Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Д. Шкредов, О возвращаемости в среднем, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 4, 625–632

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm450>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:55:51

УДК 519.2

О ВОЗВРАЩАЕМОСТИ В СРЕДНЕМ

И. Д. Шкрелов

В данной заметке установлено среднее значение для констант возвращаемости и N -возвращаемости, найдена константа возвращаемости для топологического случая.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Пусть X – метрическое пространство с метрикой $d(\cdot, \cdot)$ и сигма-алгеброй измеримых множеств Φ , которая содержит все борелевские множества.

Пусть также T – измеримое, сохраняющее меру μ отображение X в себя. Всюду ниже будем считать, что $\mu(X) = 1$. Хорошо известная теорема Пуанкаре о возвращении [1] гласит, что почти каждая точка X возвращается, т.е. для почти всех (п.в.) $x \in X$ выполнено

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall K > 0 \quad \exists t > K: \quad d(T^t x, x) < \varepsilon.$$

Рассмотрим меру $H_h(\cdot)$ на X , определенную следующим образом:

$$H_h(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_h^\delta(E),$$

где $h(t)$ – неотрицательная ($h(0) = 0$) непрерывная возрастающая функция, а $H_h^\delta(E) = \inf \{ \sum h(\delta_j) \}$, где $\inf$ берется по не более чем счетным покрытиям E открытыми множествами $\{B_j\}$, $\text{diam}(B_i) = \delta_j < \delta$. Если $h(t) = t^\alpha$, то получаем обычную меру Хаусдорфа $H_\alpha(\cdot)$.

Следующие ниже теоремы 1.1 и 1.2 были доказаны Бошернишаном в [2]. (Похожий результат независимо получил Мошевитин в [3].)

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть X – метрическое пространство, имеющее $H_\alpha(X) = C < \infty$, а T – отображение X в себя, сохраняющее меру μ . Тогда для п.в. $x \in X$ выполнено

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \{n^\beta \cdot d(T^n x, x)\} < \infty, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{1}{\alpha}.$$

Будем говорить, что меры μ и H_h согласованы, если любое μ -измеримое множество является H_h -измеримым.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть X – метрическое пространство, H_α и μ согласованы, для любого μ -измеримого множества A выполнено $\mu(A) = H_\alpha(A)$ и T – отображение X в себя, сохраняющее меру μ . Тогда для п.в. $x \in X$ выполнено

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \{n^\beta \cdot d(T^n x, x)\} \leq 1, \quad \text{где } \beta = \frac{1}{\alpha}.$$

В данной заметке установлено среднее значение для констант локальной возвращаемости и N -возвращаемости, найдена константа возвращаемости для топологического случая. Используемые конструкции развивают подход из работ [2], [3].

2. Результат о возвращении в среднем. Сформулируем наш основной результат о возвращаемости в среднем.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть X – метрическое пространство, для которого выполнено свойство $H_h(X) = C < \infty$, а T – отображение X в себя, сохраняющее меру μ . Будем считать, что μ и H_h согласованы. Рассмотрим функцию

$$C(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \{n \cdot h(d(T^n x, x))\}.$$

Тогда $C(x)$ – интегрируемая (по мере μ) функция и для любого μ -измеримого A выполнено

$$\int_A C(x) d\mu \leq H_h(A).$$

Если же $H_h(A) = 0$, то $\int_A C(x) d\mu = 0$ без условия согласованности мер μ и H_h .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Согласно примеру из § 7 работы [2] оценка в теореме 2.1 является неулучшаемой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Для начала докажем (по аналогии с [2]), что $C(x)$ – измеримая функция. Докажем, что для любого a множество

$$W = \{x \in X \mid C(x) > a\}$$

μ -измеримо. Действительно, для любого $u > 0$ множества

$$W(u) = \{x \in X \mid \forall n \geq 1: d(T^n x, x) < u \quad \text{выполнено } nh(d(T^n x, x)) > a + u\}$$

μ -измеримы и

$$W = \bigcup_{k=1}^{\infty} W\left(\frac{1}{k}\right).$$

То есть $C(x)$ – измеримая функция.

Следующая лемма общеизвестна (см. [2]).

ЛЕММА 1. Пусть Y – μ -измеримое множество, $t \geq 1$,

$$Y(t) := \{x \in Y \mid T^i x \notin Y \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq i \leq t\}.$$

Тогда $\mu(Y(t)) \leq 1/t$.

