Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Шашкин, Оценка типа Берри–Эссеена для слабо ассоциированного векторного случайного поля, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 4, 617–624

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm449>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:07:47

УДК 519.21

ОЦЕНКА ТИПА БЕРРИ-ЭССЕЕНА ДЛЯ СЛАБО АССОЦИИРОВАННОГО ВЕКТОРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

А. П. Шашкин

Доказывается аналог оценки Берри-Эссеена для слабо ассоциированного векторного случайного поля в случае, когда суммирование ведется по регулярно растущим множествам.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Рассмотрим случайное поле $\{X_t, t \in \mathbb{Z}^d\}$, образованное случайными векторами со значениями в $\mathbb{R}^s$. Это поле обладает *свойством слабой ассоциированности* (см. [1]), если

$$\text{cov}(f(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}), g(X_{t_{m+1}}, \dots, X_{t_{m+n}})) \geq 0 \quad (1)$$

для любых $m, n \in \mathbb{N}$, произвольного набора различных мультииндексов $t_1, \dots, t_{m+n}$ из $\mathbb{Z}^d$ и любых покоординатно неубывающих функций $f: \mathbb{R}^{ms} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}$ (при условии, что данная ковариация определена). Свойство ассоциированности (см. подробнее [2]) означает более жесткое требование, когда в (1) функции f и g берутся от одного и того же набора $(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$. Эти и близкие им понятия находят применения в статистической физике, математической статистике и теории надежности, см., например, [2], [3]. Заметим, что любое семейство независимых случайных величин автоматически является ассоциированным.

Имеется ряд работ, посвященных оценке скорости нормального приближения для действительных случайных полей, обладающих свойством ассоциированности или его модификациями (см., например, [3]–[6] и имеющиеся там ссылки). Векторные слабо ассоциированные процессы рассмотрены в [1]. Целью данной заметки является получение аналога оценки Берри-Эссеена для слабо ассоциированного векторного поля в случае, когда суммирование ведется по регулярно растущим множествам.

2. Основной результат. Пусть $\{X_t, t \in \mathbb{Z}^d\}$ – слабо ассоциированное стационарное в широком смысле центрированное поле случайных векторов, принимающих значения в $\mathbb{R}^s$. Далее U обозначает конечное подмножество $\mathbb{Z}^d$ с числом элементов $|U|$. Положим

$$S_U = \sum_{t \in U} X_t.$$

Для случайного вектора X его математическое ожидание и матрицу ковариаций будем обозначать соответственно $\mathbf{E}X$ и $\mathbf{D}X$. Обозначение $\|\cdot\|$ означает как евклидову норму вектора в $\mathbb{R}^s$, так и соответствующую ей спектральную норму матрицы. Потребуем, чтобы для некоторых $c_0 > 0$ и $\delta \in (0; 1]$ было выполнено

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{E} \|X_t\|^{2+\delta} \leq c_0 < \infty. \quad (2)$$

Пусть для всех $k, l = 1, \dots, s$ сходятся ряды

$$A_{kl} = \sum_{t \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{E} X_{0,k} X_{t,l}. \quad (3)$$

Введем матрицы $A = (A_{kl})$, $\Sigma_U = (\sigma_{kl}(U))$, где

$$\sigma_{kl}(U) = \frac{\mathbf{E} S_{U,k} S_{U,l}}{|U|}.$$

(Здесь $X_{t,k}$ и $S_{U,k}$ – соответственно k -е компоненты векторов X_t и S_U .)

Назовем *целочисленным кубом*, имеющим длину ребра p , множество $B = V \cap \mathbb{Z}^d$, где

$$V = [a_1; a_1 + p) \times \dots \times [a_d; a_d + p), \quad p \in \mathbb{N}, \quad a_q \in \mathbb{Z}, \quad q = 1, \dots, d.$$

Нетрудно показать, применяя [7], что для “регулярно растущих” множеств U (например, целочисленных кубов) $\sigma_{kl}(U) \rightarrow A_{kl}$ при всех $k, l = 1, \dots, s$. Тем самым, матрица A является симметричной и неотрицательно определенной.

