (4.38) находим

$$d^2 = \frac{4N-9}{4N} + \frac{1}{4(N-1)} = \frac{(2N-3)^2}{4N(N-1)}.$$

Эта величина не превосходит нижней оценки отклонения (4.37) и, тем самым, определяет значение поперечника $d_1(E_N, \mathbb{R}^N)$ в случае нечетного N .

Утверждение 1 доказано.

Автор благодарит Р. С. Исмагилова за постановку задачи помощь в их решении и выражает искреннюю признательность А. П. Буслаеву, С. В. Пухову и В. М. Тихомирову за обсуждение рассмотренных в статье задач.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во Московского университета, 1968.
- [2] Исмагилов Р. С. Об n -мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве // Функцион. анализ и его прилож. 1968. Т. 2. № 2. С. 32–35.
- [3] Пухов С. В. Колмогоровские поперечники правильного симплекса // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1980. № 4. С. 34–37.
- [4] Пухов С. В. Об экстремальных многообразиях для выпуклых многогранников // Алгебраические и дискретные системы. Межвузовский сборник научных трудов. Иваново, 1988. С. 71–80.