Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Н. Хабибуллин, Устойчивость полноты экспоненциальных систем на выпуклых компактах в $\mathbb{C}$, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 4, 587–596

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm447>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 08:52:55

УДК 517.538.2

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛНОТЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТАХ В $\mathbb{C}$

Б. Н. Хабибуллин

Получено достаточное условие устойчивости полноты систем экспонент $\{\exp \lambda_n z\}$ при сдвигах показателей λ_n в пространствах функций, непрерывных на выпуклом компакте $K \subset \mathbb{C}$ с непустой внутренностью и голоморфных внутри K . Это условие – обобщение важного частного случая соответствующего результата Редхеффера и Александера для отрезка.

Библиография: 20 названий.

Введение. Все функции и меры, если противное не оговорено или не продиктовано контекстом, предполагаются комплекснозначными.

Пусть K – компакт на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Как обычно, $C(K)$ – банахово пространство всех непрерывных функций на K с естественной нормой

$$\|f\|_K = \sup\{|f(z)| : z \in K\}, \quad f \in C(K). \quad (0.1)$$

Через $A(K)$ обозначаем подпространство пространства $C(K)$, состоящее из функций, голоморфных во внутренности $\text{Int } K$ компакта K , если $\text{Int } K \neq \emptyset$, с той же нормой (0.1). В частности, при $\text{Int } K = \emptyset$ имеем $A(K) = C(K)$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, – последовательность комплексных чисел (точек), не имеющая предельных точек в $\mathbb{C}$. Последовательности $\Lambda \subset \mathbb{C}$ сопоставим экспоненциальную систему

$$\text{Exp } \Lambda = \{z^{k-1} e^{\lambda z} : \lambda \in \Lambda, 1 \leq k \leq \Lambda(\lambda), k \in \mathbb{N}\}, \quad (0.2)$$

где $\Lambda(\lambda)$ – число повторений точки λ в последовательности Λ .

Следуя, например, [1], [2], систему $\text{Exp } \Lambda$ называем¹ *полной на компакте K* , если замыкание ее линейной оболочки в пространстве $A(K)$ совпадает с $A(K)$.

В [3, теорема 3] в ослабленной форме, а затем в окончательном виде в обзоре [4, теорема 14] установлена

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00770.

¹В ряде работ принято двойственное определение понятия полноты системы функций в топологическом векторном пространстве E или, иначе говоря, относительно E , а именно: E – сильно сопряженное к пространству, которому принадлежит система, и аннулирует эту систему только нулевой функционал из E (см., в частности, [3, теорема 3], [4, с. 5]). Это иногда приводило к неточностям [5, с. 212] или неясностям [6, с. 213] в формулировке первоначального варианта исходной для нас теоремы Александера–Редхеффера.

ТЕОРЕМА АЛЕКСАНДЕРА–РЕДХЕФФЕРА. *Если для последовательностей комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}$ и $\Gamma = \{\gamma_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, выполнено соотношение*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n - \gamma_n|}{1 + |\operatorname{Re} \lambda_n| + |\operatorname{Re} \gamma_n|} < +\infty, \quad (0.3)$$

то $\operatorname{Exr} \Lambda$ и $\operatorname{Exr} \Gamma$ полны или неполны на любом отрезке $K \subset \mathbb{R}$ одновременно.

Привлекательность этой теоремы Александра–Редхеффера как минимум в том, что для каждой последовательности Λ и Γ по отдельности условие (0.3) не диктует какой-либо регулярности в ее распределении.

Этот результат сразу влечет

СЛЕДСТВИЕ. *Если последовательности Λ и Γ связаны соотношением*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n - \gamma_n| < +\infty, \quad (0.4)$$

то системы $\operatorname{Exr} \Lambda$ и $\operatorname{Exr} \Gamma$ полны или неполны на отрезке K в $\mathbb{C}$ только одновременно.

