Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Ю. Шамарова, Об аппроксимации поверхностных мер
в локально выпуклом пространстве, *Матем. заметки*,
2002, том 72, выпуск 4, 597–616

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm448>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:36:48

УДК 517.988

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ МЕР В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Э. Ю. Шамарова

Основным результатом работы является получение аналога теоремы о поверхностном слое для меры, заданной на локально выпуклом пространстве, обладающем непрерывно и плотно вложенным гильбертовым подпространством (для поверхности конечной коразмерности). Ранее теорема о поверхностном слое была доказана только для случая банахова пространства: для поверхностей коразмерности 1 Углановым (1979) и для произвольной конечной коразмерности Яхлаковым (1990); в этих работах в определении поверхностного слоя и в доказательстве теоремы существенно использовалось наличие нормы в исходном пространстве.

Библиография: 9 названий.

Основным результатом работы является получение аналога теоремы о поверхностном слое для меры, заданной на локально выпуклом пространстве, обладающем непрерывно и плотно вложенным гильбертовым подпространством (для поверхности конечной коразмерности). Ранее теорема о поверхностном слое была доказана только для случая банахова пространства: в [1] и [2] для поверхностей коразмерности 1 и в [3] для поверхностей конечной коразмерности. В этих работах в определении поверхностного слоя и в доказательстве теоремы существенно использовалось наличие нормы в исходном пространстве.

В работе [4] подход, связанный с аппроксимацией поверхностной меры (Винера) нормированными мерами окрестностей поверхности (поверхностных слоев), был успешно применен для поверхностей бесконечной коразмерности.

1. Определения и вспомогательные результаты. Все используемые далее векторные пространства рассматриваются над полем вещественных чисел. Все рассматриваемые топологические пространства хаусдорфовы. Всюду далее E – локально выпуклое пространство (ЛВП), E' – его сопряженное, H – векторное подпространство пространства E , наделенное структурой гильбертова пространства относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ (соответствующую норму обозначим $\|\cdot\|$), H' – его сопряженное, причем H плотно в E и тождественное вложение H в E непрерывно, $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$ – пространство непрерывных линейных операторов.

В силу плотности H в E , отображение $E' \rightarrow H'$, задаваемое сужением линейных непрерывных функционалов на E на подпространство H (сопряженное вложению H в E), инъективно. Отождествим H' и H по теореме Рисса и соответствующее отображение $E' \rightarrow H$ обозначим j_H .

Конечномерное подпространство, порожденное системой $a = \{a_1, \dots, a_n\}$ линейно независимых векторов из H , обозначим R_a . Установим изометрию R_a с $\mathbb{R}^n$, считая, что

$$t_i \frac{a_i}{\|a_i\|} \leftrightarrow t_i, \quad t_i \in \mathbb{R}.$$

В этом смысле (если система векторов a фиксирована) отождествим R_a и $\mathbb{R}^n$.

Всюду далее под дифференцируемостью функций будем понимать дифференцируемость по Фреше [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $D_F \subset E$ – область и $F = (F_1, \dots, F_n): D_F \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, имеющая производную $F': D_F \rightarrow H'^n \cong H^n$ вдоль подпространства H . Пусть $S \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in D_F : F(x) = 0\}$, причем в каждой точке $x \in S$ система векторов $\{F'_1(x), \dots, F'_n(x)\}$ линейно независима в H . Назовем n -мерное пространство, натянутое на эту систему векторов, *нормальным подпространством* к S в точке x .

Пусть множество S такое, как в определении 1, $n^S(x)$ – ортонормированная система векторов $\{n^S_1(x), \dots, n^S_n(x)\}$, полученная из системы $\{F'_1(x), \dots, F'_n(x)\}$ ортогонализацией Шмидта. Пусть далее $B_x(\varepsilon) = \{x \in R_{n^S(x)} : \|x\| < \varepsilon\}$ – шар в нормальном пространстве $R_{n^S(x)}$. Для произвольного подмножества $B \subset S$ и каждого $\varepsilon > 0$ определим множество $B^\varepsilon = \{x + v : x \in B, v \in B_x(\varepsilon)\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество $G \subset E$ назовем *поверхностью*¹, если для него выполнены следующие условия 1–3.

УСЛОВИЕ 1. Множество G представляет собой график непрерывной функции f , определенной на выпуклой области $\mathcal{U}$ замкнутого подпространства T_b коразмерности n пространства E и принимающей значения в пространстве R_b , где $b = \{b_1, \dots, b_n\}$ – ортонормированная система векторов из H , ортогональная в H подпространству $H_b \stackrel{\text{def}}{=} T_b \cap H$.

Обозначим символом P_b оператор проектирования на подпространство T_b вдоль подпространства R_b .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Подпространство H_b всюду плотно в пространстве T_b и является замкнутым подпространством коразмерности n пространства H .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ввиду изоморфизма

$$T_b \times \mathbb{R}^n \rightarrow E, \quad (x, (t_1, \dots, t_n)) \mapsto x + \sum_{i=1}^n t_i f_i(x),$$

далее (там, где это удобно и не приводит к противоречиям) будем отождествлять пространства E и $T_b \times \mathbb{R}^n$; при этом будем считать, что функция f принимает значения в $\mathbb{R}^n$, и иногда будем писать f в виде $(f_1, \dots, f_n)$, где $f_i: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$. Аналогично, будем отождествлять функции, определенные на E , и соответствующие функции, определенные (естественным образом с помощью указанного выше изоморфизма) на $T_b \times \mathbb{R}^n$.

¹Это определение поверхности не совпадает с определением, данным в [1], [2], [6]. В указанных работах под поверхностью понимается более общий объект, поэтому мы можем (и – ниже – будем без специальных оговорок) применять полученные в них результаты для рассматриваемых нами поверхностей.

УСЛОВИЕ 2. Функция f имеет непрерывные

первую производную $f': \mathcal{U} \rightarrow H'_b \cong H_b^n$;

вторую производную $f'': \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(H_b, H'_b)^n \cong \mathcal{L}(H_b, H_b)^n$;

третью производную $f''': \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(H_b, \mathcal{L}(H_b, H_b))^n \cong \mathcal{L}(H_b, \mathcal{L}(H_b, H_b))^n$

вдоль подпространства H , причем существует константа $K_f > 0$ такая, что для всех $x \in \mathcal{U}$ и $0 \leq i \leq n$ выполнены оценки

$$\|f'_i(x)\| \leq K_f, \quad \|f''_i(x)\|_{\mathcal{L}(H_b, H_b)} \leq K_f, \quad \|f'''_i(x)\|_{\mathcal{L}(H_b, \mathcal{L}(H_b, H_b))} \leq K_f,$$

где $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H_b, H_b)}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H_b, \mathcal{L}(H_b, H_b))}$ – операторные нормы в соответствующих пространствах.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Множество G можно представить в виде

$$G = \{(x, v) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n : \Phi(x, v) = 0\},$$

где функция Φ определена так:

$$\Phi: \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, v) \mapsto v - f(x).$$

Функция Φ дифференцируема вдоль подпространства H (в силу дифференцируемости функции f вдоль H_b), причем система векторов $\Phi'(x, v) = \{\Phi'_1(x, t_1), \dots, \Phi'_n(x, t_n)\}$, где $\Phi'_i: \mathcal{U} \times \mathbb{R} \rightarrow H' \cong H$, $v = (t_1, \dots, t_n)$, линейно независима в каждой точке $(x, v) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$. Действительно, пусть $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ – ортонормированный базис в H , причем $e_i = b_i$ для всех $0 \leq i \leq n$. Тогда

$$\Phi'_i(x, t_i) = \sum_{k=1}^\infty (\Phi'(x, t_i), e_k) e_k = b_i - \sum_{k=2}^\infty (f'_i(x), e_k) e_k = b_i - f'_i(x)$$

для всех $0 \leq i \leq n$. Так как для всех $x \in \mathcal{U}$ векторы $f'_i(x)$ принадлежат пространству H_b , ортогональному R_b , то в силу ортогональности системы векторов b система векторов $\Phi'(x, v)$ линейно независима. Следовательно, в каждой точке $(x, v) \in G$ определена система векторов $n^G(x, v)$. Покажем, что система $n^G(x, v)$ такова, что $\det\{(b_i, n^G_j(x, v))\}$ отделен от нуля некоторой константой $\sigma > 0$. Действительно, пусть $\{N_1(x, v), \dots, N_n(x, v)\}$ – система векторов, которая получается из системы $\Phi'(x, v)$ ортогонализацией Шмидта. Нетрудно видеть, что

$$\det\{(b_i, n^G_j(x, v))\} = \left(\prod_{i=1}^n \|N_i(x, v)\| \right)^{-1}.$$

Но в силу условия 2 величины $\|N_i(x, v)\|$ оказываются ограниченными на $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Так как существует биекция

$$g_f: \mathcal{U} \rightarrow G, \quad x \mapsto x + \sum_{i=1}^n f_i(x) b_i$$

области $\mathcal{U}$ на множество G , то всюду далее областью определения отображения n^G будем считать область $\mathcal{U}$ и вместо $n^G(x, v)$, где $(x, v) \in G$, будем писать просто $n^G(x)$, считая, что $x \in \mathcal{U}$.