Предположим, что $B_1, \dots, B_m$ – непересекающиеся целочисленные кубы, содержащиеся в множестве U и имеющие длину ребра p . Введем также множества

$$B_0 = \bigcup_{j=1}^m B_j \quad \text{и} \quad R = U \setminus B_0.$$

В случаях, когда это не приводит к путанице, будем опускать в записи B_j индекс j .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{X_t, t \in \mathbb{Z}^d\}$ – описанное выше случайное поле. Тогда при всех $\lambda \in \mathbb{R}^s$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E} \exp \left\{ i \left(\lambda, \frac{S_U}{\sqrt{|U|}} \right) \right\} - e^{-(A\lambda, \lambda)/2} \right| \\ & \leq \frac{\|\lambda\|}{2} \sqrt{\text{Tr } A} \sqrt{\frac{|R|}{mp^d}} \left(2 + \sqrt{\frac{|R|}{mp^d}} \right) + \|\lambda\|^2 \left(s + \frac{1}{2} \right) \|A - \Sigma_B\| \\ & \quad + mp \left(-\frac{1}{2m} (A\lambda, \lambda) \right) + \|\lambda\|^{2+\delta} m^{-\delta/2} p^{1+\delta/2} c_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\phi(x) = e^x - 1 - x. \quad (5)$$

Нам потребуются следующие два хорошо известных элементарных утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть $z_i, w_i \in \mathbb{C}$ и $|z_i| \leq 1, w_i \leq 1, i = 1, \dots, k$. Тогда

$$|z_1 \cdots z_k - w_1 \cdots w_k| \leq \sum_{i=1}^k |z_i - w_i|.$$

ЛЕММА 2. Для любых $x \in \mathbb{R}$ и $\delta \in (0; 1]$ выполнены неравенства

$$|e^{ix} - 1| \leq |x|, \quad \left| e^{ix} - 1 - ix + \frac{1}{2}x^2 \right| \leq |x|^{2+\delta}.$$

Далее, если $|x| \leq 1/2$, то $|\phi(x)| \leq x^2$, где $\phi(x)$ определяется формулой (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Перейдем к доказательству теоремы, пользуясь подходом из [1]. Положим $Y_j = (X_j, \lambda)$, где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^s$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \exp \left\{ i \left(\lambda, \frac{S_U}{\sqrt{|U|}} \right) \right\} - e^{-(A\lambda, \lambda)/2} \right| \leq \mathbb{E} \left| \exp \left\{ i \sum_{t \in U} Y_t \left(\frac{1}{\sqrt{|U|}} - \frac{1}{\sqrt{mp^d}} \right) \right\} - 1 \right| \\ & + \mathbb{E} \left| \exp \left\{ i \sum_{t \in R} \frac{Y_t}{\sqrt{mp^d}} \right\} - 1 \right| + \left| \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{t \in B_0} \frac{Y_t}{\sqrt{mp^d}} \right\} - \prod_{j=1}^m \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{t \in B_j} \frac{Y_t}{\sqrt{mp^d}} \right\} \right| \\ & + \left| \prod_{j=1}^m \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{t \in B_j} \frac{Y_t}{\sqrt{mp^d}} \right\} - e^{-(A\lambda, \lambda)/2} \right| = \sum_{q=1}^4 b_q. \end{aligned} \quad (6)$$

Оценим по отдельности $b_1, \dots, b_4$. В силу леммы 2

$$b_1 \leq \mathbb{E} \left| \sum_U \frac{Y_t}{\sqrt{|U|}} \right| \left(\sqrt{\frac{|U|}{mp^d}} - 1 \right) \leq \frac{1}{2} \|\lambda\| \sqrt{\text{Tr } A} \frac{|R|}{mp^d}, \quad (7)$$

$$b_2 \leq \|\lambda\| \sqrt{\text{Tr } A} \sqrt{\frac{|R|}{mp^d}}, \quad (8)$$

где учтено, что $\text{Tr } \Sigma_U \leq \text{Tr } A$ ввиду слабой ассоциированности случайного поля $\{X_t, t \in \mathbb{R}^d\}$.