Многие другие результаты об устойчивости полноты экспоненциальных систем для пространств $C[-a, a]$ или $L^p(-a, a)$, установленные до 1977 года, отражены в обзоре Редхеффера [4]. Серия тонких результатов в этом направлении принадлежит Седлепко-му (см. [6]–[11] и т.д.).

Известные нам работы, связанные с вопросами именно полноты экспоненциальных систем на компакте с непустой внутренностью, немногочисленны (см., например, [12]–[14]). В то же время исследование полноты таких систем на компактах в $\mathbb{C}$ с непустой внутренностью тем более актуально и в определенной степени выдвигается на первый план, так как существование “хороших” базисов или представляющих систем для всего пространства $A(K)$, не говоря уж о таковых именно вида (0.2), проблематично. Так известно, что не существует абсолютно представляющих экспоненциальных систем для $A(K)$ (см. [15]). В $A(K)$, как и в $C[a, b]$, нет безусловных базисов. Более того, весьма вероятно, что в $A(K)$ не существует даже базисов вида (0.2).

В [14, теорема 2] был установлен ослабленный вариант обобщения теоремы Александра–Редхеффера на выпуклые компакты K с непустой внутренностью, где показано, что при определенном условии “близости” последовательностей Λ и Γ , естественным образом развивающем соотношение (0.3) с учетом геометрии выпуклого компакта K , системы $\operatorname{Exr} \Lambda$ и $\operatorname{Exr} \Gamma$ полны или неполны одновременно на K с возможным “зазором” в две экспоненты. Но проблему полного переноса как теоремы Александра–Редхеффера, так и приведенного выше следствия на произвольные выпуклые компакты $K \subset \mathbb{C}$ с непустой внутренностью этот результат не решает. Основной результат настоящей статьи – следующая теорема об устойчивости полноты, которая в полной мере обобщает следствие на произвольные выпуклые компакты в $\mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛНОТЫ. Если последовательности Λ и Γ связаны соотношением (0.4), то системы $\text{Exp } \Lambda$ и $\text{Exp } \Gamma$ могут быть полны на выпуклом компакте в $\mathbb{C}$ только одновременно.

Этот результат был анонсирован ранее частично в [16] и в окончательном виде в [17].

Автор выражает глубокую признательность И. Ф. Красичкову-Терновскому и С. В. Попену за полезные обсуждения.

1. О сопряженном к $A(K)$. Далее всюду, не оговаривая особо, считаем, что компакт K выпуклый.

Через $A^*(K)$ и $C^*(\partial K)$ обозначаем пространства, сильно сопряженные соответственно к $A(K)$ и к пространству $C(\partial K)$ функций, непрерывных на ∂K .

Поскольку каждая функция $f \in A(K)$ однозначно определяется своими значениями на границе и множество сужений функций из $A(K)$ на ∂K образует замкнутое подпространство в пространстве $C(\partial K)$, то по теореме Хана–Банаха каждому линейному непрерывному функционалу $\mathcal{L} \in A^*(K)$ с нормой $\|\mathcal{L}\|$ в $A^*(K)$ можно сопоставить линейный непрерывный функционал $\mathbf{l} \in C^*(\partial K)$ с той же нормой. По теореме Рисса каждый функционал $\mathbf{l} \in C^*(\partial K)$ можно однозначно отождествить с некоторой конечной борелевской мерой на ∂K , которую обозначаем тем же символом $\mathbf{l}$, и для меры $\mathbf{l}$ на ∂K пишем также $\mathbf{l} \in C^*(\partial K)$. Такое сопоставление $\mathcal{L} \rightarrow \mathbf{l}$ отнюдь не однозначно. Оно подчиняется правилу

$$\mathcal{L}(f) = \int_{\partial K} f(\zeta) d\mathbf{l}(\zeta), \quad f \in A(K). \quad (1.1)$$

Нормой функционала (меры) $\mathbf{l} \in C^*(\partial K)$ в $C^*(\partial K)$ служит полная вариация $\text{Var}[\mathbf{l}]$ меры $\mathbf{l}$.