УСЛОВИЕ 3. Пусть $v = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $B(\varepsilon) = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| < \varepsilon\}$. Существует $\varepsilon_b > 0$ такое, что отображение g_f может быть продолжено до взаимно однозначного (на образ) отображения

$$\varphi: \mathcal{U} \times B(\varepsilon_b) \rightarrow E, \quad (x, v) \mapsto g_f(x) + \sum_{i=1}^n t_i n_i^G(x),$$

$$G^{\varepsilon_b} \equiv \varphi(\mathcal{U} \times B(\varepsilon_b)) \subset E,$$

причем обратное отображение $\psi = \varphi^{-1}$ непрерывно на G^{ε_b} .

Далее для простоты все доказательства проведем для поверхностей коразмерности 1, хотя сами утверждения справедливы для поверхностей произвольной конечной коразмерности.

ЛЕММА 1. Для всех $x \in \mathcal{U}$ выполнено $(n^G)'(x) \in \mathcal{L}(H_b, H)^n$ и $(n^G)''(x) \in \mathcal{L}(H_b, \mathcal{L}(H_b, H))^n$, причем существует константа $K_n > 0$ такая, что для всех $0 \leq i \leq n$ выполнены оценки

$$\|(n_i^G)'(x)\|_{\mathcal{L}(H_b, H)} < K_n, \quad \|(n_i^G)''(x)\|_{\mathcal{L}(H_b, \mathcal{L}(H_b, H))} < K_n. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя равенство

$$n^G(x) = \frac{b - f'(x)}{\sqrt{1 + \|f'(x)\|^2}}$$

по произвольному направлению $h \in H_b$, получим

$$(n^G)'(x)h = \frac{(f'(x) - b)(f'(x), f''(x)h)}{(1 + \|f'(x)\|^2)^{3/2}} - \frac{f''(x)h}{(1 + \|f'(x)\|^2)^{1/2}}. \quad (2)$$

Отсюда и из условия 2 следует, что $(n^G)'(x) \in \mathcal{L}(H_b, H)$, причем равенство (2) влечет следующую оценку:

$$\|(n^G)'(x)\| \leq (\|f'(x)\| + 1)\|f'(x)\| \cdot \|f''(x)\| + \|f''(x)\| < (K_f + 1)K_f^2 + K_f.$$

Дифференцируя (2) вдоль произвольного вектора $h_1 \in H_b$ и учитывая вновь условие 2, получим справедливость второй оценки из (1).

ЛЕММА 2. Пусть X, X_1 – ЛВП, $X_1 \subset X$ непрерывно вложено, и пусть отображение $\Psi: X \supset D(\Psi) \rightarrow X$ имеет производную $\Psi': D(\Psi) \rightarrow \mathcal{L}(X_1, X_1)$ (по X_1). Пусть кривая $\gamma: [0, 1] \rightarrow D(\Psi)$ такова, что в некоторой точке $t_0 \in [0, 1]$ существует производная $(d\gamma/dt)(t_0)$ в топологии пространства X_1 . Тогда в точке t_0 существует производная сложной функции $\Psi \circ \gamma$, причем

$$\left. \frac{d}{dt}(\Psi \circ \gamma)(t) \right|_{t=t_0} = \Psi'(\gamma(t_0)) \frac{d\gamma}{dt}(t_0).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. То, что производная $(d\gamma/dt)(t_0)$ существует в топологии пространства X_1 , означает, что, для всех t из некоторой окрестности точки t_0 выполнено $\gamma(t) - \gamma(t_0) \in X_1$ и предел

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \equiv \frac{d\gamma}{dt}(t_0)$$

существует в топологии пространства X_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2 очевидно.

ЛЕММА 3. *Отображение φ непрерывно на $\mathcal{U} \times B(\varepsilon_b)$ и имеет первую производную $\varphi': \mathcal{U} \times B(\varepsilon_b) \rightarrow \mathcal{L}(H, E)$ и вторую производную $\varphi'': \mathcal{U} \times B(\varepsilon_b) \rightarrow \mathcal{L}(H, \mathcal{L}(H, E))$ вдоль подпространства H , причем φ' принимает значения в пространстве $\mathcal{L}(H, H)$, а φ'' – в пространстве $\mathcal{L}(H, \mathcal{L}(H, H))$ и существует константа $K_\varphi > 0$ такая, что $\|\varphi'(x)\|_{\mathcal{L}(H, H)} < K_\varphi$ и $\|\varphi''(x)\|_{\mathcal{L}(H, \mathcal{L}(H, H))} < K_\varphi$ для всех $x \in \mathcal{U} \times B(\varepsilon_b)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение φ непрерывно в силу своего определения (условие 3) и в силу непрерывности отображения n^G . Проверим дифференцируемость. Если $(x, t) \in \mathcal{U} \times (-\varepsilon_b, \varepsilon_b)$, $h \in H$, $\tau \in \mathbb{R}$, то

$$\begin{aligned} \varphi(x + tb + \tau h) &= \varphi(x + \tau P_b h + (t + \tau(h, b))b) \\ &= x + \tau P_b h + f(x + \tau P_b h)b + (t + \tau(b, h))n^G(x + \tau P_b h). \end{aligned}$$

Вычисляя производную этого выражения по τ в точке $\tau = 0$ и используя при этом леммы 2 и 1, получим

$$\begin{aligned} \varphi'(x, t)h &= \left. \frac{d\varphi}{d\tau} \right|_{\tau=0} = P_b h + (f'(x), P_b h)b + (b, h)n^G(x) + t(n^G)'(x)P_b h \\ &= (f'(x) - b, h)b + (b, h)n^G(x) + h + t(n^G)'(x)P_b h. \end{aligned} \quad (3)$$

В силу леммы 1 $(n^G)'(x) \in \mathcal{L}(H_b, H)$, откуда $\varphi'(x, t) \in \mathcal{L}(H, H)$. Дифференцируя равенство (3) и вновь учитывая лемму 1, получим, что $\varphi''(x, t) \in \mathcal{L}(H, \mathcal{L}(H, H))$. Ограниченность производных φ' и φ'' следует из условия 2 и леммы 1.

ЛЕММА 4. *Существует $\varepsilon'_b < \varepsilon_b$ такое, что отображение ψ имеет первую производную $\psi': G^{\varepsilon'_b} \rightarrow \mathcal{L}(H, H)$ и вторую производную $\psi'': G^{\varepsilon'_b} \rightarrow \mathcal{L}(H, \mathcal{L}(H, H))$ вдоль подпространства H , причем существует константа K_ψ такая, что для всех $x \in G^{\varepsilon'_b}$*

$$\|\psi'(x)\|_{\mathcal{L}(H, H)} < K_\psi, \quad \|\psi''(x)\|_{\mathcal{L}(H, \mathcal{L}(H, H))} < K_\psi.$$

Далее индексы у норм $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H, H)}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H, \mathcal{L}(H, H))}$ будем опускать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\omega \in \mathcal{U} \times (-\varepsilon_b, \varepsilon_b)$ определим функцию

$$\varphi_\omega: (\mathcal{U} \times (-\varepsilon_b, \varepsilon_b) - \omega) \cap H \rightarrow H, \quad u \mapsto \varphi(\omega + u) - \varphi(\omega).$$

Аналогично, для каждого $\omega \in G^{\varepsilon_b}$ определим функцию

$$\psi_\omega: G^{\varepsilon_b} \cap H \rightarrow H, \quad u \mapsto \psi(\omega + u) - \psi(\omega).$$

Фиксируем произвольную точку $\omega_0 \in G^{\varepsilon_b}$. Непосредственно проверяется, что

$$\varphi_{\psi(\omega_0)}(\psi_{\omega_0}(u)) = u.$$

Обозначим $\psi(\omega_0)$ символом w_0 и рассмотрим уравнение $\varphi_{w_0}(v) = u$. Далее мы покажем, что при некотором $\varepsilon'_b < \varepsilon_b$ для $\omega_0 \in G^{\varepsilon'_b}$ выполнены все условия теоремы о дифференцируемости обратной функции ψ_{ω_0} в точке $u = 0$ [7]. Действительно, для всех $w \in \mathcal{U} \times (-\varepsilon_b, \varepsilon_b)$ выполнено $(\varphi_w)'(v) = \varphi'(w + v) \in \mathcal{L}(H, H)$, и $(\varphi_w)'$ является непрерывной функцией в своей области определения, так как она является дифференцируемой в этой области. Далее, найдем $\varepsilon'_b < \varepsilon_b$ такое, что для $w \in \mathcal{U} \times (-\varepsilon'_b, \varepsilon'_b)$ оператор $(\varphi_w)'(0)$ обратим. Пусть сначала $w \in \mathcal{U}$. Запишем w в виде $w = (x, 0)$, где $x \in \mathcal{U}$. В силу леммы 3 $(\varphi_w)' = \varphi'(x, 0) \in \mathcal{L}(H, H)$. Покажем, что $\varphi'(x, 0)$ является биекцией. Отсюда по теореме Банаха об обратном операторе будет вытекать существование $(\varphi'(x, 0))^{-1} \in \mathcal{L}(H, H)$. Для $h \in H$ из доказательства леммы 3 получим

