Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Бородин, Коэффициент линейности оператора метрического проектирования на чебышевское подпространство, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 2, 180–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4507>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 11:53:44

Коэффициент линейности оператора метрического проектирования на чебышевское подпространство

П. А. Бородин

Определяется коэффициент линейности $\lambda(Y)$ оператора P_Y метрического проектирования на подпространство Y в банаховом пространстве X . Этот коэффициент оказывается связанным с липшицевой нормой оператора P_Y . Доказывается, что для любого чебышевского подпространства Y в пространстве C или в пространстве L_1 имеет место либо равенство $\lambda(Y) = 1$ (что соответствует линейности оператора P_Y), либо неравенство $\lambda(Y) \leq 1/2$.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – банахово пространство, Y – его (замкнутое линейное) подпространство, $\rho(x, Y) = \inf\{\|x - y\| : y \in Y\}$ – расстояние от элемента $x \in X$ до Y , $P_Y(x) = \{y \in Y : \|x - y\| = \rho(x, Y)\}$ – множество ближайших к x элементов из Y .

Подпространство Y называется *чебышевским*, если для каждого $x \in X$ множество $P_Y(x)$ состоит ровно из одного элемента (т.е. для каждого $x \in X$ имеет место существование и единственность элемента наилучшего приближения при аппроксимации элементами подпространства Y). Возникающий при этом *оператор метрического проектирования* $P_Y: X \rightarrow Y$, сопоставляющий каждому элементу $x \in X$ его элемент наилучшего приближения $P_Y(x) \in Y$, не является, вообще говоря, ни линейным, ни даже непрерывным [1], [2].

Качества оператора P_Y определяются свойствами *квазиортогонального множества* $Q(Y)$ к подпространству Y :

$$Q(Y) = \{q \in X : P_Y(q) \ni 0\} = \{q \in X : \exists f \in Y^\perp, f \neq 0 : f(q) = \|f\| \cdot \|q\|\}$$

(здесь подпространство Y необязательно чебышевское, $Y^\perp = \{f \in X^* : f(y) = 0 \forall y \in Y\}$ – аннулятор подпространства Y). Квазиортогональное множество всегда замкнуто и является конусом: $q \in Q(Y)$ влечет $\lambda q \in Q(Y)$ для любого числа λ .

ЛЕММА А [1], [2]. *Подпространство Y является чебышевским тогда и только тогда, когда*

- 1) $Q(Y) + Y = X$,
- 2) для любого $q \in Q(Y)$ выполнено $P_Y(q) = \{0\}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00648а).

При этом оператор P_Y линеен тогда и только тогда, когда $Q(Y)$ – линейное подпространство.

Таким образом, в случае чебышевского подпространства Y с линейным оператором P_Y для любых двух элементов $q_1, q_2 \in Q(Y)$ справедливо равенство $\rho(q_1 + q_2, Y) = \|q_1 + q_2\|$. В то же время для любого чебышевского подпространства Y и любых $q_1, q_2 \in Q(Y)$, $q_1 + q_2 \neq 0$, имеем $\rho(q_1 + q_2, Y) \neq 0$, иначе $q_1 + q_2 = y \in Y$, $y \neq 0$, и для элемента $q_1 = -q_2 + y$ нарушается условие 2) из леммы А.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Коэффициентом линейности оператора метрического проектирования на чебышевское подпространство Y назовем величину

$$\lambda(Y) = \inf \left\{ \frac{\rho(q_1 + q_2, Y)}{\|q_1 + q_2\|} : q_1, q_2 \in Q(Y), q_1 + q_2 \neq 0 \right\}.$$

Отметим, что в этом определении нельзя взять число слагаемых q_j большее, чем 2: если $Q(Y)$ не является подпространством, то для некоторых $q_1, q_2 \in Q(Y)$ справедливо равенство $q_1 + q_2 = q + y$ с $q \in Q(Y)$, $y \in Y$, $y \neq 0$ (см. лемму А), и тогда для $q_3 = -q \in Q(Y)$ имеем $\rho(q_1 + q_2 + q_3, Y) = \rho(y, Y) = 0$, но $\|q_1 + q_2 + q_3\| = \|y\| > 0$.