В обратном направлении можно сказать, что каждый линейный непрерывный функционал $\mathbf{l}$ на $C(\partial K)$, рассматриваемый как мера $\mathbf{l}$ на ∂K , однозначно порождает линейный непрерывный функционал $\mathcal{L} \in A^*(K)$ по закону (1.1).

Каждую меру $\mathbf{l}$ на ∂K , связанную с функционалом $\mathcal{L} \in A^*(K)$ по правилу (1.1), называем далее *определяющей мерой* функционала $\mathcal{L}$ и говорим, что мера $\mathbf{l}$ *определяет* функционал $\mathcal{L}$.

Таким образом, согласно (1.1) для каждой меры $\mathbf{l}$, определяющей функционал $\mathcal{L} \in A^*(K)$, выполнено

$$\|\mathcal{L}\| \leq \text{Var}[\mathbf{l}], \quad (1.2)$$

и, кроме того, для $\mathcal{L} \in A^*(K)$ существует мера $\mathbf{l} \in C^*(\partial K)$, для которой в (1.2) можно поставить знак равенства.

Нам удобно обозначить через $[0, S]^\circ$ отрезок $[0, S]$ с отождествленными точками 0 и S , т.е. фактически окружность с периметром S с отмеченной на ней начальной точкой 0 с обычной метрикой – длиной кратчайшей дуги, соединяющей точки.

Пусть задана естественная (натуральная) параметризация по длине дуги границы (обход всегда против часовой стрелки) выпуклого компакта K

$$\zeta: [0, S]^\circ \rightarrow \partial K, \quad S - \text{длина } \partial K, \quad \zeta(0) = \zeta(S) = \zeta_0. \quad (1.3)$$

Она, очевидно, удовлетворяет условию Липшица

$$|\zeta(s) - \zeta(t)| \leq |s - t|, \quad (1.4)$$

следовательно, является абсолютно непрерывной функцией ограниченной вариации на $[0, S]^\circ$. Кроме того, параметризация (1.3) как непрерывная биекция компакта $[0, S]^\circ$ на ∂K является гомеоморфизмом между $[0, S]^\circ$ и ∂K .

При заданной параметризации (1.3) каждый функционал $\mathcal{L}$ из $A^*(K)$ с определяющей мерой $\mathbf{l}$ можно задать непрерывной справа функцией ограниченной вариации l на $[0, S]^\circ$, где

$$l(s) = \mathbf{l}(\zeta((0, s])), \quad 0 < s \leq S, \quad l(0) = 0. \quad (1.5)$$

Тогда согласно (1.1)

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^S f(\zeta(s)) dl(s), \quad f \in A(K), \quad (1.6)$$

где интеграл понимается как интеграл Стильтьеса.

Обратно, при заданной параметризации (1.3) каждая непрерывная справа функция ограниченной вариации l на $[0, S]^\circ$, $l(0) = 0$, по закону (1.5) однозначно определяет борелевскую меру $\mathbf{l}$, которая, в свою очередь, уже *однозначно определяет* функционал $\mathcal{L} \in A^*(K)$ по правилу (1.6) или (1.1). При этом полная вариация $\text{Var}[l]$ функции l на $[0, S]^\circ$ совпадает с полной вариацией $\text{Var}[\mathbf{l}]$ меры $\mathbf{l}$, поскольку параметризация (1.3) – гомеоморфизм, т.е. “запас” непрерывных функций на $[0, S]^\circ$ и на ∂K один и тот же, а нормы соответствующих линейных непрерывных функционалов задаются как полные вариации соответствующих мер (функций).

Каждую непрерывную справа функцию ограниченной вариации l на $[0, S]^\circ$, $l(0) = 0$, связанную при заданной параметризации с функционалом $\mathcal{L} \in A^*(K)$ по правилу (1.6), называем далее *определяющей функцией* функционала $\mathcal{L}$ и говорим, что функция l *определяет* функционал $\mathcal{L}$.