$$\varphi'(x, 0)h = (f'(x) - b, h)b + (b, h)n^G(x) + h = (K + I)h,$$

где $K = (f'(x) - b, h)b + (b, h)n^G(x)$ — конечномерный оператор, для которого справедливо $\ker(K + I) = \{0\}$. Действительно, всякий вектор $h \in \ker(K + I)$ может быть записан в виде $h = -Kh$, и, следовательно, $h \in \text{Im } K$. Поэтому в случае, когда векторы b и $n^G(x)$ линейно независимы, найдутся $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ такие, что $h = \alpha b + \beta n^G(x)$. Подставляя это выражение в уравнение

$$(K + I)h = 0 \tag{4}$$

и учитывая, что

$$n^G(x) = \frac{b - f'(x)}{\sqrt{1 + \|f'(x)\|^2}},$$

получим пару определяющих числа α и β уравнений:

$$-\beta\sqrt{1 + \|f'(x)\|^2} = 0, \quad \alpha + \beta(1 + (b, n^G(x))) = 0.$$

Эта система имеет, очевидно, только тривиальное решение, а значит, $h = 0$. Если векторы b и $n^G(x)$ линейно зависимы, то, как легко видеть, $b = n^G(x)$. В этом случае решение уравнения (4) имеет вид $h = \alpha b$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Подставляя это в (4), мы вновь получим $h = 0$. Значит, по теореме Фредгольма оператор $K + I (= \varphi'(x, 0))$ обратим. Таким образом, для всех $w \in \mathcal{U}$ оператор $(\varphi_w)'(0) = \varphi'(w)$ обратим и в силу теоремы о дифференцируемости обратной функции [7] для всех $\omega \in G$

$$\psi'(\omega) = (\psi_\omega)'(0) = ((\varphi_w)'(0))^{-1} \in \mathcal{L}(H, H), \quad w = \psi(\omega).$$

Покажем далее, что $\psi'(\omega)$ (как функция ω) ограничена на G по норме пространства $\mathcal{L}(H, H)$. Для $\omega \in G$ найдем явный вид оператора $\psi'(\omega)$. Для этого положим $\omega = (x, f(x))$ и для всех $h' \in H$ разрешим относительно h уравнение

$$(f'(x) - b, h)b + (b, h)n^G(x) + h = h'. \tag{5}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $b \neq n^G(x)$ (что означает линейную независимость векторов b и $n^G(x)$). Учитывая, что $h = h' - (f'(x) - b, h)b - (b, h)n^G(x)$, будем искать h в виде $h = h' + \alpha b + \beta n^G(x)$. Подставляя это в уравнение (5), получим следующие выражения для α и β :

$$\beta = \frac{(f'(x) - b, h')}{\sqrt{1 + \|f'(x)\|^2}}, \quad \alpha = -\beta - (b, h' + \beta n^G(x)).$$

Используя эти равенства и учитывая единственность решения, получим следующую оценку для $\psi'(\omega)$:

$$\|\psi'(\omega)h'\| = \|h' + \alpha b + \beta n^G(x)\| \leq \|h'\| + |\alpha| + |\beta|.$$

Далее,

$$|\beta| \leq \frac{\|f'(x) - b\|}{\sqrt{1 + \|f'(x)\|^2}} \|h'\| = \|h'\|, \quad |\alpha| \leq 2|\beta| + \|h'\| \leq 3\|h'\|.$$

Следовательно, $\|\psi'(\omega)\| \leq 5$ для всех $\omega \in G$. Пусть теперь $b = n^G(x)$. Решение уравнения (5) будем искать в виде $h = h' + \alpha b$. Подставляя это в уравнение (5), получим $\alpha = -(f'(x), h')$. Значит, $\|\psi'(\omega)\| \leq 1 + K_f$.

Далее, перепишем выражение для $\varphi'(x, t)$, где $x \in \mathcal{U}$, $t \in (-\varepsilon_b, \varepsilon_b)$ (доказательство леммы 3):

$$\varphi'(x, t)h = (f'(x) - b, h)b + (b, h)n^G(x) + h + t(n^G)'(x)P_b h = A_0 h + \Delta A_t h,$$

где $A_0 = \varphi'(x, 0)$, $\Delta A_t = t(n^G)'(x)P_b$. Из леммы 1 вытекает оценка

$$\|\Delta A_t\| \leq \|(n^G)'(x)\|t \leq K_n t,$$

значит существует $t_0 > 0$ такое, что для всех $t \in (-t_0, t_0)$

$$\|\Delta A_t\| < \frac{1}{2K}, \quad (6)$$

где $K = \max\{5, K_f + 1\}$. Следовательно, $\|\Delta A_t\| < \|A_0^{-1}\|^{-1}$. По теореме об обратимости возмущенного оператора для всех $t \in (-t_0, t_0)$ существует $(A_0 + \Delta A_t)^{-1} \in \mathcal{L}(H, H)$. Положим значение ε'_b равным значению t_0 . Применяя вновь теорему о дифференцируемости обратной функции, получим, что для всех $\omega \in G^{\varepsilon'_b}$

$$\psi'(\omega) = (\psi_w)'(0) = ((\varphi_w)'(0))^{-1} \in \mathcal{L}(H, H), \quad w = \psi(\omega).$$

Далее,

$$(A_0 + \Delta A_t)^{-1} = (I + A_0^{-1}\Delta A_t)^{-1}A_0^{-1} = A_0^{-1} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (A_0^{-1}\Delta A_t)^n\right)A_0^{-1}.$$

Отсюда в силу (6) получим, что

$$\|(A_0 + \Delta A_t)^{-1}\| \leq \|A_0^{-1}\| + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|A_0^{-1}\|^n \|\Delta A_t\|^n\right) \|A_0^{-1}\| \leq K \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2K.$$

Другими словами, для всех $\omega \in G^{\varepsilon'_b}$ выполнена оценка $\|\psi'(\omega)\| \leq 2K$.

Покажем теперь дифференцируемость функции $(\psi_{\omega_0})'$ (напомним, что ω_0 было фиксировано, $w_0 = \psi(\omega_0)$). Так как функция $(\varphi_{w_0})'$ дифференцируема (на $(\mathcal{U} \times (-\varepsilon'_b, \varepsilon'_b) - w_0) \cap H$), то она непрерывна. Операторная функция $\mathcal{L}(H, H) \rightarrow \mathcal{L}(H, H)$, $A \mapsto A^{-1}$ также непрерывна в любой точке $A \neq 0$. Так как $(\varphi_{w_0})'$ отлична от нуля на $(\mathcal{U} \times (-\varepsilon'_b, \varepsilon'_b) - w_0) \cap H$ (обратимость), то $(\psi_{\omega_0})'$ непрерывна на $(G^{\varepsilon'_b} - \omega_0) \cap H$ как композиция непрерывных функций. Учитывая это, получим

$$\begin{aligned} \psi''(\omega_0)h &= (\psi_{\omega_0})''(0)h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\psi_{\omega_0})'(th) - (\psi_{\omega_0})'(0)}{t} \\ &= - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\psi_{\omega_0})'(th)((\varphi_{w_0})'(th) - (\varphi_{w_0})'(0))(\psi_{\omega_0})'(0)}{t} \\ &= -(\psi_{\omega_0})'(0)(\varphi_{w_0})''h(\psi_{\omega_0})'(0) = -\psi'(\omega_0)\varphi''(\psi(\omega_0))h\psi'(\omega_0), \quad h \in H. \end{aligned}$$

Отсюда для всех $\omega \in G^{\varepsilon'_b}$ вытекает следующая оценка:

$$\|\psi''(\omega)\| \leq \|\psi'(\omega)\|^2 \|\varphi''(\omega)\| \leq K^2 K_\varphi.$$

Без ограничения общности далее будем считать, что $\varepsilon'_b = \varepsilon_b$.