Чтобы оценить b_3 , воспользуемся аналогом неравенства Ньюмена для характеристических функций набора слабо ассоциированных векторов (см. [1]). Именно, пусть $Z_1, \dots, Z_m$ – слабо ассоциированные случайные векторы в $\mathbb{R}^s$, $\varphi^{(m)}$ – их совместная характеристическая функция, φ_k – характеристическая функция Z_k , $k = 1, \dots, m$. Тогда для любых $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{R}^s$

$$\left| \varphi^{(m)}(r_1, \dots, r_m) - \prod_{q=1}^m \varphi_q(r_q) \right| \leq 2 \sum_{1 \leq q < j \leq m} \sum_{k, l=1}^s |r_{q,k}| |r_{j,l}| \text{cov}(Z_{q,k}, Z_{j,l}).$$

Возьмем $r_1 = \dots = r_m = \lambda/\sqrt{mp^d}$ и обозначим $Z_q = \sum_{B_q} X_j$, $q = 1, \dots, m$. Имеем

$$\begin{aligned} b_3 &\leq 2 \sum_{1 \leq q < j \leq m} \sum_{k,l=1}^s \frac{|\lambda_k \lambda_l|}{mp^d} \operatorname{cov}(Z_{q,k}, Z_{j,l}) \\ &\leq \frac{\|\lambda\|^2}{mp^d} \sum_{k,l=1}^s (\operatorname{cov}(S_{B_0,k}, S_{B_0,l}) - m \operatorname{cov}(S_{B,k}, S_{B,l})) \\ &\leq \|\lambda\|^2 \sum_{k,l=1}^s (A_{kl} - \sigma_{kl}(B)) \leq \|\lambda\|_s^2 \|A - \Sigma_B\|. \end{aligned} \quad (9)$$

Наконец, для оценки b_4 положим $\eta_j = \sum_{t \in B_j} Y_t / \sqrt{mp^d}$ и $\psi_{j,m,p} = \mathbb{E}(e^{i\eta_j} - 1 - i\eta_j + \eta_j^2/2)$. Согласно лемме 2

$$|\psi_{j,m,p}| \leq (mp^d)^{-(1+\delta/2)} \mathbb{E} \left| \sum_{t \in B_j} Y_t \right|^{2+\delta} \leq \|\lambda\|^{2+\delta} p^{(2+\delta)d} (mp^d)^{-(1+\delta/2)} c_0,$$

где величина c_0 фигурирует в (2). В силу леммы 1

$$\begin{aligned} b_4 &= \left| \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{2} \mathbb{E} \eta_j^2 + \psi_{j,m,p} \right) - e^{-(A\lambda, \lambda)/2} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left| 1 - \frac{1}{2m} (\Sigma_B \lambda, \lambda) - e^{-(A\lambda, \lambda)/(2m)} + \psi_{j,m,p} \right| \\ &\leq m \left(\left| \frac{1}{2m} ((\Sigma_B - A)\lambda, \lambda) \right| + \left| \phi \left(-\frac{1}{2m} (A\lambda, \lambda) \right) \right| \right) + \|\lambda\|^{2+\delta} p^{-(1+\delta/2)d} m^{-\delta/2} c_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (6)–(10) вытекает утверждение теоремы.

3. Следствия. Оценки близости характеристической функции нормированной стандартным образом суммы случайных величин к характеристической функции нормального закона и должные максимальные неравенства позволяют получить, например, закон повторного логарифма (см. [5]). Поэтому обратимся к некоторым следствиям установленного результата.

Будем рассматривать семейство ограниченных измеримых по Лебегу множеств $V \subset \mathbb{R}^d$, опуская в записи индексирующий параметр. Для множества V упомянутого семейства пусть $|V|$ обозначает его меру Лебега; ∂V – граница V ; $\operatorname{diam} V$ – диаметр V ; $U = V \cap \mathbb{Z}^d$. Возьмем функцию $\gamma: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ такую, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \gamma(\alpha) = 0$. Напомним (см., например, [8, с. 30–31]), что семейство множеств V стремится к бесконечности в смысле Фишера, если $|V| \rightarrow \infty$ и для любых V при всех достаточно малых α

$$\frac{|(\partial V)^{(\alpha \operatorname{diam} V)}|}{|V|} \leq \gamma(\alpha), \quad (11)$$

здесь $\partial V^{(\tau)}$ – это τ -окрестность границы множества V в евклидовой метрике.

