Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Трутнев, Плотность полиномиальных элементов в инвариантных подпространствах пространств целых функций экспоненциального типа, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 3, 421–424

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm45>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:26:31

УДК 517.55

ПЛОТНОСТЬ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

В. М. Трутнев

Рассматриваются инвариантные относительно сдвига подпространства в пространстве целых функций экспоненциального типа многих комплексных переменных и приводятся условия, при которых множество экспоненциальных полиномов плотно в этих подпространствах. В частности, получены необходимые и достаточные условия плотности полиномиальных элементов.

Библиография: 10 названий.

Б. Мальгранж [1], исследуя вопрос об аппроксимации произвольных решений (в различных классах функций) полиномиальными решениями для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, нашел необходимое и достаточное условие для такой аппроксимации: все неприводимые компоненты характеристического многочлена дифференциального уравнения должны обращаться в нуль в начале координат. Позднее В. П. Паламодов [2, гл. VII, § 8, теорема 5] для систем дифференциальных уравнений доказал, что всякое решение может быть аппроксимировано экспоненциальными полиномами вида $p(z) \exp(z, \zeta)$, $\zeta \in B$, где множество $B \subset \mathbb{C}^n$ имеет непустое пересечение с каждым многообразием из соответствующего набора нетеровских операторов и многообразий. Отсюда следует, что если все многообразия содержат начало координат, то каждое решение аппроксимируется полиномиальными решениями.

Многие результаты о решениях дифференциальных уравнений допускают распространение на случай уравнений свертки (см., например, обзоры [3], [4]) или даже на инвариантные относительно сдвига или дифференцирования подпространства в различных пространствах функций.

Целью настоящей статьи является распространение на инвариантные подпространства в рассмотренном ниже пространстве целых функций экспоненциального типа результатов Мальгранжа и Паламодова. Выбор этого класса пространств объясняется тем, что в них любое инвариантное подпространство допускает спектральный анализ и синтез (В. Н. Филиппов [5]) и, следовательно, отсутствуют известные контрпримеры Д. И. Гуревича [6].

Пусть G – область Рунге в пространстве $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{O}(G)$ – пространство функций, голоморфных в области G с естественной топологией. Через $\mathcal{O}'(G)$ обозначим сопряженное пространство к $\mathcal{O}(G)$, т.е. пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{O}(G)$, наделенное сильной топологией.

Пусть L – отображение, которое всякому линейному функционалу $T \in \mathcal{O}'(G)$ ставит в соответствие целую функцию экспоненциального роста $\hat{T}(z) = T_t(\exp(t, z))$, $z \in \mathbb{C}^n$,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00167.

где $(z, t) = z_1 t_1 + \dots + z_n t_n$. Функция $\hat{T}(z)$ называется *преобразованием Лапласа функционала* T . Если образ P_G пространства $\theta'(G)$ при отображении L наделить индуцированной топологией, то отображение L будет топологическим изоморфизмом (см., например, [7]).

Отображение L и пространство P_G хорошо известны, так же как и специальный принцип двойственности (см., например, [8]): между совокупностью V всех подпространств в P_G , инвариантных относительно сдвига, и совокупностью всех замкнутых идеалов V^* из P'_G можно установить взаимно однозначное соответствие по правилу: $V \longleftrightarrow V^*$ тогда и только тогда, когда $V^* = \text{An } V$ и $V = \text{An } V^*$. Под $\text{An } V$ понимается совокупность всех функционалов, обращающихся в нуль на V , а под $\text{An } V^*$ – совокупность всех функций из P_G , на которых каждый функционал из V^* обращается в нуль. Обозначим через L^* сопряженное к L отображение $L^*: P'_G \rightarrow \theta''(G)$ и через θ – канонический изоморфизм пространства $\theta(G)$ на его второе сопряженное $\theta''(G)$. Рассмотрим топологический изоморфизм $\chi = \theta^{-1} \circ L^*: P'_G \rightarrow \theta(G)$, при котором всякому инвариантному подпространству $V \subset P_G$ будет соответствовать замкнутый идеал $I \subset \theta(G)$, $I = \chi(\text{An } V)$.

Всякий элемент F из V является преобразованием Лапласа функционала T , ортогонального идеалу $I \subset \theta(G)$. Идеал I называется *аннуляторным идеалом* инвариантного подпространства V , а нулевое множество N идеала можно назвать *характеристическим аналитическим множеством* инвариантного подпространства V .