ЛЕММА 2. Для любого измеримого множества V с $H_h(V) < c\mu(V)$ существует множество $F \subseteq V$, $\mu F > 0$, такое, что для любого $x \in F$ выполнена оценка $C(x) < c$.

В теореме Бошернишана [2] аналог множества W имеет меру, близкую к $\mu(V)$, но значение константы возвращения не отслеживается. В нашей лемме мера W мала, но устанавливается ограничение на $C(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Пусть $H_h(V) \neq 0$. Положим $\kappa = H_h(V)/c\mu(V) < 1$ и выберем параметр p так, что $1 < p$ и $p^3 < 1/\kappa$. Возьмем покрытие V множествами $\{U_i\}$ с $\text{diam}(U_i) = r_i < \varepsilon$, так что $\sum_{i \geq 0} h(r_i) < c'$, где $c' = H_h(V)p$. Можно считать U_i не обязательно открытыми, но не пересекающимися. Введем множество индексов

$$J = \{i \mid c'pu_i < h(r_i)\mu(V)\}, \quad (1)$$

где $u_i = \mu(U_i)$. Тогда

$$\sum_{i \in J} u_i < \frac{\mu(V)}{c'p} \sum h(r_i) < \frac{\mu(V)}{p} \quad \text{и} \quad \sum_{i \notin J} u_i > \mu(V) \left(1 - \frac{1}{p}\right). \quad (2)$$

Для $i \notin J$ введем, как в лемме 1, множества $U_i(t_i)$ с $\mu(U_i(t_i)) \leq 1/t_i$, где $t_i = c/(ph(r_i))$, т.е.

$$\mu(U_i(t_i)) \leq \frac{ph(r_i)}{c} \leq \frac{c'p^2u_i}{c\mu(V)} = \frac{u_i H_h(V)p^3}{c\mu(V)} = u_i p^3 \kappa < u_i.$$

Рассмотрим множества

$$G(\varepsilon) = \bigcup_{i \in J} U_i \sqcup \bigcup_{i \notin J} U_i(t_i) \quad \text{и} \quad F(\varepsilon) = V \setminus G(\varepsilon).$$

Тогда

$$\mu(G(\varepsilon)) \leq \sum_{i \in J} u_i + \sum_{i \notin J} u_i p^3 \kappa = \mu(V) - \sum_{i \notin J} u_i + \sum_{i \notin J} u_i p^3 \kappa = \mu(V) - \sum_{i \notin J} u_i (1 - p^3 \kappa).$$

Таким образом, используя (2), получаем

$$\mu(F(\varepsilon)) \geq (1 - p^3 \kappa) \sum_{i \notin J} u_i > \mu(V) (1 - p^3 \kappa) \left(1 - \frac{1}{p}\right). \quad (3)$$

Отсюда для любого $x \in F(\varepsilon)$, $x \in U_i$, существует натуральное k , $1 \leq k \leq t_i$, такое, что $T^k x \in U_i$ и $d(T^k x, x) < r_i$. То есть

$$h(d(T^k x, x)) < h(r_i) = \frac{c}{pt_i} \leq \frac{c}{pk}.$$

Теперь берем последовательность $\{\varepsilon_i\}$, $\varepsilon_i \rightarrow 0$, и множество

$$F = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{i \geq k} F(\varepsilon_i) = \{x \in X \mid x \in F(\varepsilon_i) \text{ для бесконечного числа } F(\varepsilon_i)\}. \quad (4)$$

Тогда $\mu(F) \geq \mu(V)(1 - p^3\kappa)(1 - 1/p) > 0$ и для любого $x \in F$

$$\liminf \{n \cdot h(d(T^n x, x))\} \leq \frac{c}{p} < c. \quad (5)$$

Если же $H_h(V) = 0$, то $\kappa = 0$. В этом случае возьмем произвольное $0 < c < 1$, параметр $p > 1$ и покрытие V множествами $\{U_i\}$ с $\text{diam}(U_i) = r_i < \varepsilon$ так, что $\sum_{i \geq 0} h(r_i) < c'$, где $c' = c^2 \mu(V)/p^2$. Вводим по формуле (1) множество индексов J , тогда

$$\sum_{i \in J} u_i < \frac{\mu(V)}{p} \quad \text{и} \quad \sum_{i \notin J} u_i > \mu(V) \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Для $i \notin J$ введем множества $U_i(t_i)$ с $\mu(U_i(t_i)) \leq 1/t_i$, где $t_i = c/(ph(r_i))$, т.е.