Согласно сказанному выше об определяющих мерах $\mathbf{l} \in C^*(\partial K)$ для каждой функции l , определяющей функционал $\mathcal{L} \in A^*(K)$, выполнено

$$\|\mathcal{L}\|^* \leq \text{Var}[l], \quad (1.7)$$

и, кроме того, для $\mathcal{L} \in A^*(K)$ при любой параметризации (1.3) существует непрерывная справа функция ограниченной вариации l на $[0, S]^\circ$, $l(0) = 0$, для которой в (1.7) можно поставить знак равенства.

Характеристическая функция (преобразование Лапласа) функционала $\mathcal{L} \in A^*(K)$ с определяющей мерой $\mathbf{l}$ и с определяющей функцией l согласно (1.1) и (1.6) однозначно определяется как целая функция экспоненциального типа

$$L(z) = \mathcal{L}(e^{z\zeta}) = \int_{\partial K} \exp(z\zeta) d\mathbf{l}(\zeta) = \int_0^S \exp(z\zeta(s)) dl(s), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.8)$$

В силу полноты системы экспонент $\{e^{z\zeta} : z \in \mathbb{C}\}$, $\zeta \in K$, в $A(K)$ если L – нулевая функция, то функционал $\mathcal{L}$ также нулевой.

2. Конструкция Левинсона–Александера–Редхеффера для выпуклого компакта. В принятых в предыдущем пункте соглашениях и обозначениях (1.3)–(1.8) справедлив следующий вариант тождества Левинсона, применявшийся им для случая отрезка $K \in \mathbb{R}$ [18].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если L – характеристическая функция функционала $\mathcal{L} \in A^*(K)$ с определяющей функцией l и L обращается в нуль в точке λ , то для функционала $\mathcal{L}_\lambda \in A^*(K)$ с характеристической функцией $L_\lambda = L(z)/(z - \lambda)$ можно выбрать определяющую функцию l_λ (при той же параметризации (1.3), что и для l) с плотностью распределения

$$dl_\lambda(s) = - \left(\int_0^s e^{\lambda(\zeta(t) - \zeta(s))} dl(t) \right) d\zeta(s) = \left(\int_s^S e^{\lambda(\zeta(t) - \zeta(s))} dl(t) \right) d\zeta(s). \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем характеристическую функцию L в виде

$$L(z) = \int_0^S e^{(z-\lambda)\zeta(s)} e^{\lambda\zeta(s)} dl(s) = \int_0^S e^{(z-\lambda)\zeta(s)} d \int_0^s e^{\lambda\zeta(t)} dl(t), \quad (2.2)$$

откуда интегрированием по частям² [19, гл. VIII] с учетом $L(\lambda) = 0$ получаем

$$\begin{aligned} L(z) &= e^{(z-\lambda)\zeta(s)} \int_0^S e^{\lambda\zeta(t)} dl(t) - \int_0^S \left(\int_0^s e^{\lambda\zeta(t)} dl(t) \right) d e^{(z-\lambda)\zeta(s)} \\ &= e^{(z-\lambda)\zeta(S)} L(\lambda) - \int_0^S \left(\int_0^s e^{\lambda\zeta(t)} dl(t) \right) (z - \lambda) e^{(z-\lambda)\zeta(s)} d\zeta(s) \\ &= -(z - \lambda) \int_0^S e^{z\zeta(s)} \left(\int_0^s e^{\lambda(\zeta(t) - \zeta(s))} dl(t) \right) d\zeta(s). \end{aligned}$$