Вообще говоря, вместо чебышевского подпространства можно рассматривать подпространство существования Y (т.е. подпространство, метрическая проекция $P_Y(x)$ на которое не пуста для любого элемента $x \in X$), и измерять таким же образом коэффициент линейности какой-нибудь выборки p из метрической проекции ($p: X \rightarrow Y$ – однозначное отображение, $p(x) \in P_Y(x)$ для любого $x \in X$). При этом вместо $Q(Y)$ надо брать ядро $p^{-1}(0)$ этой выборки.

ПРИМЕР 1. Пусть $X = C(K)$ – пространство действительных непрерывных функций на хаусдорфовом компакте K с равномерной нормой и K содержит не менее трех точек. Тогда для одномерного чебышевского подпространства $Y \subset C(K)$, состоящего из констант, справедливо равенство $\lambda(Y) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Квазиортогональное множество $Q(Y)$ в данном случае состоит из функций q , принимающих значения $\|q\|$ и $-\|q\|$. Сумма $q_1 + q_2$ двух таких функций принимает как неположительные, так и неотрицательные значения. Поэтому расстояние $\rho(q_1 + q_2, Y)$, равное половине разности между наибольшим и наименьшим значением функции $q_1 + q_2$, никак не меньше $\|q_1 + q_2\|/2$. В то же время нетрудно построить такие функции $q_1, q_2 \in Q(Y)$, что $\rho(q_1 + q_2, Y) = \|q_1 + q_2\|/2$. Возьмем три точки $t_1, t_2, t_3 \in K$ и их непересекающиеся окрестности U_1, U_2, U_3 . По лемме Урысона [3; с. 172] существуют такие функции $f_1, f_2, f_3 \in C(K)$, что $f_j(t_j) = 1$, $f_j(t) = 0$ при $t \notin U_j$, и $0 \leq f_j(t) \leq 1$ при всех $t \in K$ ($j = 1, 2, 3$). Тогда функции $q_1 = f_1 - f_2 + f_3$ и $q_2 = f_2 - f_3$ квазиортогональны подпространству Y и удовлетворяют равенствам $\|q_1 + q_2\| = \|f_1\| = 1$, $\rho(q_1 + q_2, Y) = \rho(f_1, Y) = 1/2$. Доказательство окончено.

ПРИМЕР 2. Пусть l_1^3 – трехмерное действительное пространство с нормой $\|x\| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$. Для одномерного чебышевского подпространства $Y = \{(a, a, a) : a \in \mathbb{R}\}$ (подпространства “констант”) в l_1^3 справедливо равенство $\lambda(Y) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого вектора $x = (x_1, x_2, x_3) \in l_1^3$ имеем $P_Y(x) = (x_c, x_c, x_c)$, где x_c – среднее из чисел x_1, x_2, x_3 . При этом $\rho(x, Y) = \max\{x_j\} - \min\{x_j\}$, а квазиортогональное множество $Q(Y)$ состоит из векторов q , у каждого из которых одна из координат равна 0, другая неотрицательна, а третья неположительна. Сумма $q_1 + q_2$ двух таких векторов имеет как неположительные, так и

неотрицательные координаты. Поэтому расстояние $\rho(q_1 + q_2, Y)$ равно сумме модулей наибольшей и наименьшей координат вектора $q_1 + q_2$, которая не может быть более чем в 2 раза меньше суммы $\|q_1 + q_2\|$ модулей всех координат этого вектора. В то же время для векторов $q_1 = (1, 0, 0)$ и $q_2 = (0, 1, 0)$ имеем $q_1, q_2 \in Q(Y)$ и $\rho(q_1 + q_2, Y) = 1 = \|q_1 + q_2\|/2$. Доказательство окончено.