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $D_F \subset E$ – область, $F: D_F \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, имеющая непрерывную производную $F': D_F \rightarrow H'^n \cong H^n$ вдоль подпространства H . Пусть $S = \{\omega \in D_F : F(\omega) = 0\}$ и система векторов $F'(\omega)$ является линейно независимой в каждой точке $\omega \in S$. Пусть, далее, T_b – замкнутое подпространство коразмерности n пространства E , $b = \{b_1, \dots, b_n\}$ – ортонормированная система векторов из $j_H(E')$ такая, что подпространство R_b ортогонально в H подпространству $H_b = T_b \cap H$ и $\det\{(n_i^S(\omega), b_j)\} > 0$ для всех $\omega \in S$ (здесь система векторов $n^S(\omega)$ получена из $F'(\omega)$ ортогонализацией Шмидта и нормировкой, а пространство E мы, как и ранее, отождествляем с пространством $T_b \times \mathbb{R}^n$ с помощью изоморфизма $T_b \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$, $(x, (t_1, \dots, t_n)) \mapsto x + \sum_{i=1}^n t_i b_i$). Тогда

- 1) существуют открытое (в T_b) множество $\mathcal{V} \subset T_b$ и непрерывная функция $g: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что $F(x, g(x)) = 0$ для всех $x \in \mathcal{V}$;
- 2) если функция F имеет все производные до порядка $k \geq 2$ включительно вдоль подпространства H , то функция g также имеет все производные до порядка $k \geq 2$ включительно вдоль H_b ;
- 3) если, кроме того, существуют константы $\lambda > 0$, $\sigma > 0$ и $C > 0$ такие, что для всех $\omega \in S$ и для всех $0 \leq i \leq n$ выполнено

$$\|F'_i(\omega)\| > \lambda, \quad \|F'_i(\omega)\| < C, \quad \|F''_i(\omega)\| < C, \quad \det\{(b_i, n_j^S(\omega))\} > \sigma,$$

то существует константа $C_g > 0$ такая, что $\|g'_i(x)\| < C_g$ и $\|g''_i(x)\| < C_g$ для всех $x \in \mathcal{V}$ и для всех $0 \leq i \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) справедливо в силу теоремы о существовании неявной функции [7]. Действительно, в каждой точке $(x, t) \in D_F$ существует непрерывная частная производная $(\partial/\partial t)F(x, t)$, отличная от нуля в каждой точке $(x, t) \in S$ в силу того, что

$$\frac{\partial}{\partial t}F(x, t) = F'(x + tb)b = \|F'(x + tb)\|(n(x + tb), b) > 0.$$

Далее, фиксируем произвольную точку $\omega = (x_0, g(x_0)) \in S$, где $x_0 \in \mathcal{V}$, и определим функции

$$\begin{aligned} F_\omega &: (D_F - \omega) \cap H \rightarrow \mathbb{R}, & u &\mapsto F(\omega + u), \\ g_{x_0} &: (\mathcal{V} - x_0) \cap H_b \rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto g(x_0 + x) - g(x_0). \end{aligned}$$

Так как $F(x, g(x)) = 0$ для $x \in \mathcal{V}$, то $F_\omega(x, g_{x_0}(x)) = 0$. Функция F_ω такова, что выполнены все условия теоремы о дифференцируемости неявной функции g_{x_0} в точке $(0, 0)$. Действительно, $(\partial/\partial t)F(x, t)$ – непрерывная функция $(D_F - \omega) \cap H \rightarrow \mathbb{R}$, так как

$$\frac{\partial}{\partial t}F_\omega(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}F(x + x_0, t + g(x_0)) = F'(x + x_0 + (t + f(x_0))b)b. \quad (7)$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial t}F_\omega(0, 0) = \|F'(x_0 + g(x_0)b)\|(n^S(\omega), b) > 0.$$

Наконец, в точке $(0, 0)$ существует частная производная

$$\frac{\partial}{\partial x}F_\omega(0, 0) = F'(x_0 + g(x_0)b).$$

Тогда в силу теоремы о неявной функции [7] функция g_{x_0} в точке $x = 0$ имеет производную

$$(g_{x_0})'(0) = -\frac{\partial}{\partial x}F_\omega(0, 0) / \frac{\partial}{\partial t}F_\omega(0, 0).$$

Замечая, что $(g_{x_0})'(0) = g'(x_0)$, а также учитывая, что $x_0 \in \mathcal{V}$ – произвольная точка, и преобразуя выражение справа, для всех $x \in \mathcal{V}$ и для всех $h \in H_b$ получим

$$g'(x)h = \frac{-F'(x + g(x)b)h}{F'(x + g(x)b)b} = \frac{\|F'(x + g(x)b)\|(-n^S(x), h)}{\|F'(x + g(x)b)\|(n^S(x), b)} = \frac{(P_b n^S(x), h)}{(n^S(x), b)}. \quad (8)$$

Следовательно, как элемент пространства H_b $g'(x)$ запишется в виде

$$g'(x) = \frac{P_b n^S(x)}{(n^S(x), b)}.$$

Утверждение 2) следует непосредственно из (8), при этом для второй производной функции g получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} g''(x)hh_1 &= -\frac{F''(x + g(x)b)hh_1 + (g'(x)h_1)F''(x + g(x)b)hb}{F'(x + f(x)b)b} \\ &+ \frac{(F'(x + g(x)b)h)F''(x + g(x)b)hb + (g'(x)h_1)F''(x + g(x)b)bb}{(F'(x + g(x)b)b)^2}, \end{aligned}$$

откуда, учитывая, что $F'(x + g(x)b)b = \|F'(x + g(x)b)\|(n^S(x), b)$, получим справедливость утверждения 3).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Мы могли бы определить поверхность G с помощью функции F , определенной на некотором открытом множестве $D_F \subset E$ и удовлетворяющей условиям теоремы 1, как множество точек вида $\{\omega \in D_F : F(\omega) = 0\}$, предположив при этом существование третьей производной функции F , ограниченной на D_F по норме пространства $\mathcal{L}(H, \mathcal{L}(H, H))^n$. Тогда в силу теоремы 1 будут выполнены условия 1–3.

2. Теоремы о поверхностном слое. Мерой на топологическом пространстве X называем вещественную σ -аддитивную функцию, определенную на σ -алгебре $\mathfrak{B}_X$ борелевских подмножеств пространства X ; под дифференцируемостью меры понимаем ее τ_s -дифференцируемость [8] (ср. [9]).

Пусть ν – неотрицательная мера Радона, определенная на E , $n + 1$ раз дифференцируемая вдоль подпространства R_b ; ν_G – поверхностная мера на G , определяемая аналогично [6] и [3] следующим образом:

$$\nu_G(Q) = \int_Q \frac{\nu^d(dx)}{\det\{(n_i^G(P_b x), b_j)\}}, \quad (9)$$

где

$$\nu^d(Q) = d_{b_1, \dots, b_n} \nu \left(\bigcup \left\{ Q + \sum_{i=1}^n s_i b_i : s_i \leq 0, 0 \leq i \leq n \right\} \right), \quad Q \in \mathfrak{B}_G$$

(здесь $d_{b_1, \dots, b_n} \nu$ – производная меры ν порядка n по направлениям $b_1, \dots, b_n$).

Аналогично [2] доказывается, что ν_G – (неотрицательная) мера на G .

Пусть $B \subset G$ – некоторое подмножество. В силу непрерывности отображения ψ для любого $\varepsilon \leq \varepsilon_b$ множество B^ε открыто, если множество B открыто, и множество B^ε борелевское, если B борелевское.

Для $B \in \mathfrak{B}_G$ и для каждого $\varepsilon \leq \varepsilon_b$ определим множество

$$B_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x + \sum_{i=1}^n t_i n_i^G(x) : x \in B, 0 \leq i \leq n, 0 \leq t_i < \varepsilon \right\}, \quad (10)$$

которое в силу непрерывности отображения ψ является борелевским. Пусть ν_T – проекция меры ν на T_b вдоль подпространства R_b . Будем говорить, что борелевское множество $B \subset G$ обладает свойством (*), если $\nu_T(\partial P_b B) = 0$ (граница берется в G). Всюду далее $B(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \varepsilon\}$, λ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $B \subset G$ – подмножество, открытое относительно G , содержащееся в G вместе со своим замыканием относительно E и обладающее свойством (*). Тогда

$$\nu_G(B) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\nu(B^\varepsilon)}{\lambda(B(\varepsilon))}. \quad (11)$$

Ниже при доказательстве теоремы для простоты рассмотрен случай, когда $n = 1$. Доказательство теоремы опирается на следующие леммы 5–10.

ЛЕММА 5. Пусть $A \in \mathfrak{B}_\mathcal{H}$, $f_1, f_2 : A \rightarrow R_b$ – функции, $f_1 \leq f_2$, и

$$A_{f_1, f_2} \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in E : P_b \omega \in A, f_1(P_b \omega) \leq \omega - P_b \omega \leq f_2(P_b \omega)\}.$$

Тогда если $Q \subset A_{f_1, f_2}$ – борелевское множество, то справедливо неравенство

$$\nu(Q) \leq 4|d_b \nu|(A + R_b) \sup(f_2 - f_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма доказана в [1] для случая сепарабельного банахова пространства. В нашем случае доказательство не изменится.

Определим отображение P_G “проектирования на G вдоль вектора нормали” следующим образом: $P_G: G^{\varepsilon_b} \rightarrow G, x + \varepsilon n^G(x) \mapsto x$. Легко видеть, что $P_G = \varphi(\cdot, 0) \circ P_b \circ \psi$. Следовательно, отображение P_G непрерывно как композиция непрерывных отображений.

Положим $G_\varepsilon = \varphi(\mathcal{U} + \varepsilon b)$. Обозначим символом $L_{\varepsilon, x}$ множество тех касательных векторов к G_ε в точке $x + \varepsilon n^G(x)$, где $x \in \mathcal{U}$, для каждого из которых существует кривая $\gamma: [0, 1] \rightarrow G_\varepsilon, \gamma(0) = x + \varepsilon n^G(x)$, такая, что производная $\dot{\gamma}(0)$ существует в топологии пространства H .

В следующей лемме областью определения отображения $x \mapsto n^G(x)$ удобно считать поверхность G .