Заметим, что в предельных теоремах используются и другие понятия роста семейства множеств (см., например, [9]).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $V \rightarrow \infty$ в смысле Фишера, причем функция $\gamma(\cdot)$ в (11) удовлетворяет при некотором $\rho > 0$ условию

$$\gamma(\alpha) = O(\alpha^\rho), \quad \alpha \rightarrow 0+. \quad (12)$$

Пусть для векторного случайного поля $\{X_t, t \in \mathbb{Z}^d\}$, удовлетворяющего условиям теоремы 1, некоторого $\beta > 0$ и целочисленного куба B выполнено условие

$$\|A - \Sigma_B\| = O(|B|^{-\beta}), \quad |B| \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Тогда существуют положительные постоянные C_1, C_2, ν, μ такие, что при всех $\lambda \in \mathbb{R}^s$ с $\|\lambda\| \leq C_1|U|^\nu$ (где $U = V \cap \mathbb{Z}^d$) имеет место оценка

$$\left| \mathbb{E} \exp \left\{ i \left(\lambda, \frac{S_U}{\sqrt{|U|}} \right) \right\} - e^{-(A\lambda, \lambda)/2} \right| \leq C_2|U|^{-\mu}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем в пространстве $\mathbb{R}^d$ гиперплоскости, перпендикулярные координатным осям, так, чтобы решетка $\mathbb{Z}^d$ разбилась на целочисленные кубы с ребром $p = \lfloor |U|^\theta \rfloor$, содержащие по p^d целых точек. Функция $[\cdot]$ означает целую часть числа; параметр $\theta \in (0; 1/d)$ подберем позже. Пусть, как выше, m обозначает число кубов $B_1, \dots, B_m$, целиком содержащихся в U , а m' – число кубов $B'_1, \dots, B'_{m'}$, содержащих точки как из U , так и из $\mathbb{Z}^d \setminus U$. Возьмем $C_1, \nu > 0$. Применим теорему 1 и при $\|\lambda\| \leq C_1|U|^\nu$ оценим все слагаемые, входящие в правую часть неравенства (2), а затем подберем параметры так, чтобы каждое слагаемое имело вид $O(|U|^{-\mu}), |U| \rightarrow \infty$, для некоторого $\mu > 0$. Далее C обозначает, вообще говоря, различные (для каждого неравенства) положительные множители, не зависящие от U , но, возможно, зависящие от C_1, ν, ρ, d и распределения $\{X_t, t \in \mathbb{Z}^d\}$. В обозначениях теоремы 1

$$|R| \leq m'p^d \leq |(\partial V)^{(p\sqrt{d})}|, \quad mp^d + |(\partial V)^{(p\sqrt{d})}| \geq |V|. \quad (14)$$

Следовательно, при всех достаточно больших (в.д.б.) $|U|$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{|R|}{mp^d} &\leq \frac{|(\partial V)^{(p\sqrt{d})}|}{|V| - |(\partial V)^{(p\sqrt{d})}|} \leq C \frac{|(\partial V)^{(p\sqrt{d})}|}{|V|} \\ &\leq C \gamma \left(\frac{p\sqrt{d}}{\text{diam } V} \right) \leq C \left(\frac{p}{\text{diam } V} \right)^\rho \leq C|U|^{\rho(\theta - d^{-1})} \end{aligned} \quad (15)$$

и поэтому

$$\|\lambda\| \sqrt{\frac{|R|}{mp^d}} \leq C\|\lambda\| |U|^{\rho(\theta - d^{-1})/2}.$$

По условию

$$\|\lambda\|^2 \|A - \Sigma_B\| \leq C\|\lambda\|^2 p^{-d\beta} \leq C\|\lambda\|^2 |U|^{-d\beta\theta}.$$

Если $\|\lambda\| \leq C_1|U|^\nu$, $2\nu \leq 1 - \theta d$, то $|(A\lambda, \lambda)/2m| \leq 1/2$ при в.д.б. $|U|$; по лемме 2

$$m\phi \left(-\frac{1}{2m}(A\lambda, \lambda) \right) \leq C \frac{\|\lambda\|^4}{m}.$$

Наконец,

$$\|\lambda\|^{2+\delta} p^{d(1+\delta/2)} m^{-\delta/2} \leq C\|\lambda\|^{2+\delta} |U|^{d\theta(1+\delta) - \delta/2}.$$

Осталось выбрать $\theta < \delta/(2d(1+\delta))$, а затем $\nu > 0$ такое, что

$$\nu < \min \left\{ \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{d} - \theta \right), \frac{d\theta\beta}{2}, \frac{\delta - 2d\theta(1+\delta)}{2(2+\delta)} \right\}. \quad (16)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $V_N = [-N; N]^d$, $N \geq 1$, – семейство кубов, то условие (12) справедливо с $\rho = 1$. Если для некоторого $\zeta > d$ и всех $k, l = 1, \dots, s$ верна оценка

$$\text{cov}(X_{0,k}, X_{t,l}) = O(\|t\|^{-\zeta}), \quad \|t\| \rightarrow \infty,$$