Поделив полученное равенство на $z - \lambda$ и выбирая $l_\lambda(s)$ как в (2.1), в силу однозначной определенности функционала его характеристической функцией получим (2.1). Функционал $\mathcal{L}_\lambda$ с определяющей функцией l_λ принадлежит $A^*(K)$, так как согласно конструкции (2.1) функция l_λ ограниченной вариации на $[0, S]^\cup$. Независимость от ζ_0 видна по построению. Последнее соотношение в (2.1) вытекает из тождества

$$L(\lambda) = \int_0^s e^{\lambda\zeta(t)} dl(t) + \int_s^S e^{\lambda\zeta(t)} dl(t) \equiv 0. \quad (2.3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. В условиях и обозначениях предложения 1 для функционала $\mathcal{G} \in A^*(K)$ с характеристической функцией

$$G(z) = \frac{z - \gamma}{z - \lambda} L(z) \quad (2.4)$$

можно подобрать определяющей функцию g , связанную с l соотношением

$$dg(s) = dl(s) + (\lambda - \gamma) dl_\lambda(s). \quad (2.5)$$

²В книге Натансона большинство утверждений доказаны для функций и мер со значениями на $[-\infty, +\infty]$, но они мгновенно переносятся на функции и меры со значениями в $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, если рассмотреть отдельно мнимые и действительные их части.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться тождеством

$$G(z) = L(z) + (\lambda - \gamma) \frac{L(z)}{z - \lambda}$$

и однозначной определенностью функционала его характеристической функцией. Принадлежность $\mathcal{G}$ к $A^*(K)$ следует из вида его определяющей функции (2.5).

Следующее утверждение распространяет соответствующую оценку из [3] и [4, п. 6] для отрезка на выпуклый компакт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если характеристическая функция L ненулевого функционала $\mathcal{L} \in A^*(K)$ удовлетворяет условию $L(\lambda) = 0$, то функция G из (2.4) – характеристическая функция некоторого ненулевого функционала $\mathcal{G} \in A^*(K)$ и

$$\|\mathcal{G} - \mathcal{L}\|^* \leq S \cdot |\lambda - \gamma| \cdot \|\mathcal{L}\|^*, \quad (2.6)$$

где S – периметр выпуклого компакта K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя сдвиг всей плоскости $\mathbb{C}$ и поворот ее на соответствующий угол, можно считать, не умаляя общности, что точка λ лежит на положительной полуоси $(0, +\infty)$.

Как отмечалось в п. 1, можно подобрать определяющую меру $\mathbf{l} \in A^*(K)$ функционала $\mathcal{L}$ так, что

$$\|\mathcal{L}\|^* = \text{Var}[\mathbf{l}]. \quad (2.7)$$

Опишем теперь выбор параметризации (1.3) (см. рис. 1).

Пусть l_+ и l_- – две опорные прямые компакта K , ортогональные положительной полуоси, и l_- расположена левее l_+ . В качестве начальной точки $\zeta_0 = \zeta(0)$ в параметризации (1.3) выберем одну из точек опоры опорной прямой l_- . Отметим также далее одну из точек опоры $\zeta_+ = \zeta(s_+)$ опорной прямой l_+ .

Рис. 1. Выбор параметризации (обход против часовой стрелки)

При выбранной параметризации согласно (2.7) по мере $\mathbf{l}$ можно построить определяющую функцию l такую, что

$$\|\mathcal{L}\|^* = \text{Var}[l]. \quad (2.8)$$

Тогда по предложениям 2 и 1 G – характеристическая функция для некоторого функционала $\mathcal{G} \in A^*(K)$, для которого можно подобрать определяющую функцию g (при той же параметризации) так, что

$$\begin{aligned} d(g-l)(s) &= (\lambda - \gamma) \left(- \int_0^s e^{\lambda(\zeta(t) - \zeta(s))} dl(t) \right) d\zeta(s) \\ &= (\lambda - \gamma) \left(\int_s^S e^{\lambda(\zeta(t) - \zeta(s))} dl(t) \right) d\zeta(s). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\text{Var}[g-l] \leq |\lambda - \gamma| \sup_s \min \left\{ \left| \int_0^s e^{\lambda(\zeta(t) - \zeta(s))} dl(t) \right|, \left| \int_s^S e^{\lambda(\zeta(t) - \zeta(s))} dl(t) \right| \right\} \cdot \text{Var}[\zeta],$$