$$\mu(U_i(t_i)) \leq \frac{ph(r_i)}{c} \leq \frac{c'p^2 u_i}{c\mu(V)} = u_i c < u_i.$$

Действуя аналогично случаю $H_h(V) \neq 0$, получаем вместо (3)

$$\mu(F(\varepsilon)) \geq (1 - c) \sum_{i \notin J} u_i > \mu(V)(1 - c) \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Откуда для любого $x \in F(\varepsilon)$, $x \in U_i$, существует натуральное k , $1 \leq k \leq t_i$, такое, что $T^k x \in U_i$ и $d(T^k x, x) < r_i$. То есть

$$h(d(T^k x, x)) < h(r_i) = \frac{c}{pt_i} \leq \frac{c}{pk}.$$

Следовательно, для всех $x \in F$ (F определено опять же по формуле (4), $\mu F > 0$) имеет место (5). Лемма 2 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 2.1. Возьмем произвольное измеримое множество A . Будем считать, что $\mu(A) > 0$. Возьмем любое натуральное n и введем множества уровней для $C(x)$:

$$A_j = \left\{x \in A \mid \frac{j-1}{2^n} \leq C(x) < \frac{j}{2^n}\right\}, \quad j = 1, \dots, 2^n \cdot n, \quad M(n) = \bigsqcup_{j=1}^{2^n n} A_j,$$

$$B(n) = \{x \in A \mid n \leq C(x)\}.$$

Тогда

$$\int_{M(n)} C(x) d\mu \leq \sum_{j=1}^{2^n n} \mu A_j \frac{j}{2^n}.$$

В случае согласованности μ и H_h из леммы 2 следует, что

$$H_h(A_j) \geq \frac{j-1}{2^n} \mu(A_j),$$

значит,

$$\sum_{j=1}^{2^n n} \mu A_j \frac{j}{2^n} \leq H_h(A) + \sum_{j=1}^{2^n n} \frac{\mu A_j}{2^n} \leq H_h(A) + \frac{1}{2^n}. \quad (6)$$

Опять же из леммы 2 получаем

$$\mu B(n) \leq \frac{H_h(B(n))}{n} \leq \frac{C}{n}.$$

Если же $H_h(A) = 0$, то $\mu(A_j) = 0$ для всех $j \neq 1$,

$$\sum_{j=1}^{2^n n} \mu A_j \frac{j}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

и $\mu B(n) = 0$.

Рассмотрим измеримые неотрицательные функции $f_n: f_n(x) = C(x)$ на $M(n)$ и $f_n(x) = 0$ на $B(n)$. Так как $\mu B(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $f_n \rightarrow f$ п.в. и из неравенства (6) получаем, что $\int_A f_n d\mu \leq H_h(A) + 1/2^n$. Тогда из теоремы Фату вытекает утверждение теоремы. Если же мера A равна нулю, то доказывать нечего ($C(x)$ интегрируема, так как $\mu(X) = 1 > 0$). Теорема доказана.

3. Некоторые следствия из теоремы 2.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так как интегрируемая функция п.в. ограничена, то в случае согласованности мер μ и H_α из теоремы 2.1 вытекает теорема 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из теоремы 2.1 следует теорема 1.2.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для множества E с $H_\alpha(E) = 0$ либо $\mu(E) = 0$, либо $C(x) = 0$ μ -п.в. на E . В частности, если $C(x) > 0$ μ -п.в. на X , то мера μ абсолютно непрерывна относительно меры H_α .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $0 < C = H_\alpha(X) < \infty$.

- (а) Если $C(x) = C$ μ -п.в., то для любого μ -измеримого множества E выполнено $\mu(E) = H_\alpha(E)/C$ и мера μ эргодична.
- (б) Если существует множество A положительной меры такое, что $\mu(A) \neq H_\alpha(A)/C$, то, заменяя, если необходимо, A на $X \setminus A$, получаем $H_\alpha(A) < C\mu(A)$. Следовательно, в A существует множество положительной меры, на котором $C(x) < C$, т.е. там константа возвращения меньше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство (б) очевидно. Докажем (а). Пусть существует разбиение X на T -инвариантные множества положительной меры A_1 и A_2 , $\mu(A_j) \neq 0, 1$, $j = 1, 2$. Если бы $H_\alpha(A_1)$ или $H_\alpha(A_2)$ была равна 0, то по теореме 2.1 $C(x) = 0$ на множестве положительной меры. Таким образом, $0 < H_\alpha(A_1) < C$ и опять из теоремы 2.1 для меры $\mu_1(E) := \mu(E \cap A_1)/\mu(A_1)$ имеем $C(x) < C$ на множестве положительной меры в A_1 . Но тогда $C(x) < C$ на множестве положительной меры в A_1 и для меры μ .