то (13) выполнено при $\beta = (\zeta/d) - 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\det A \neq 0$ в условиях теоремы 1. Тогда для V и в.д.б. $|U|$, фигурирующих в условиях следствия 2, имеем $\det DS_U \neq 0$ и существуют C_3, C_4, ν_1, μ_1 такие, что при $\|\lambda\| \leq C_3|U|^{\nu_1}$ имеет место неравенство

$$|\mathbb{E} \exp\{i(\lambda, (DS_U)^{-1/2} S_U)\} - e^{-\|\lambda\|^2/2}| \leq C_4|U|^{-\mu_1}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $DS_U/|U| = \Sigma_U \rightarrow A$ при $|U| \rightarrow \infty$ (это следует из условия (13)), то $\det DS_U \neq 0$ для в.д.б. $|U|$. В этом случае, подставляя $A^{-1/2}\lambda$ в предыдущее следствие вместо λ , при $\|\lambda\| \leq C_1|U|^\nu$ имеем

$$\left| \mathbb{E} \exp\left\{i\left(\lambda, A^{-1/2} \frac{S_U}{\sqrt{|U|}}\right)\right\} - e^{-\|\lambda\|^2/2} \right| \leq |U|^{-\mu}, \quad \mu > 0.$$

С учетом леммы 2

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \exp\left\{i\left(\lambda, A^{-1/2} \frac{S_U}{\sqrt{|U|}}\right)\right\} - \mathbb{E} \exp\{i(\lambda, (DS_U)^{-1/2} S_U)\} \right| \\ & \leq \left| \mathbb{E} \exp\left\{i\left(\lambda, (A^{-1/2} - (DS_U)^{-1/2} \sqrt{|U|}) \frac{S_U}{\sqrt{|U|}}\right)\right\} - 1 \right| \\ & \leq \|\lambda\| \sqrt{\mathbb{E} \left\| \frac{S_U}{\sqrt{|U|}} \right\|^2} \|A^{-1/2} - (DS_U)^{-1/2} \sqrt{|U|}\| \\ & \leq \|\lambda\| \sqrt{\text{Tr } AC} |U|^{-\beta}, \end{aligned} \quad (18)$$

поэтому можно взять $\nu_1 = \nu, \mu_1 = \min\{\mu, \beta - \nu\}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнены условия следствия 2, $G \subset \mathbb{R}^s$ – ограниченное выпуклое множество. Тогда

$$|\mathbb{P}((DS_U)^{-1/2} S_U \in G) - \mathbb{P}(\xi \in G)| \leq M_0(1 + |G^{(1)}|)|U|^{-\vartheta},$$

где $\vartheta > 0$, $M_0 > 0$ не зависят от U и G , $\xi \sim N(0, I_s)$, I_s – единичная матрица порядка s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует из (17) и известного неравенства фон Бара [10].

4. Некоторые дальнейшие обобщения. Приведенные доказательства без существенных изменений переносятся на случай, когда вместо сумм по конечным подмножествам решетки $\mathbb{Z}^d$ рассматриваются аддитивные случайные функции, заданные на алгебре $\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ ограниченных борелевских множеств пространства $\mathbb{R}^d$. А именно, пусть $A(V)$, $V \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$, – такая случайная функция со значениями в $\mathbb{R}^s$, что $A(V_1 \cup V_2) = A(V_1) + A(V_2)$ п.н., если $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ и $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Возьмем разбиение $\mathbb{R}^d$, полученное с помощью сдвигов куба $\Pi(a) = \{x \in \mathbb{R}^d : 0 < x_k \leq a, k = 1, \dots, d\}$, $a \in \mathbb{R}_+$, т.е. рассмотрим кубы $\Pi_k(a) = \Pi(a) + ak$, где $k \in \mathbb{Z}^d$, $ak = (ak_1, \dots, ak_d)$. Предположим, что при всех достаточно больших a величины $X_k(a) = A(\Pi_k(a))$, $k \in \mathbb{Z}^d$, образуют стационарное слабо ассоциированное векторное поле. Тогда при соответствующих условиях на поле $\{X_k(a), k \in \mathbb{Z}^d\}$ получаем асимптотические результаты для $A(V)$, когда $V \rightarrow \infty$ в смысле Фишера. В частности, пусть $\{Z_v, v \in \mathbb{R}^d\}$ – слабо ассоциированное случайное поле со значениями в $\mathbb{R}^s$ такое, что при некотором $\delta \in (0; 1]$ и всех $v \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{E}Z_v = 0 \in \mathbb{R}^s, \quad \mathbb{E}\|Z_v\|^{2+\delta} < \infty. \quad (19)$$