где вариация $\text{Var}[\zeta]$ параметризации (1.3) есть периметр S . Продолжая эту оценку, получаем

$$\text{Var}[g-l] \leq |\lambda - \gamma| \sup_s \min\{B_0(s), B_S(s)\} \cdot \text{Var}[l] \cdot S, \quad (2.9)$$

где

$$B_0(s) = \sup_{0 < t \leq s} |e^{\lambda(\zeta(t) - \zeta(s))}|, \quad B_S(s) = \sup_{s < t \leq S} |e^{\lambda(\zeta(t) - \zeta(s))}|,$$

или иначе

$$B_0(s) = \exp \left(\lambda \sup_{0 < t \leq s} \text{Re}(\zeta(t) - \zeta(s)) \right), \quad (2.10)$$

$$B_S(s) = \exp \left(\lambda \sup_{s < t \leq S} \text{Re}(\zeta(t) - \zeta(s)) \right). \quad (2.11)$$

Из рис. 1 легко видеть, что для выпуклого компакта K справедливы оценки

$$\begin{aligned} \text{Re}(\zeta(t) - \zeta(s)) &\leq 0 \quad \text{при всех } 0 < t \leq s \leq s_+, \\ \text{Re}(\zeta(t) - \zeta(s)) &\leq 0 \quad \text{при всех } s_+ < s \leq t \leq S. \end{aligned}$$

Отсюда согласно (2.10) и (2.11) соответственно имеем

$$\begin{aligned} B_0(s) &\leq 1 \quad \text{при всех } 0 < t \leq s \leq s_+, \\ B_S(s) &\leq 1 \quad \text{при всех } s_+ < s \leq t \leq S. \end{aligned}$$

Применяя последние оценки к (2.9), получаем

$$\text{Var}[g-l] \leq |\lambda - \gamma| \cdot 1 \cdot S \cdot \text{Var}[l].$$

Отсюда, поскольку $g-l$ – определяющая функция для функционала $\mathcal{G} - \mathcal{L}$, имеем

$$\|\mathcal{G} - \mathcal{L}\|^* \leq S \cdot |\lambda - \gamma| \cdot \text{Var}[l] = S \cdot |\lambda - \gamma| \cdot \|\mathcal{L}\|^*,$$

где последнее равенство обеспечено выбором (2.8) определяющей функции l . Предложение доказано.

3. О сходимости в $A^*(K)$. Следующее утверждение в целом известно и применялось в [3] в конкретной ситуации, но в вычленном виде нам не встречалось. Поэтому мы приводим его с доказательством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность в нормированном пространстве X с нормой $\|\cdot\|$. Если последовательность неотрицательных чисел $\{d_n\}$ такова, что

$$\sum_n d_n < +\infty \quad (3.1)$$

и

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq d_n \|x_n\|, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

то последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношений (3.2) следует

$$(1 - d_n)\|x_n\| \leq \|x_{n+1}\| \leq (1 + d_n)\|x_n\|. \quad (3.3)$$

Правая часть этого неравенства вместе с (3.1) влечет

$$\|x_{n+1}\| \leq \prod_{k=1}^n (1 + d_k) \|x_1\| \leq \exp\left(\sum_k d_k\right) \|x_1\| \leq M,$$

где M – постоянная.

Из левой части (3.3) при $n \geq m$ следует

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x_{n-1}\| + \dots + \|x_{m+1} - x_m\| \leq (d_{n-1} + d_{n-2} + \dots + d_m)M,$$

откуда в силу сходимости ряда (3.1) получаем фундаментальность последовательности $\{x_n\}$.