Из этого рассуждения видно, что для неэргодических преобразований существует множество точек положительной меры, на котором $C(x) \leq C/n$, где n – число эргодических компонент.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть мера H_α/C сохраняется и эргодична. Тогда $C(x) = 0$ п.в. для любой другой сохраняемой эргодической меры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствие 3 вытекает из того, что любые две эргодические меры сингулярны (см., например, [4]), т.е. для H_α и другой эргодической меры μ существует множество B с $H_\alpha(B) = 0$ и $\mu(B) = 1$. Значит, по теореме 2.1 $C(x) = 0$ μ -п.в.

ПРИМЕР. Пусть $m \geq 2$ целое. В [5] доказано, что для преобразования $Tx = mx \pmod{1}$ $C(x) = 0$ п.в. в смысле меры Лебега. Из следствия 3 вытекает $C(x) = 0$ п.в. для любой меры (ранее этот результат был доказан Бошерницаном в [2] другим способом).

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть X – компактное метрическое пространство такое, что $H_h(X) = C < \infty$, а T – непрерывное отображение X в себя. Тогда существует $x \in X$ такой, что

$$\liminf \{n \cdot h(d(T^n x, x))\} \leq C.$$

Следствие 4 вытекает из теоремы Боголюбова–Крылова (см., например, [6]).

4. Об N -возвращаемости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть G – вполне ограниченное подмножество в X ; ε -энтропией множества G (следуя Колмогорову [7]) называется величина $H_\varepsilon(G, X) = \log_2 N_\varepsilon(G, X)$, где $N_\varepsilon(G, X)$ – наименьшее количество точек, которое может быть в ε -сети этого множества. Обозначим $N_\varepsilon(X) = N_\varepsilon(X, X)$.

Если X вполне ограничено, то $N_\delta(X)$ конечно для любого δ и имеет место неравенство $\sum h(\delta_j) \leq N_\delta(X)h(\delta)$. Следовательно, если $N_\delta(X) \leq C/h(\delta)$ (h – функция из определения H_h), то $H_h(X) \leq C$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Возьмем произвольное натуральное N . Функцию

$$C_N(x) = \min\{d(T^n x, x) \mid 1 \leq n \leq N\}$$

назовем N -константой возвращаемости для точки x .

Сформулируем наш второй основной результат.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть X – вполне ограниченное метрическое пространство с метрикой $d(\cdot, \cdot)$, функцией $N(x) = N_x(X)$, $\text{diam}(X) = 1$ и T – отображение X в себя, сохраняющее меру μ . Пусть $A \subseteq X$ – любое μ -измеримое множество и $g(x)$ – действительная неубывающая функция, ограниченная на $[0, 1]$, такая, что для любого $t \in (0, 1]$ существует интеграл Стильеса

$$\int_t^1 N_A(x) dg(x), \quad \text{где} \quad N_A(x) = \min(\mu(A), N_x(A, X)/N).$$

Тогда выполнено следующее неравенство:

$$\int_A g(C_N(x)) d\mu \leq \inf \left\{ t \mid g(t)\mu(A) + \int_t^1 N_A(x) dg(x) \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условие $\text{diam}(X) = 1$ не ограничивает общности, ибо можно заменить метрику $d(\cdot, \cdot)$ на метрику $\tilde{d}(\cdot, \cdot) = d(\cdot, \cdot) / \text{diam } X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $g(x) = x$ теорема 4.1 дает оценку среднего значения для $C_N(x)$, при $g(x) = x^k$ теорема 4.1 дает оценку среднего значения для k -го момента $C_N(x)$.