Определим

$$A(V) = \int_V Z_v dv, \quad V \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d). \quad (20)$$

Моментные условия на поле $\{Z_v, v \in \mathbb{R}^d\}$ обеспечивают то, что последний интеграл можно понимать как в смысле L^2 -сходимости, так и потраекторно. При выполнении условия (19) для схемы интегрирования (20) справедливы все оценки асимптотического поведения, установленные в пп. 2, 3 (с заменой S_U на $A(V)$, где множества $V \rightarrow \infty$ в смысле Фишера и удовлетворяют требованию (12)), если вместо (3) использовать условие

$$\int_{\mathbb{R}^d} F_{k,l}(u) du = A_{kl} \in [0; +\infty),$$

здесь $F_{k,l}(u) = \text{cov}(Z_{0,k}, Z_{u,l})$, $k, l = 1, \dots, s$. Очевидно, можно проводить интегрирование поля $\{Z_v, v \in \mathbb{R}^d\}$ с положительной ограниченной весовой функцией.

Схема суммирования для поля $\{X_t, t \in \mathbb{Z}^d\}$ стандартным образом сводится к схеме интегрирования поля $\{Z_v, v \in \mathbb{R}^d\}$. Достаточно положить $Z_v = X_t$ для $v \in [t; t+1)$, $t \in \mathbb{Z}^d$. Заметим, что так введенное поле $\{Z_v, v \in \mathbb{R}^d\}$ не будет слабо ассоциированным (если точки $v_1, \dots, v_d$ принадлежат одному кубу $[t; t+1)$). Однако, как было отмечено выше, можно предполагать лишь слабую ассоциированность величин, получающихся интегрированием по достаточно большим непересекающимся кубам.

Более того, возможны и обобщения в условиях типа квазиассоциированности, предложенных в [11] (см. также [12]), поскольку речь идет об использовании аналогов неравенства Ньюмена для совместных характеристических функций.

Автор признателен профессору А. В. Булинскому за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dabrowski A. R., Dehling H. A Berry–Esseen theorem and a functional law of the iterated logarithm for weakly associated random vectors // *Stochastic Processes Appl.* 1988. V. 30. № 2. P. 277–289.
- [2] Esary J., Proschan F., Walkup D. Association of random variables with applications // *Ann. Math. Statistics.* 1967. V. 38. № 5. P. 1466–1474.
- [3] Newman C. M. Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables // *Inequalities in Statistics and Probability* / ed. Y. L. Tong: Hayward, 1984. P. 127–140.
- [4] Булинский А. В. Скорость сходимости в центральной предельной теореме для полей ассоциированных величин // *Теор. вероятн. и примен.* 1995. Т. 38. № 2. С. 417–425.
- [5] Булинский А. В. Функциональный закон повторного логарифма для ассоциированных случайных полей // *Фундаментальная и прикладная матем.* 1995. Т. 1. № 3. С. 623–639.
- [6] Bulinski A. V. On the convergence rates in the central limit theorem for positively and negatively dependent random fields // *Probability Theory and Math. Statistics* / ed. I. A. Ibragimov, A. Yu. Zaitsev: Gordon and Breach, 1996. P. 3–14.
- [7] Bolthausen E. On the central limit theorem for stationary mixing random fields // *Ann. Probability.* 1982. V. 10. № 4. P. 1047–1050.
- [8] Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. М.: Мир, 1971.
- [9] Булинский А. В., Вронский М. А. Статистический вариант центральной предельной теоремы // *Фундаментальная и прикладная матем.* 1996. Т. 2. № 4. С. 999–1018.
- [10] von Bar B. Multi-dimensional integral limit theorem // *Ark. Math.* 1967. V. 7. № 1. P. 71–88.
- [11] Bulinski A. V., Suquet Ch. Normal approximation for quasiassociated random fields // *Statistics and Probability Letters.* 2001. V. 54. № 2. P. 215–226.
- [12] Булинский А. В. Асимптотическая гауссовость квазиассоциированных векторных случайных полей // *Обзорные прикладной и промышленной математики.* 2000. Т. 7. № 2. С. 482–483.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: ciashash@cityline.ru

Поступило
29.10.2001
Исправленный вариант
23.01.2002