Приведем вариацию предложения 4 для $A^*(K)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если $\{\mathcal{L}_n\}$ – последовательность функционалов из $A^*(K)$ с характеристическими функциями L_n и для последовательности $\{d_n\}$, удовлетворяющей (3.1), выполнены оценки

$$\|\mathcal{L}_{n+1} - \mathcal{L}_n\|^* \leq d_n \|\mathcal{L}_n\|, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.4)$$

то последовательность функционалов $\mathcal{L}_n$ сходится в $A^*(K)$ к некоторому функционалу $\mathcal{G} \in A^*(K)$ с характеристической функцией G , а последовательность целых функций L_n сходится к функции G по норме

$$\|L\|_K^* = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|L(z)|}{\exp(k(-\arg z)|z|)}, \quad (3.5)$$

где L – произвольная характеристическая функция функционала из $A^*(K)$, k – опорная функция выпуклого компакта K .

В частности, если предел последовательности целых функций L_n в топологии равномерной сходимости на компактах – ненулевая целая функция, то функционал $\mathcal{G} \in A^*(K)$ ненулевой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию (3.4) и по предложению 4 последовательность $\mathcal{L}_n$ фундаментальная в $A^*(K)$. Пространство, сильно сопряженное к нормированному, банахово. Значит, эта последовательность сходится в $A^*(K)$ к некоторому функционалу $\mathcal{G} \in A^*(K)$. По определению (1.8) имеем $|L_n(z) - G(z)| = |(\mathcal{L}_n - \mathcal{G})(e^{z\zeta})|$. Отсюда ввиду (1.8) для некоторой определяющей меры $\mathbf{m}_n \in C^*(\partial K)$ функционала $\mathcal{L}_n - \mathcal{G}$ такой, что $\text{Var}[\mathbf{m}_n] = \|\mathcal{L}_n - \mathcal{G}\|^*$, получаем

$$\begin{aligned} |L_n(z) - G(z)| &\leq \text{Var}[\mathbf{m}_n] \cdot \sup_{\zeta \in K} |\exp(z\zeta)| \\ &= \|\mathcal{L}_n - \mathcal{G}\|^* \cdot \sup_{\zeta \in K} \exp(\text{Re}(z\zeta)) = \|\mathcal{L}_n - \mathcal{G}\|^* \cdot k(-\arg z)|z|. \end{aligned}$$

Это устанавливает сходимость по норме (3.5) для характеристических функций. Эта сходимость сильнее, чем равномерная сходимость на компактах, откуда следует заключительное утверждение.

4. Доказательство теоремы об устойчивости полноты. В силу симметричности условия (0.4) по Λ и Γ достаточно доказать, что неполнота $\text{Exp } \Lambda$ на K влечет неполноту $\text{Exp } \Gamma$ на K .

Если система $\text{Exp } \Lambda$ неполна на K , то по теореме Хана–Банаха найдется ненулевой функционал $\mathcal{L} \in A^*(K)$, аннулирующий систему $\text{Exp } \Lambda$. После преобразования Лапласа (1.8) это означает, что ненулевая характеристическая функция L обращается в нуль на последовательности Λ в том смысле, что кратность нуля функции L в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C}$ не меньше числа повторений точки λ в последовательности Λ .

Рассмотрим последовательность целых функций L_n , $n = 1, 2, \dots$, построенную рекуррентно по следующему правилу:

$$L_1 = L, \quad L_{n+1}(z) \equiv \frac{z - \gamma_n}{z - \lambda_n} L_n(z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.1)$$

Легко показать, что последовательность целых функций L_n равномерно на компактах сходится к ненулевой целой функции G , обращающейся в нуль на последовательности Γ .

Конструкция каждой пары целых функций L_n и L_{n+1} точно такая же, как пары L и G в предложении 3, $\lambda = \lambda_n$, $\gamma = \gamma_n$. Тогда по предложению 3 выполнены оценки (3.4) для $d_n = S \cdot |\lambda_n - \gamma_n|$. По условию (0.4) ряд (3.1) сходится. По предложению 5 последовательность функционалов $\mathcal{L}_n$ сходится в $A^*(K)$ к функционалу $\mathcal{G} \in A^*(K)$, аннулирующему систему $\text{Exp } \Gamma$, с характеристической функцией G . Эта функция ненулевая, так как сходимость по норме (3.5) сильнее равномерной сходимости на компактах в $\mathbb{C}$. Значит, $\mathcal{G}$ – ненулевой функционал из $A^*(K)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Модифицируя примеры Седлецкого [7, с. 805] и Петерсона [20] для отрезка, можно показать, что в теореме об устойчивости полноты, вообще говоря, нельзя заменить условие (0.4) на условие $|\lambda_n - \gamma_n| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, или на условие