В случае $N_\varepsilon \leq (1/\varepsilon)^d$, d натуральное ($X \subseteq \mathbb{R}^d$), теорема 4.1 дает оценку

$$\int_X C_N(x) d\mu \leq \frac{\ln N}{N}, \quad d = 1, \quad \text{и} \quad \int_X C_N(x) d\mu \leq \frac{d}{(d-1)N^{1/d}}, \quad d \geq 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Так как $C_N(x) \leq 1$, а $g(x)$ ограничена, то интеграл в левой части существует. Возьмем произвольное натуральное m и числа $t_1 = t < t_2 < \dots < t_m = 1$. Введем множества уровней для $C_N(x)$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in A \mid 0 < C_N(x) \leq t_1\}, & A_2 &= \{x \in A \mid t_1 < C_N(x) \leq t_2\}, & \dots, \\ A_m &= \{x \in A \mid t_{m-1} < C_N(x) \leq t_m\}, & B &= \{x \in A \mid C_N(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Пусть $a_j = \mu(A_j)$, $b = \mu(B)$, $a = \mu(A)$, тогда $\sum_{j=1}^m a_j + b = a$ и

$$\int_A g(C_N(x)) d\mu \leq \sum_{j=1}^m g(t_j) a_j + g(0) b = \sum_{j=1}^m (g(t_j) - g(0)) a_j + g(0) a. \quad (7)$$

Для $l \geq 2$ имеем

$$C_l := \bigcup_{j=l}^m A_j = \{x \in A \mid t_{l-1} < C_N(x)\}.$$

Оценим меру C_l . Покроем A множествами U_i с $\text{diam}(U_i) \leq t_{l-1}$ в количестве $N(t_{l-1}) = N_{t_{l-1}}(A, X)$ штук. Мера каждого $V_i = U_i \cap C_l$ не превосходит $1/N$. Действительно, в противном случае по лемме 1 в V_i существует точка с $d(T^n x, x) \leq t_{l-1}$, $1 \leq n \leq N$, т.е. точка, у которой $C_N(x) \leq t_{l-1}$, что противоречит определению C_l . Таким образом,

$$\sum_{j=l}^m a_j = \mu(C_l) \leq N(t_{l-1}) \cdot \frac{1}{N}.$$

Ясно также, что $\mu(C_l) \leq a$ и $\sum_{j=1}^m a_j \leq a$. Мы получили задачу линейного программирования:

- 1) $\sum_{j=1}^m (g(t_j) - g(0)) a_j \rightarrow \max$;
- 2) $\sum_{j=l}^m a_j \leq c_l := \min(a, N(t_{l-1})/N)$, $l \geq 2$, $\sum_{j=1}^m a_j \leq a$;
- 3) $a_j \geq 0$.

Решая ее (например симплекс-методом [8]), находим, что максимальное значение (7) при фиксированном наборе $t_1, t_2, \dots, t_m$ достигается на $a_1 = a - c_2$, $a_2 = c_2 - c_3, \dots$, $a_{m-1} = c_{m-1} - c_m$, $a_m = c_m$ и равно

$$\begin{aligned} & c_m(g(t_m) - g(0)) + \sum_{k=2}^{m-1} (c_k - c_{k+1})(g(t_k) - g(0)) + (a - c_2)(g(t_1) - g(0)) + g(0)a \\ &= c_m g(t_m) + (a - c_2)g(t_1) + \sum_{k=2}^{m-1} (c_k - c_{k+1})g(t_k) \\ &= c_m g(t_m) + (a - c_2)g(t_1) + \sum_{k=2}^{m-1} c_k(g(t_k) - g(t_{k-1})) + c_2 g(t_1) - c_m g(t_{m-1}) \\ &= \sum_{k=2}^m c_k(g(t_k) - g(t_{k-1})) + a g(t_1). \end{aligned} \quad (8)$$

В силу определения интеграла Стильеса убеждаемся, что для произвольного $t \in (0, 1]$ выполнено

$$\int_A g(C_N(x)) d\mu \leq a g(t) + \int_t^1 N_A(x) dg(x).$$

Получили утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики // Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972.
- [2] Boshernitzan M.D. Quantitative recurrence results // Invent. Math. 1993. V. 113. № 3. P. 617.
- [3] Мошевитин Н.Г. Об одной теореме Пуанкаре // УМН. 1998. Т. 53. № 1. С. 223–234.
- [4] Oxtoby J. Ergodic sets // Bull. Amer. Math. Soc. 1952. V. 58. № 2. P. 116–136.
- [5] Spitzer F. Principles of Random Walk: Van Nostrand, 1964.
- [6] Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999.
- [7] Колмогоров А.Н. О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН. 1956. Т. 108. № 3. С. 385.
- [8] Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. М.: Издательство МГУ, 1989.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
02.11.01