Идеал I в коммутативном кольце R называется *примарным*, если из условий $fg \in I$ и $g \notin I$ следует, что $f^k \in I$ при некотором натуральном k . Если кольцо R нетерово, то всякий идеал представим в виде конечного пересечения примарных идеалов. Этот факт существенно используется в результатах Мальгранжа и Паламодова. Кольцо $\theta(G)$, если множество G открыто, не является нетеровым. Тем не менее в кольце $\theta(G)$ существует аналогичное разложение, но, вообще говоря, счетное.

Семейство $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ подмножеств топологического пространства X называется *локально-конечным*, если $\forall x \in X$ существует окрестность U такая, что $U \cap N_\alpha \neq \emptyset$ лишь для конечного числа $\alpha \in A$. Семейство идеалов $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ в алгебре $\theta(G)$ называется *локально-конечным*, если семейство их нулевых множеств $N_\alpha = N(I_\alpha)$ локально-конечно в G .

Пусть идеал J представим в виде

$$J = \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha.$$

Такое представление идеала J называется *несократимым разложением* на идеалы I_α , если для всякого подмножества $B \subsetneq A$

$$J \neq \bigcap_{\beta \in B} I_\beta.$$

Цитируемое ниже предложение доказано для более широкого класса пространств Штейна (см. [9], [10]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Всякий замкнутый идеал $I \subset \theta(G)$, где G – область голоморфности в $\mathbb{C}^n$, допускает локально-конечное, несократимое разложение*

$$I = \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha, \quad (1)$$

где I_α – замкнутые, примарные идеалы в $\theta(G)$.

Разложение (1) идеала I не является однозначно определенным, но связанное с ним семейство аналитических множеств

$$\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}, \quad N_\alpha = N(I_\alpha), \quad (2)$$

определяется однозначно, причем каждое множество N_α является неприводимым аналитическим множеством в G (см. [10]).

Рассмотрим произвольное инвариантное подпространство $V \subset P_G$ отличное от всего пространства P_G . Пусть $I \subset \mathcal{O}(G)$ – его аннуляторный идеал и N – характеристическое аналитическое множество.

Обозначим через E^a , $a \in G$, множество всех экспоненциальных полиномов вида $p(z) \exp(a, z)$ в подпространстве V , где $p(z)$ – полином.

Сформулируем критерий плотности экспоненциальных полиномов в инвариантных подпространствах.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $V \subset P_G$ – инвариантное относительно сдвига подпространство, $I \subset \mathcal{O}(G)$ – его аннуляторный идеал, для которого выбрано некоторое примарное разложение (1), и $E = \bigcup_{a \in B} E^a$, где $B \subset G$, – некоторое множество. Для того чтобы замыкание линейной оболочки множества E совпадало с подпространством V , необходимо и достаточно, чтобы пересечение $B \cap N_\alpha$ было не пусто при любом N_α из ассоциированного набора неприводимых аналитических множеств (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Чтобы доказать, что замыкание линейной оболочки множества E совпадает с подпространством V , достаточно доказать, что всякий функционал $S \in P'_G$, равный нулю на E , обращается в нуль на V , т.е. что $S \in \text{An } V$. Если рассмотреть $f = \chi(S) \in \mathcal{O}(G)$, то нам необходимо установить, что f принадлежит аннуляторному замкнутому идеалу $I = \chi(\text{An } V)$. Обозначим через $\mathcal{O}_a$ кольцо ростков голоморфных функций в точке $a \in \mathbb{C}^n$, а через I_a – идеал, порожденный идеалом I в кольце $\mathcal{O}_a$. Имеется глубокая связь между локальными идеалами I_a и множествами E^a . А именно, справедливо следующее утверждение [5]: функция $f \in \mathcal{O}(G)$ принадлежит идеалу I_a тогда и только тогда, когда функционал $\chi^{-1}(f) \in P'_G$ ортогонален всем элементам из E^a , и функция f принадлежит идеалу I тогда и только тогда, когда функционал $\chi^{-1}(f) \in P'_G$ ортогонален всем элементам из $\bigcup_{a \in G} E^a$.