$$\sum_n w(n) |\lambda_n - \gamma_n| < +\infty$$

с какой-либо последовательностью $w(n) > 0$ такой, что $\inf\{w(n)\} = 0$. Построение таких примеров достаточно трудоемко, и здесь мы на этом не останавливаемся.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Физматгиз, 1956.
- [2] Levin B. Ya. Lectures on Entire Functions. Transl. Math. Monographs. V. 150. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1996.
- [3] Alexander W., O., Redheffer R. M. The excess of sets of complex exponentials // Duke Math. J. 1967. V. 34. № 1. P. 59–72.
- [4] Redheffer R. M. Completeness of sets of complex exponentials // Adv. Math. 1967. V. 24. P. 1–62.
- [5] Elsner J. Zulässige Abänderung von Exponentialsystemen im $L^p(-A, A)$ // Math. Z. 1971. V. 120. № 3. P. 211–220.
- [6] Седлецкий А. М. Об устойчивости полноты и минимальности в L^2 системы показательных функций // Матем. заметки. 1974. Т. 15. № 1. С. 213–219.
- [7] Седлецкий А. М. Избытки систем показательных функций // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 6. С. 803–814.
- [8] Седлецкий А. М. Избытки систем экспоненциальных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 1. С. 203–218.
- [9] Седлецкий А. М. Избытки близких систем экспонент в L^p // Сиб. матем. ж. 1983. Т. 24. № 4. С. 164–175.
- [10] Седлецкий А. М. Избытки систем показательных функций // Сиб. матем. ж. 1985. Т. 26. № 4. С. 151–158.
- [11] Седлецкий А. М. О целых функциях класса С. Н. Бернштейна, не являющихся преобразованиями Фурье–Стилтьеса // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 3. С. 367–379.
- [12] Напалков В. В. Аппроксимация функций многих переменных с учетом роста коэффициентов аппроксимирующих агрегатов // Матем. сб. 1980. Т. 111. № 1. С. 144–156.
- [13] Шилова Г. Н. Аппроксимация линейными комбинациями экспонент с ограничениями на коэффициенты. Дисс. . . к. ф.-м. н. Уфа, 1992.
- [14] Хабибуллин Б. Н. Об устойчивости последовательностей неединственности и полноты систем экспонент // Актуальные проблемы математического анализа. Ростов-на-Дону: Изд-во ГинГо, 2000. С. 156–164.
- [15] Коробейник Ю. Ф. О некоторых свойствах абсолютно представляющих систем // Линейные операторы в комплексном анализе. Ростов-на-Дону: РГУ, 1994. С. 58–65.
- [16] Хабибуллин Б. Н. Об устойчивости полноты систем экспонент в выпуклом компакте // Материалы Международной конференции “Актуальные проблемы математики и механики”, посвященной 40-летию мехмата КГУ. Т. 5. Казань: КГУ, 2000. С. 213–214.
- [17] Khabibullin B. N. Stability of completeness and minimality of system of complex exponentials // Материалы Международного научного семинара-совещания “Методы функционального анализа и теории функций в различных задачах математической физики”. Уфа: БашГУ, ИМВЦ УНЦ РАН, 2000. С. 72.
- [18] Levinson N. Gap and Density Theorem. Amer. Math. Soc. Publ. V. 26. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1940.
- [19] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
- [20] Peterson D. The excess of sets of complex exponentials // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. V. 44. № 2. P. 321–325.

Башкирский государственный университет, г. Уфа
 E-mail: algeom@bsu.bashedu.ru, khabib-bulat@mail.ru

Поступило
 28.11.2000
 Исправленный вариант
 20.11.2001