ЛЕММА 6. Для всех $x \in G$ и для всех $\varepsilon < \varepsilon_b$ выполнено равенство $L_{\varepsilon, x} = H_x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную точку $x \in G$ и число $\varepsilon < \varepsilon_b$. Без ограничения общности будем считать, что $x + \varepsilon n^G(x) = 0$. При этом множество $L_{\varepsilon, x}$ будем обозначать просто L_ε . Покажем, что L_ε является подпространством коразмерности 1 пространства H .

Пусть F_b – линейный непрерывный функционал, представляемый элементом b . Определим функцию

$$\Psi: G^{\varepsilon_b} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto F_b(\psi(\omega)). \quad (12)$$

Тогда множество G_ε можно записать в виде $G_\varepsilon = \{\omega \in G^{\varepsilon_b} : \Psi(\omega) = \varepsilon\}$. Заметим, что в силу непрерывности отображения ψ множество G^{ε_b} открыто. Производная $\Psi'(\omega)$ (в топологии пространства H) отлична от нуля в каждой точке $\omega \in G^{\varepsilon_b}$. Действительно,

$$\Psi'(\omega)h = F_b(\psi'(\omega)h) = (b, \psi'(\omega)h) = ((\psi'(\omega))^*b, h). \quad (13)$$

Но отображение $(\psi'(\omega))^*$ инъективно в силу биективности отображения $\psi'(\omega)$. Поэтому $(\psi'(\omega))^*b \neq 0$.

Рассмотрим в пространстве H поверхность $G_\varepsilon \cap H$. Так как $\Psi'(\omega)$ отлична от нуля в каждой точке $\omega \in G^{\varepsilon_b}$, то касательное пространство в каждой точке этой поверхности (в частности, в точке $\omega = 0$) представляет собой подпространство коразмерности 1 пространства H . В частности, L_ε является подпространством коразмерности 1 пространства H .

Покажем, что $L_\varepsilon = H_x$. Пусть $\tau \in L_\varepsilon$ и $\gamma: [0, 1] \rightarrow G_\varepsilon \cap H$ – кривая такая, что $\gamma(0) = 0, \dot{\gamma}(0) = \tau$ (дифференцируемость в нуле в топологии пространства H). Положим $\gamma_1(t) = P_G(\gamma(t))$. Перепишем $\gamma_1(t)$ в виде $\gamma_1(t) = \varphi(P_b\psi(\gamma(t)), 0)$, откуда следует, что для всех $t \in [0, 1]$ $\gamma_1(t) \in H$ и в силу леммы 2 отображение $\gamma_1(\cdot)$ – дифференцируемо в точке $t = 0$ в топологии пространства H . Имеем $\gamma(t) = \gamma_1(t) + \varepsilon n^G(\gamma_1(t))$. Домножая скалярно это равенство на $n^G(x)$ и дифференцируя по t в точке $t = 0$, используя леммы 2 и 1, получим

$$(\tau, n^G(x)) = (\dot{\gamma}(0), n^G(x)) = (\dot{\gamma}_1(0), n^G(x)) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|n^G(\gamma_1(t))\|^2 \Big|_{t=0} = 0,$$

т.е. $\tau \in H_x$. Но оба подпространства L_ε и H_x имеют коразмерность 1 и поэтому совпадают.

ЛЕММА 7. *Существуют $\varepsilon'_b \in (0, \varepsilon_b)$ и константа $\lambda > 0$ такие, что для всех $\omega \in G^{\varepsilon'_b}$ выполнена оценка*

$$|(b, \psi'(\omega)b)| > \lambda. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях леммы 4

$$\psi'(x + tn^G(x)) = (A_0 + \Delta A_t)^{-1} = A_0^{-1} - A_0^{-1} \Delta A_t (A_0 + \Delta A_t)^{-1}.$$

Из доказательства леммы 4 вытекает, что $\|\Delta A_t\| < K_n t$ и $\|(A_0 + \Delta A_t)^{-1}\| < K_\psi$. Имеем следующую оценку:

$$|(b, \psi'(x + tn^G(x))b)| \geq |(b, \psi'(x)b)| - |(b, A_0^{-1} \Delta A_t (A_0 + \Delta A_t)^{-1}b)|. \quad (15)$$

Оценим первое слагаемое в (15). Пусть $\psi'(x)b = h$. Тогда $\varphi'(x, 0)h = b$, или

$$-k(x)(n^G(x), h)b + (b, h)n^G(x) + h = b, \quad (16)$$

где $k(x) = \sqrt{1 + \|f'(x)\|^2}$. Из этого уравнения следует, что его решение нужно искать в виде $h = \alpha n^G(x) + \beta b$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Подставляя это выражение в уравнение (16), получим следующую систему уравнений относительно α и β :

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{k(x) + (1 + p(x))(1 - p(x)k(x))}, \\ \beta = -\alpha(1 + p(x)), \end{cases}$$

где $p(x) = (b, n^G(x))$. Как было доказано ранее (лемма 4), $\varphi'(x, 0)$ является биекцией. Следовательно, найденное решение единственно. Заметим, что

$$(b, \psi'(x)b) = (b, \alpha n^G(x) + \beta b) = \alpha p(x) - \alpha(1 + p(x)) = -\alpha.$$

Учитывая, что $0 < k(x) < \sqrt{1 + K_f^2}$ и $0 < p(x) \leq 1$, получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} |k(x) + (1 + p(x))(1 - p(x)k(x))| &\leq k(x) + (1 + p(x))(1 + p(x)k(x)) \\ &\leq \sqrt{1 + K_f^2} + 2(1 + \sqrt{1 + K_f^2}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\lambda}, \end{aligned}$$

где λ – константа. Значит,

$$|(b, \psi'(x)b)| > 2\lambda. \quad (17)$$

Оценим второе слагаемое в (15):

$$|(b, A_0^{-1} \Delta A_t (A_0 + \Delta A_t)^{-1}b)| \leq \|A_0^{-1}\| \cdot \|\Delta A_t\| \cdot \|(A_0 + \Delta A_t)^{-1}\| \leq K_\psi^2 K_n t.$$

Выберем $t_0 > 0$ таким, что $K_\psi^2 K_n t_0 < \lambda$. Тогда с учетом (17) для всех $0 < t < t_0$ имеет место (14). Положим ε'_b равным этому значению t_0 .

Без ограничения общности будем считать $\varepsilon'_b = \varepsilon_b$.

ЛЕММА 8. Множество G_ε представляет собой график непрерывной функции $g_\varepsilon: \mathcal{U}(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, определенной на некотором открытом в T_b множестве $\mathcal{U}(\varepsilon)$, имеющей первую производную $g'_\varepsilon: \mathcal{U}(\varepsilon) \rightarrow H' \cong H$ и вторую производную $g''_\varepsilon: \mathcal{U}(\varepsilon) \rightarrow \mathcal{L}(H, \mathcal{L}(H, H))$ вдоль подпространства H , причем существует константа $K_g > 0$ такая, что $\|g''_\varepsilon(x)\| < K_g$ для всех $x \in \mathcal{U}(\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция Ψ определена, как и ранее, по формуле (12). Применим теорему 1 к функции $\Psi - \varepsilon$. Ранее было доказано, что отображение ψ' непрерывно, а значит непрерывно и отображение Ψ' . По-доказанному, производная $\Psi'(\omega)$ отлична от нуля в каждой точке $\omega \in G^{\varepsilon_b}$. Далее, в силу леммы 6 $n^{G^{\varepsilon_b}}(\omega) = n^G(x)$, где $x = P_b P_G(\omega)$. Поэтому в силу замечания 3 $(n^{G^{\varepsilon_b}}(\omega), b) > 0$ для всех $\omega \in G^{\varepsilon_b}$. В силу теоремы 1 существует непрерывная функция g_ε , определенная на некотором открытом множестве $\mathcal{U}(\varepsilon) \subset T_b$, имеющая первую и вторую производные вдоль подпространства H такая, что G_ε представляет собой график этой функции (тот факт, что функция Ψ имеет также и вторую производную вдоль подпространства H , следует из формулы (13)).

Теперь проверим выполнение условия 3) теоремы 1, откуда будет следовать, что $\|g''_\varepsilon(x)\|$ ограничена на $\mathcal{U}(\varepsilon)$ некоторой константой K_g . В силу замечания 3 и леммы 6 для всех $\omega \in G^{\varepsilon_b}$

$$(b, n^{G^{\varepsilon_b}}(\omega)) > \frac{1}{\sqrt{1 + K_f^2}} > 0.$$

Далее, в силу (13) и леммы 4 $\|\Psi''(\omega)\| < K_\psi$ для всех $\omega \in G^{\varepsilon_b}$.

Покажем, наконец, что существует константа $\lambda > 0$ такая, что $\|\Psi'(\omega)\| > \lambda$. Так как $|(b, n^{G^{\varepsilon_b}}(\omega))| \leq 1$ и $\|\Psi'(\omega)\| \cdot |(b, n^{G^{\varepsilon_b}}(\omega))| = |\Psi'(\omega)b|$, то достаточно показать, что $|\Psi'(\omega)b| > \lambda$. Но $\Psi'(\omega)b = F_b(\psi'(\omega)b) = (b, \psi'(\omega)b)$, и утверждение леммы следует теперь из леммы 7.