Очевидно из этого результата следует, что множество E^a не пусто тогда и только тогда, когда идеал $I_a \neq \mathcal{O}_a$, т.е. точка a принадлежит аналитическому множеству N . В силу этого остается доказать, что росток голоморфной функции $f \in \mathcal{O}(G)$ принадлежит всем локальным идеалам I_a , если точка a принадлежит аналитическому множеству N . Итак, пусть $a \in N$. Аналитическое множество N идеала I представляется в окрестности данной точки в виде объединения конечного числа $N_1, \dots, N_l$ неприводимых аналитических множеств из ассоциированного набора неприводимых аналитических множеств (2), а идеал I_a представляется в виде пересечения соответствующих идеалов $I_{1a}, \dots, I_{la}$, порожденных идеалами $I_1, \dots, I_l$ в кольце $\mathcal{O}_a$. Каждый идеал I_k , $k = 1, \dots, l$, примарен в $\mathcal{O}(G)$, хотя идеалы I_k не обязаны быть примарными в кольце $\mathcal{O}_a$. Рассмотрим некоторый идеал I_k . По условию существует точка $b \in B \cap N_k$ такая, что функционал S ортогонален E^b , т.е. росток $f_b \in I_b$ и, следовательно, $f_b \in I_{kb}$.

Нижеследующая лемма справедлива для примарных идеалов в произвольных пространствах Штейна см. [9].

ЛЕММА. Пусть J – примарный идеал в алгебре $\mathcal{O}(G)$, функция $f \in \mathcal{O}(G)$ и b – точка нулевого множества идеала J . Функция $f \in J$ тогда и только тогда, когда росток $f_b \in J_b$.

Применяя данную лемму к примарному идеалу I_k , получаем, что росток $f_a \in I_{ka}$ для всех k . Тем самым достаточность доказана.

Необходимость. Пусть множество $B \subset G$ выбрано так, что замыкание линейной оболочки множества $E = \bigcup_{a \in B} E^a$ совпадает с подпространством V , но в разложении (1)

двойственного идеала I существует примарный идеал I_{α_0} , нулевое множество N_{α_0} которого не пересекается с множеством B . Рассмотрим идеал

$$J = \bigcap_{\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}} I_\alpha \supset I.$$

Разложение идеала I на примарные компоненты несократимо, поэтому $J \neq I$. Но тогда существует функция $f \in J$ такая, что $f \notin I$. Так как $B \cap V_{\alpha_0}$ пусто, то локальные идеалы $I_{\alpha_0 a} = \mathcal{O}_a$ во всякой точке $a \in B$ и выполняется равенство $I_a = J_a$. В силу условия $f \in J$ росток $f_a \in I_a$. В силу цитированного выше утверждения функционал $S = \chi^{-1}(f) \in P'_G$ ортогонален всем E^a , а в силу плотности множества E в V ортогонален V , т.е. $S \in \text{An } V$. Отсюда следует, что $f \in I$. Противоречие с выбором f . Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Все функции из множества E^0 являются полиномами, поэтому, выбирая в теореме 1 множество $B = \{0\}$, мы получаем критерий плотности полиномиальных элементов в инвариантных подпространствах.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $V \subset P_G$ – инвариантное относительно сдвига подпространство, $I \subset \mathcal{O}(G)$ – двойственный инвариантному подпространству V идеал, для которого выбрано некоторое примарное разложение (1), и $0 \in G$. Для того чтобы замыкание множества полиномиальных элементов из V совпадало с подпространством V , необходимо и достаточно, чтобы каждое аналитическое множество N_α из ассоциированного набора неприводимых аналитических множеств (2) проходило через начало координат.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Malgrange B. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 1955–1956. V. 6. P. 1–271.
- [2] Паламодов В. П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967.
- [3] Кривошеев А. С., Напалков В. В. Комплексный анализ и операторы свертки // УМН. 1992. Т. 47. №6. С. 3–58.
- [4] Беренштейн К., Струппа Д. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундамент. направления. Т. 54. М.: ВИНТИ, 1989. С. 5–111.
- [5] Филиппов В. Н. Спектральный синтез в некоторых пространствах целых функций экспоненциального типа // Матем. заметки. 1981. Т. 30. №4. С. 527–534.
- [6] Гуревич Д. И. Контрпримеры к проблеме Л. Шварца // Функцион. анализ и его прилож. 1975. Т. 9. №2. С. 29–35.
- [7] Напалков В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.
- [8] Напалков В. В. Подпространства целых функций экспоненциального типа, инвариантные относительно сдвига // Сиб. матем. ж. 1973. Т. 15. №2. С. 427–436.
- [9] Foster O. Primärzerlegung in Steinschen Algebren // Math. Ann. 1964. V. 154. P. 307–329.
- [10] Yum-Tong Siu. Noether–Lasker decomposition of coherent analytic subsheaves // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 135. P. 375–385.

Красноярский государственный университет
E-mail: trutnev@lan.krasu.ru

Поступило
03.06.2001
Исправленный вариант
14.04.2003