Подпространство из примера 2 имеет бесконечномерный аналог – чебышевское подпространство Морриса [4]

$$Y = \{f \in L_1[0, 3] : f(x) = f(x+1) = f(x+2) \text{ для почти всех } x \in [0, 1]\}$$

в пространстве $L_1[0, 3]$. Можно показать, что для подпространства Морриса также справедливо равенство $\lambda(Y) = 1/2$.

Как показывают основные результаты настоящей работы (теоремы 3 и 5), подпространства из примеров 1 и 2 являются “экстремальными” соответственно в пространстве непрерывных функций и в пространстве суммируемых функций: для любого чебышевского подпространства $Y \subset C(K)$, а также для любого чебышевского подпространства $Y \subset L_1(M, \Sigma, \mu)$ имеет место либо равенство $\lambda(Y) = 1$, либо неравенство $\lambda(Y) \leq 1/2$. Кроме того, в работе исследована связь коэффициента линейности оператора метрического проектирования с его константой Липшица (теорема 1) и показано, что банахово пространство X , в котором каждое подпространство Y является чебышевским с $\lambda(Y) > 0$, изоморфно гильбертову пространству (теорема 2).

2. Свойства коэффициента линейности.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого чебышевского подпространства Y справедливы следующие утверждения:*

- (1) $0 \leq \lambda(Y) \leq 1$; $\lambda(Y) = 1$ тогда и только тогда, когда оператор P_Y линеен;
- (2) если оператор P_Y удовлетворяет условию Липшица с константой k :

$$\|P_Y(x_1) - P_Y(x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in X,$$

то $\lambda(Y) \geq 1/(k+1)$;

- (3) если $\lambda(Y) > 0$, то P_Y удовлетворяет условию Липшица с константой $k = 1/\lambda(Y) + 1$;
- (4) $\lambda(Y) = 0$ тогда и только тогда, когда оператор P_Y не является липшицевым;
- (5) если оператор P_Y разрывен, то $\lambda(Y) = 0$; обратное, вообще говоря, неверно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (1) следует из определения $\lambda(Y)$ и леммы А.

Докажем (2). Пусть $q_1, q_2 \in Q(Y)$ и $y = P_Y(q_1 + q_2)$. Имеем

$$\begin{aligned} \rho(q_1 + q_2, Y) &= \|q_1 + q_2 - y\| \geq \|q_1 + q_2\| - \|y\| = \|q_1 + q_2\| - \|P_Y(q_1 + q_2)\| \\ &\geq \|q_1 + q_2\| - k\|q_1 + q_2\| = \|q_1 + q_2\| - k\|q_1 + q_2 - y\| \\ &= \|q_1 + q_2\| - k\rho(q_1 + q_2, Y), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\rho(q_1 + q_2, Y)}{\|q_1 + q_2\|} \geq \frac{1}{k+1}, \quad \text{следовательно,} \quad \lambda(Y) \geq \frac{1}{k+1}.$$

Докажем (3). Пусть $x_1 = q_1 + y_1$, $x_2 = q_2 + y_2$, где $y_1 = P_Y(x_1)$, $y_2 = P_Y(x_2)$. Имеем $q_1, q_2 \in Q(Y)$, и

$$\begin{aligned} \|P_Y(x_1) - P_Y(x_2)\| &= \|y_1 - y_2\| \leq \|q_1 - q_2 + y_1 - y_2\| + \|q_1 - q_2\| \\ &= \|x_1 - x_2\| + \|q_1 - q_2\| \leq \|x_1 - x_2\| + \frac{1}{\lambda(Y)} \rho(q_1 - q_2, Y) \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + \frac{1}{\lambda(Y)} \|q_1 - q_2 - (y_2 - y_1)\| \\ &= \|x_1 - x_2\| + \frac{1}{\lambda(Y)} \|x_1 - x_2\| = \left(1 + \frac{1}{\lambda(Y)}\right) \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Утверждение (4) вытекает из утверждений (2) и (3).