ЛЕММА 9. На множестве $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}(\varepsilon)$ функция g_ε имеет вид

$$g_\varepsilon(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{(n^G(x), b)} + \varepsilon^2 \alpha_\varepsilon(x),$$

причем существует $C > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_b)$ $|\alpha_\varepsilon(x)| < C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}(\varepsilon)$. Положим $x_1 = P_b(g_f(x_0) + \varepsilon n^G(x_0))$ и рассмотрим сужение функции g_ε на прямую, проходящую через точки x_0 и x_1 . Определим функцию

$$\tilde{g}_\varepsilon(t) = g_\varepsilon\left(x_1 + t \frac{x_0 - x_1}{\|x_0 - x_1\|}\right).$$

Положим $t_0 \stackrel{\text{def}}{=} \|x_0 - x_1\|$. Применяя к функции $\tilde{g}_\varepsilon$ формулу Тейлора, получим

$$\tilde{g}_\varepsilon(t_0) = \tilde{g}_\varepsilon(0) + \tilde{g}'_\varepsilon(0)t_0 + \frac{1}{2}\tilde{g}''_\varepsilon(\theta t_0)t_0^2,$$

где $\theta \in (0, 1)$.

Через точку $(x_1, g_\varepsilon(x_1))$ проведем касательную $k(t) = \tilde{g}_\varepsilon(0) + \tilde{g}'_\varepsilon(0)t$ к графику функции $\tilde{g}_\varepsilon$. В силу леммы 6 имеем

$$k(t_0) - f(x_0) = \frac{\varepsilon}{(b, n^G(x_0))}. \quad (18)$$

Далее, учитывая, что $\tilde{g}_\varepsilon(t_0) = g_\varepsilon(x_0)$, получим

$$g_\varepsilon(x_0) - f(x_0) = (k(t_0) - f(x_0)) + (g_\varepsilon(x_0) - k(t_0)), \quad (19)$$

где

$$|g_\varepsilon(x_0) - k(t_0)| = \left| \frac{1}{2} \tilde{g}_\varepsilon''(\theta t_0) \|x_0 - x_1\|^2 \right| \leq \frac{1}{2} K_g \varepsilon^2.$$

Отсюда, а также из (18) и (19), следует утверждение леммы.

ЛЕММА 10. Пусть $B \subset G$ – борелевское множество, содержащееся в G вместе со своим замыканием. Тогда существует константа $K > 0$ такая, что для любого $x \in T_b$, для любого $\varepsilon < \varepsilon_b$ множество $(x + R_b) \cap \overline{B}_\varepsilon$ ($\overline{B}_\varepsilon$ – замыкание B_ε) содержится в отрезке прямой $x + R_b$ длины меньшей $K\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что утверждение леммы достаточно доказать для замкнутого множества B . Положим $G_{\varepsilon, B} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(P_b B, \varepsilon)$. Прямая $x + R_b$ имеет непустое пересечение с $\overline{B}_\varepsilon$ в том и только том случае, когда $x \in P_b G_{\varepsilon, B} \cup P_b B$. Если $x \in P_b G_{\varepsilon, B} \cap P_b B$, то утверждение леммы следует из леммы 9.

Пусть $x \in P_b B \setminus P_b G_{\varepsilon, B}$ (если множество $P_b B \setminus P_b G_{\varepsilon, B}$ пусто, то рассуждения, касающиеся этого случая опустим). Подмножество $(x + R_b) \cap \overline{B}_\varepsilon$ числовой прямой $x + R_b$ замкнуто и ограничено и, следовательно, содержит свою точную верхнюю грань $\overline{\omega}$. Ясно, что $\bar{t} \stackrel{\text{def}}{=} \|P_G(\overline{\omega}) - \overline{\omega}\| < \varepsilon$. Пересечением множества $\overline{B}_\varepsilon$ с прямой $x + R_b$ является отрезок $[\varphi(x, 0), \overline{\omega}]$. Его длина равна $g_{\bar{t}}(x) - f(x)$. Утверждение леммы опять следует из леммы 9, примененной к функции $g_{\bar{t}}$.

Пусть теперь $x \in P_b G_{\varepsilon, B} \setminus P_b B$ и $\overline{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{(x + R_b) \cap \overline{B}_\varepsilon\}$ (если множество $P_b G_{\varepsilon, B} \setminus P_b B$ пусто, то лемма доказана). Пересечением множества $\overline{B}_\varepsilon$ с прямой $x + R_b$ является отрезок $[\overline{\omega}, x + g_\varepsilon(x)b]$. Оценим его длину. Пусть

$$y \stackrel{\text{def}}{=} P_b(P_G(\overline{\omega}) + \varepsilon n^G(P_b P_G(\overline{\omega}))).$$

Положим

$$e = \frac{x - y}{\|x - y\|}$$

и определим функцию $g_e(t) = g_\varepsilon(y + te)$, $t \in \mathbb{R}$. Положим $t_x \stackrel{\text{def}}{=} \|x - y\|$. Пусть k_e – касательная к графику функции $g_e(t)$ в точке $t = 0$. В силу леммы 6 касательная k_e ортогональна вектору $n^G(P_b P_G(\overline{\omega}))$. Тогда, учитывая, что $(b, n^G(x)) > 1/\sqrt{1 + K_f^2}$, получим следующую оценку:

$$\|x + k_e(t_x)b - \overline{\omega}\| = \frac{\|\overline{\omega} - y + g_\varepsilon(y)b\|}{(b, n^G(x))} < K_1 \varepsilon, \quad (20)$$

где K_1 – подходящая константа. В силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, существует $t_0 \in (0, t_x)$ такое, что

$$|g_e(t_x) - k_e(t_x)| = \left| \frac{1}{2} g_e''(t_0) t_x^2 \right| \leq \frac{1}{2} K_g \varepsilon^2.$$

Отсюда в силу (20) получим

$$\|x + g_\varepsilon(x)b - \bar{w}\| \leq \|x + k_e(t_x)b - \bar{w}\| + |g_e(t_x) - k_e(t_x)| < K\varepsilon,$$

где K – подходящая константа; мы также учли, что $g_e(t_x) = g_\varepsilon(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. На множестве $\mathcal{U} \times \mathbb{R}$ определим функцию

$$f(x, \varepsilon) = f(x) + \frac{\varepsilon}{(n^G(x), b)}.$$

Пусть $B \subset W_b$ – открытое множество, обладающее свойством (*). Положим $f_\varepsilon(x) = f(x, \varepsilon)$,

$$B_{f, f_\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \{x + tb, x \in P_b B, f(x) \leq t < f_\varepsilon(x)\}. \quad (21)$$

Применяя результаты работы [1] (очевидно, что условия, при которых эти результаты справедливы, выполнены), получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \nu(B_{f, f_\varepsilon}) = \int_B (n^G(x), b) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x, 0) \nu_G(dx) = \nu_G(B). \quad (22)$$

Здесь первое равенство справедливо в силу результатов [1]. Пусть B_ε – множество вида (10). Если доказать, что

$$\nu(B_\varepsilon \Delta B_{f, f_\varepsilon}) = o(\varepsilon) \quad (23)$$

при $\varepsilon < \varepsilon_b$, то будет справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \nu(B_\varepsilon) = \nu_G(B).$$

Меняя векторное поле нормалей на противоположное, и учитывая, что в силу леммы 5 $\nu(B) = 0$, получим справедливость (11). Покажем (23). Пусть $G_{\varepsilon, B} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(P_b B, \varepsilon)$. Положим

$$\begin{aligned} M_1 &\stackrel{\text{def}}{=} (B_\varepsilon \Delta B_{f, f_\varepsilon}) \cap (P_b B \cap P_b G_{\varepsilon, B} + R_b), \\ M_2 &\stackrel{\text{def}}{=} (B_\varepsilon \Delta B_{f, f_\varepsilon}) \cap (P_b B \setminus P_b G_{\varepsilon, B} + R_b), \\ M_3 &\stackrel{\text{def}}{=} (B_\varepsilon \Delta B_{f, f_\varepsilon}) \cap (P_b G_{\varepsilon, B} \setminus P_b B + R_b). \end{aligned}$$

Ясно, что $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = B_\varepsilon \Delta B_{f, f_\varepsilon}$. Множество $G_{\varepsilon, B}$ является открытым (в G_ε) как прообраз открытого (в $T_b + \varepsilon b$) множества $P_b B + \varepsilon b$ при непрерывном отображении ψ . В силу непрерывности функции g_ε множество $P_b G_{\varepsilon, B}$ является открытым (в T_b); следовательно, каждое из множеств M_1, M_2, M_3 является борелевским. Оценим меру каждого из них.