Докажем (5). Если оператор P_Y разрывен, то он не является липшицевым, а значит, $\lambda(Y) = 0$ по утверждению (4).

Примером чебышевского подпространства Y с непрерывным оператором P_Y , но с $\lambda(Y) = 0$, служит подпространство $Y = \{ax + b\}$ линейных функций в пространстве $C[0, 1]$ действительных непрерывных функций с обычной равномерной нормой. Действительно, оператор P_Y непрерывен в силу конечномерности Y . Но, как показал Стечкин (см. “пример Стечкина” в [5]), оператор P_Y не является равномерно непрерывным в $C[0, 1]$, а значит, не является липшицевым, откуда $\lambda(Y) = 0$.

Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Если оператор P_Y удовлетворяет условию Липшица с точной константой $k(Y) = \sup\{\|P_Y(x_1) - P_Y(x_2)\|/\|x_1 - x_2\| : x_1 \neq x_2\}$ (норма липшицева отображения), то

$$\frac{1}{k(Y) + 1} \leq \lambda(Y) \leq \min\left\{\frac{1}{k(Y) - 1}, 1\right\}. \quad (*)$$

(Отметим, что всегда $k(Y) \geq 1$; при $k(Y) = 1$ считаем $1/(k(Y) - 1) = +\infty$.)

В неравенстве (*) равенство может достигаться как слева, так и справа. Например, для подпространства Y из примера 1 во введении имеем $\lambda(Y) = 1/2$, $k(Y) = 1$, что обращает в равенство левое неравенство (*). В то же время для подпространства Y из примера 2 во введении имеем $\lambda(Y) = 1/2$, $k(Y) = 3$, что обращает в равенство правое неравенство (*).

ТЕОРЕМА 2. а) Пусть X – банахово пространство, Y – чебышевское подпространство в X с $\lambda(Y) > 0$. Если существует линейный проектор $\pi : Y^{**} \rightarrow Y$ нормы α , то существует линейный проектор $P : X \rightarrow Y$ нормы не более $\alpha(1/\lambda(Y) + 1)$.

б) Если в банаховом пространстве X каждое замкнутое линейное подпространство Y является чебышевским и $\lambda(Y) > 0$, то X изоморфно гильбертову пространству.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) По теореме 1 оператор метрического проектирования $P_Y : X \rightarrow Y$ является липшицевым с нормой не более чем $1/\lambda(Y) + 1$. По теореме Линденштраусса [6; следствие 1] существует линейный проектор $A : X^{**} \rightarrow Y^{**}$ с нормой $\|A\| \leq 1/\lambda(Y) + 1$. Сужение композиции $\pi \circ A$ на пространство X является искомым линейным проектором $P : X \rightarrow Y$.

б) По условию каждое замкнутое линейное подпространство $Y \subset X$ является подпространством существования, а значит, X рефлексивно в силу теоремы Джеймса [7] (и все его подпространства тоже рефлексивны). Из доказанного утверждения а) теоремы следует, что каждое подпространство Y дополняемо в X , а тогда по теореме Линденштраусса и Цафрири [8] X изоморфно гильбертову пространству.

Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Если банахово пространство X не изоморфно гильбертову пространству, то в X есть либо нечебышевское подпространство Y , либо чебышевское подпространство Y с $\lambda(Y) = 0$ (т.е. с нелипшицевым оператором метрического проектирования).*

В частности, в каждом из пространств $L_p[0, 1]$, $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$, должно быть подпространство с нелипшицевым оператором метрического проектирования. Такое подпространство (именно, подпространство констант) было обнаружено Альбрехтом [9].