Для оценки $\nu(M_1)$ заметим, что M_1 имеет вид

$$M_1 = \{x + tb : x \in P_b B \cap P_b G_{\varepsilon, B}, \min\{f_\varepsilon(x), g_\varepsilon(x)\} \leq t < \max\{f_\varepsilon(x), g_\varepsilon(x)\}\}$$

(функция g_ε определена в лемме 9). В силу леммы 9

$$\max\{f_\varepsilon(x), g_\varepsilon(x)\} - \min\{f_\varepsilon(x), g_\varepsilon(x)\} < C\varepsilon^2,$$

где C – константа. Используя лемму 5, получим

$$\nu(M_1) \leq 4|d_b \nu|(P_b B \cap P_b G_{\varepsilon, B} + R_b) C \varepsilon^2 \leq 4|d_b \nu|(P_b B + R_b) C \varepsilon^2. \quad (24)$$

Оценим $\nu(M_2)$. Положим

$$M_{21} \stackrel{\text{def}}{=} (B_{f, f_\varepsilon} \setminus B_\varepsilon) \cap (P_b B \setminus P_b G_{\varepsilon, B} + R_b), \quad M_{22} \stackrel{\text{def}}{=} (B_\varepsilon \setminus B_{f, f_\varepsilon}) \cap (P_b B \setminus P_b G_{\varepsilon, B} + R_b).$$

Ясно, что множества M_{21} и M_{22} являются борелевскими и $M_{21} \cup M_{22} = M_2$. Оценим сначала $\nu(M_{21})$. Учитывая, что $M_{21} \subset B_{f, f_\varepsilon}$ и $\sup_x |f_\varepsilon(x) - f(x)| < C_1 \varepsilon$ (где C_1 – подходящая константа), используя лемму 5, получим

$$\nu(M_{21}) \leq 4C_1 \varepsilon |d_b \nu|(P_b B \setminus P_b G_{\varepsilon, B} + R_b). \quad (25)$$

Оценим $\nu(M_{22})$. Для $x \in P_b B \setminus P_b G_{\varepsilon, B}$ рассмотрим подмножество $(x + R_b) \cap \overline{B}_\varepsilon$ числовой прямой $x + R_b$. Оно замкнуто и ограничено и, следовательно, содержит свою точную верхнюю грань. На $P_b B \setminus P_b G_{\varepsilon, B}$ определим функцию

$$h_\varepsilon(x) = f(x) + \sup\{(x + R_b) \cap \overline{B}_\varepsilon\}.$$

Согласно лемме 10

$$\sup_x |h_\varepsilon(x) - f(x)| < K\varepsilon$$

для всех $\varepsilon < \varepsilon_b$. Тогда, учитывая, что $M_{22} \subset B_\varepsilon$, в силу леммы 5 получим

$$\nu(M_{22}) \leq 4K\varepsilon |d_b \nu|(P_b B \setminus P_b G_{\varepsilon, B} + R_b). \quad (26)$$

Покажем, что

$$|d_b \nu|(P_b B \setminus P_b G_{\varepsilon, B} + R_b) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (27)$$

Для этого достаточно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{I}_{P_b B \setminus P_b G_{\varepsilon, B}}(x) = 0, \quad x \in T_{x_0} \quad (28)$$

($\mathbb{I}$ – индикатор множества, стоящего в индексе). Действительно, из (28) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{I}_{(P_b B \setminus P_b G_{\varepsilon, B}) + R_b}(x) = 0, \quad x \in E,$$

откуда по теореме Лебега следует (27).

Для доказательства (28) достаточно показать, что для любой точки $x \in P_b B$ существует $\bar{\varepsilon} > 0$ такое, что для всех $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ выполнено $x \in P_b G_{\varepsilon, B}$. Возьмем произвольную точку $x \in P_b B$. Множество $(x + R_b) \cap B^\varepsilon$ является открытым подмножеством числовой прямой $x + R_b$. Выберем на прямой $x + R_b$ окрестность U_{ω_0} точки $\omega_0 = x + f(x)b$, содержащуюся в $(x + R_b) \cap B^\varepsilon$. Положим $\omega(t) = x + (f(x) + t)b$ ($t \in \mathbb{R}$). Пусть $\bar{t} > 0$ такое, что $\omega(\bar{t}) \in U_{\omega_0}$. На отрезке $[0, \bar{t}]$ определим функцию $\xi(t) = \|\omega(t) - P_G(\omega(t))\|$. Функция $\xi(t)$ непрерывна на отрезке $[0, \bar{t}]$. Действительно, функция ξ имеет вид $\xi(t) = \|P_b \psi(\omega(t)) - \psi(\omega(t))\|$, т.е. является композицией двух функций $\psi(\omega(t))$ и $k(\omega) = \|P_b \omega - \omega\|$. Функция $\psi(\omega(t))$ непрерывна как композиция непрерывных функций. Покажем непрерывность $k(\omega)$. Аргумент ω запишем в виде $\omega = (z, t)$, где $z \in T_b$, $t \in \mathbb{R}$ ($E \simeq T_b \times \mathbb{R}$). Тогда функция k перепишется в виде $k: (z, t) \mapsto t$, и ее непрерывность теперь очевидна. Следовательно, функция $\xi(t)$ непрерывна как композиция непрерывных функций. Возьмем в качестве $\bar{\varepsilon}$ значение $\xi(\bar{t})$. Ясно, что $x \in P_b G_{\bar{\varepsilon}, B}$. Но непрерывная функция $\xi(t)$ принимает на отрезке $[0, \bar{t}]$ все промежуточные значения от 0 до $\bar{\varepsilon}$. Следовательно, $x \in P_{x_0} G_{\varepsilon, B}$ для всех $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$. Справедливость (28) доказана.

Оценим теперь $\nu(M_3)$. Для $x \in P_b G_{\varepsilon, B} \setminus P_b B$ определим функцию

$$h_{1\varepsilon}(x) = g_\varepsilon(x) - \inf\{(x + R_b) \cap \overline{B_\varepsilon}\}.$$

Из леммы 10 следует, что

$$\sup_x |h_{1\varepsilon}(x) - g_\varepsilon(x)| < K\varepsilon$$

для всех $\varepsilon < \varepsilon_b$. Используя лемму 5, получим

$$\nu(M_3) \leq 4K\varepsilon |d_b \nu|(P_b G_{\varepsilon, B} \setminus P_b B + R_b). \quad (29)$$

Покажем, что

$$|d_b \nu|(P_b G_{\varepsilon, B} \setminus P_b B + R_b) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (30)$$

Положим $B_1 = \mathcal{U} \setminus \overline{B}$ ($\overline{B}$ – замыкание B). Множество B_1 открыто (в G). По доказанному в каждой точке $x \in T_b$ выполнено

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{I}_{P_b B_1 \setminus P_b G_{\varepsilon, B_1}}(x) = 0;$$

следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{I}_{P_b B_1 \setminus P_b \overline{G}_{\varepsilon, B_1}}(x) = 0, \quad x \in T_b.$$

Тогда, учитывая, что $(P_b G_{\varepsilon, B} \cap \mathcal{U}) \setminus P_b \overline{B} \subset P_b B_1 \setminus P_b \overline{G}_{\varepsilon, B_1}$, получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{I}_{(P_b G_{\varepsilon, B} \cap \mathcal{U}) \setminus P_b \overline{B}} = 0. \quad (31)$$

Покажем далее, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{I}_{P_b G_{\varepsilon, B} \setminus P_b \overline{B}} = 0. \quad (32)$$

Для этого с учетом (31) достаточно показать, что всюду на T_b

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{I}_{P_b G_{\varepsilon, B} \setminus \mathcal{U}}(x) = 0. \quad (33)$$

Фиксируем произвольную точку $x_0 \in T_b \setminus \mathcal{U}$. Предположим, что в точке x_0 сходимость (33) не имеет места. Тогда существует последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ такая, что $x_0 \in P_b G_{\varepsilon_n, B} \setminus \mathcal{U}$ для всех n . Без ограничения общности можно считать, что $x_0 \in H$. Положим $G_{\varepsilon_n, B}^H = G_{\varepsilon_n, B} \cap H$, $\mathcal{U}^H = \mathcal{U} \cap H$. Имеем

$$x_0 \in P_b G_{\varepsilon_n, B}^H \setminus \mathcal{U}^H. \quad (34)$$

С другой стороны, $\mathcal{U}^H$, будучи открытым в индуцированной топологии пространства H_b , является открытым в его гильбертовой топологии. Аналогично, множество $\overline{B}^H = \overline{B} \cap H$ замкнуто в гильбертовом пространстве H_b . Заметим, что множество $P_b G_{\varepsilon_n, B}^H$ содержится в ε_n -окрестности множества $\overline{B}^H$, и, так как $\overline{B}^H \subset \mathcal{U}^H$, то все такие ε_n -окрестности, начиная с некоторой, содержатся в $\mathcal{U}^H$, что противоречит (34). Таким образом, имеет место (33), а значит и (32).

Для индикаторов произвольных множеств A_1 и A_2 справедливо

$$\mathbb{I}_{A_1 \setminus A_2} = \mathbb{I}_{A_1} - \mathbb{I}_{A_2} + \mathbb{I}_{A_2 \setminus A_1}. \quad (35)$$

Имеет место равенство $P_b G_{\varepsilon, B} \setminus P_b \overline{B} = (P_b G_{\varepsilon, B} \setminus P_b B) \setminus P_b \partial B$. Применяя (35) к множествам $P_b G_{\varepsilon, B} \setminus P_b B$ и $P_b \partial B$, получим

$$\mathbb{I}_{P_b G_{\varepsilon, B} \setminus P_b \overline{B}} = \mathbb{I}_{P_b G_{\varepsilon, B} \setminus P_b B} - \mathbb{I}_{P_b \partial B} + \mathbb{I}_{P_b \partial B \setminus (P_b G_{\varepsilon, B} \setminus P_b B)}.$$

Следовательно,

$$\mathbb{I}_{P_b G_{\varepsilon, B} \setminus P_b \overline{B} + R_b} = \mathbb{I}_{P_b G_{\varepsilon, B} \setminus P_b B + R_b} - \mathbb{I}_{P_b \partial B + R_b} + \mathbb{I}_{P_b \partial B \setminus (P_b G_{\varepsilon, B} \setminus P_b B) + R_b}. \quad (36)$$

Так как $\nu_T(P_b \partial B) = 0$ (свойство (*)), то $\nu(\partial B + R_b) = 0$; значит,

$$|d_b \nu|(\partial B + R_b) = 0. \quad (37)$$

Из (36) следует

$$\begin{aligned} |d_b \nu|(P_b G_{\varepsilon, B} \setminus P_b \overline{B} + R_b) &= |d_b \nu|(P_b G_{\varepsilon, B} \setminus P_b B + R_b) - |d_b \nu|(\partial B + R_b) \\ &\quad + |d_b \nu|((\partial B + R_b) \setminus ((P_b G_{\varepsilon, B} \setminus P_b B) + R_b)), \end{aligned}$$

где в силу (37) два последних слагаемых равны нулю. Из σ -аддитивности меры $|d_b \nu|$, теоремы Лебега и равенства (32) следует (30).

Теперь из оценок (24)–(26), (29), а также из справедливости (27) и (30) следует (23).

Предположим далее, что функция f может быть продолжена на некоторую область $\mathcal{U}_1 \subset T_b$ такую, что $\overline{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}_1$, и график продолженной функции является поверхностью в смысле определения 2. Обозначим символом Σ систему всех обладающих свойством (*) открытых подмножеств поверхности G . Пусть далее ν^ε – это мера на G , определяемая равенством

$$\nu^\varepsilon(B) = \frac{\nu(B^\varepsilon)}{\lambda(B(\varepsilon))}.$$

Оператор P_G для случая произвольной конечной коразмерности n определяется так:

$$P_G: G^{\varepsilon_b} \rightarrow G, \quad x + \sum_{i=1}^n t_i n_i^G(x) \mapsto x.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть семейство функций $f_B(\varepsilon) = \nu^\varepsilon(B)/\nu_G(B)$, где $B \in \Sigma$, равномерно ограничено на полуинтервале $(0, \varepsilon_b]$. Тогда формула (11) справедлива для любого борелевского подмножества поверхности G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий, наложенных на функцию f , равенство (11) выполнено для открытых подмножеств поверхности G , обладающих свойством (*).

Пусть теперь $B \subset G$ – произвольное открытое множество. Воспользуемся тем, что ν – мера Радона. Аналогично случаю $n = 1$, рассмотренному в [6] и в [2], доказывается, что ν_G также является мерой Радона на G . Найдем σ -компакт $K_1 \subset B$ и σ -компакт $\tilde{K}_2 \subset B^{\varepsilon_b}$ такие, что $\nu_G(K_1) = \nu_G(B)$ и $\nu(\tilde{K}_2) = \nu(B^{\varepsilon_b})$. Пусть $K_2 = P_G(\tilde{K}_2)$. Из непрерывности отображения P_G следует, что K_2 – σ -компакт. Положим $K = K_1 \cup K_2$. Ясно, что K – σ -компакт, $K \subset B$, $\nu_G(K) = \nu_G(B)$ и $\nu(K^{\varepsilon_b}) = \nu(B^{\varepsilon_b})$. У каждой точки $x \in K$ выберем окрестность $\mathcal{V}_x \subset B$, обладающую свойством (*) и такую, что $\nu^{\varepsilon_b}(\partial\mathcal{V}_x) = 0$ и $\nu_G(\partial\mathcal{V}_x) = 0$ (учтем, что меры ν^{ε_b} и ν_G σ -аддитивны на G). Из открытого покрытия σ -компакта K множествами $\mathcal{V}_x$ выделим счетное подпокрытие $\mathcal{V}_i$, $i = 1, 2, \dots$. Положим

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{V}_1, \quad \mathcal{F}_i = \mathcal{V}_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} \mathcal{V}_k, \quad i = 2, 3, \dots$$

Множества $\mathcal{F}_i$ открыты и обладают свойством (*). Следовательно, для всех множеств $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2, \dots$, справедливо (11). Положим $\mathcal{F} = \bigcup_i \mathcal{F}_i$. Покажем, что для множества $\mathcal{F}$ также справедливо (11). Так как множества $\mathcal{F}_i$ попарно не пересекаются, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\nu(\mathcal{F}^\varepsilon)}{\lambda(B(\varepsilon))} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda(B(\varepsilon))} \sum_{i=1}^{\infty} \nu(\mathcal{F}_i^\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \nu^\varepsilon(\mathcal{F}_i). \quad (38)$$

В силу условий теоремы ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \nu^\varepsilon(\mathcal{F}_i)$ мажорируется умноженным на некоторую положительную константу сходящимся числовым рядом $\sum_{i=1}^{\infty} \nu_G(\mathcal{F}_i)$ и, следовательно, сходится равномерно. Значит, в (38) можно перейти к пределу под знаком суммы. Учитывая σ -аддитивность меры ν_G , получим

$$\nu_G(\mathcal{F}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\nu(\mathcal{F}^\varepsilon)}{\lambda(B(\varepsilon))}.$$

Так как множества $\mathcal{F}_i$ таковы, что $\nu^{\varepsilon_b}(\partial\mathcal{F}_i) = 0$ и $\nu_G(\partial\mathcal{F}_i) = 0$, то для любого $\varepsilon \leq \varepsilon_b$ множество $K^\varepsilon \setminus \mathcal{F}^\varepsilon$ имеет нулевую ν -меру, а множество $K \setminus \mathcal{F}$ – нулевую ν_G -меру. Следовательно, для всех $\varepsilon \leq \varepsilon_b$ выполнено $\nu(\mathcal{F}^\varepsilon) = \nu(B^\varepsilon)$, $\nu_G(\mathcal{F}) = \nu_G(B)$. Значит,

$$\nu_G(B) = \nu_G(\mathcal{F}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\nu(\mathcal{F}^\varepsilon)}{\lambda(B(\varepsilon))} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\nu(B^\varepsilon)}{\lambda(B(\varepsilon))}.$$

Мы доказали (11) для открытых подмножеств поверхности G . Пусть теперь $B \subset G$ – замкнутое множество. Так как равенство (11) верно для самой поверхности G , как открытого подмножества поверхности G_1 , и для ее открытого подмножества $G \setminus B$, то оно верно и для множества B .

Пусть теперь $B \subset G$ – произвольное борелевское множество; K_n – последовательность компактов такая, что $K_n \subset B$, $\nu_G(K_n) \rightarrow \nu_G(B)$ ($n \rightarrow \infty$); A_n – последовательность открытых множеств такая, что $B \subset A_n$ и $\nu_G(A_n) \rightarrow \nu_G(B)$ ($n \rightarrow \infty$). Обе последовательности существуют в силу того, что ν_G – мера Радона. Для каждого фиксированного n имеем

$$\nu_G(K_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\nu(K_n^\varepsilon)}{\lambda(B(\varepsilon))} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\nu(B^\varepsilon)}{\lambda(B(\varepsilon))} \leq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\nu(B^\varepsilon)}{\lambda(B(\varepsilon))} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\nu(A_n^\varepsilon)}{\lambda(B(\varepsilon))} = \nu_G(A_n).$$

Переходя в этой цепочке неравенств к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим (11).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Угланов А. В. Поверхностные интегралы в линейных топологических пространствах // Докл. РАН. 1995. Т. 344. № 4. С. 450–453.
- [2] Uglanov A. V. Integration on Infinite-Dimensional Surfaces and Its Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000.
- [3] Яхлаков В. Ю. Поверхностные меры на поверхностях конечной коразмерности в банаховом пространстве // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 4. С. 147–156.
- [4] Смолянов О. Г. Гладкие меры на группах петель // Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 4. С. 455–458.
- [5] Смолянов О. Г. Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения. М.: Изд-во МГУ, 1979.
- [6] Угланов А. В. Поверхностные интегралы в банаховом пространстве // Матем. сб. 1979. Т. 110. № 2. С. 189–217.
- [7] Шварц Л. Анализ. М.: Мир, 1972.
- [8] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения на бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.
- [9] Smolyanov O. G., von Weizsäcker H. Differentiable families of measures // J. Funct. Analysis. 1993. V. 118. № 2. P. 455–476.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: shamarova_e@yahoo.com

Поступило
28.03.2001
Исправленный вариант
11.02.2002