3. Пространство C . Пусть $C[K]$ – пространство действительных непрерывных функций на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве K (в современной терминологии K – компакт, в терминологии [3] K – бикомпакт) с обычной равномерной нормой $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in K\}$. Каждая функция $f \in C[K]$ достигает своей нормы на непустом замкнутом подмножестве $m(f) = \{t \in K : |f(t)| = \|f\|\}$.

О чебышевских подпространствах в $C[K]$ см. [1], [2], [10]. В [11] были полностью описаны чебышевские подпространства в $C[K]$, имеющие линейный оператор метрического проектирования. Следующая теорема уточняет этот результат.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть Y – чебышевское подпространство в $C[K]$. Тогда*

- (1) $\dim Y = 0$ или $\operatorname{codim} Y \leq 1$ влечет $\lambda(Y) = 1$;
- (2) $\dim Y \geq 1$ и $\operatorname{codim} Y \geq 2$ влечет $\lambda(Y) \leq 1/2$;
- (3) если компакт K бесконечен, то при $2 \leq \dim Y < \infty$ или $2 \leq \operatorname{codim} Y < \infty$ справедливо равенство $\lambda(Y) = 0$.

Как показывает пример 1 из введения, неравенство $\lambda(Y) \leq 1/2$ в утверждении (2) теоремы является точным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $Y = \{0\}$, или $Y = C(K)$, или $\operatorname{codim} Y = 1$, то (в последнем случае см. [1] или [11]) оператор P_Y линеен, а значит, $\lambda(Y) = 1$.

Для доказательства утверждения (2) понадобится

ЛЕММА [12]. *Пусть X – банахово пространство, Y – чебышевское подпространство в X с непрерывным оператором метрического проектирования. Тогда в любом замкнутом подпространстве $Z \subset X$, удовлетворяющем неравенству*

$$\dim(Z/(Z \cap Y)) > \dim(Y/(Z \cap Y)),$$

найдется ненулевой вектор q , квазиортogonalный подпространству Y .

В [12] доказано более общее утверждение. Приведем доказательство леммы для полноты картины.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем в действительном случае. Пусть $\dim(Y/(Z \cap Y)) = n$. Возьмем произвольное $(n + 1)$ -мерное подпространство $Z_0 \subset (Z \setminus Y) \cup \{0\}$ – оно существует в силу неравенства из условия леммы.

Рассмотрим множество

$$S = \{z \in Z_0 : \rho(z, Y) = 1\}.$$

Это компактное множество, гомеоморфное n -мерной сфере S^n . Отображение $p : S \rightarrow Y/(Z \cap Y)$, задаваемое равенством $p(z) = [P_Y(z)]$, является непрерывным отображением сферы S^n в n -мерное пространство $\mathbb{R}^n$. По теореме Борсука [13] найдется такой элемент $z_0 \in S$, что $p(z_0) = p(-z_0)$. Следовательно, элемент

$$\frac{1}{2}(P_Y(z_0) - P_Y(-z_0)) = P_Y(z_0)$$

принадлежит подпространству $Z \cap Y$, откуда

$$z - P_Y(z) \in (Q(Y) \cap Z) \setminus \{0\}.$$

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 3. Пусть $\dim Y \geq 1$, $\text{codim } Y \geq 2$. Возьмем какую-нибудь ненулевую функцию $y \in Y$, $\|y\| = 1$, и точку $t_0 \in m(y)$ такую, что $y(t_0) = 1$ без ограничения общности. Подпространство $Z = \{f \in C[K] : f(t_0) = 0\}$ имеет коразмерность 1 в $C[K]$ и не содержит Y , поэтому $\dim(Z/(Z \cap Y)) = \text{codim } Y \geq 2 > 1 = \dim(Y/(Z \cap Y))$, откуда по лемме найдется ненулевая функция $q \in Q(Y)$ с $q(t_0) = 0$. Считаем $\|q\| = 1$.

Замкнутые множества $m(q)$ и $\{t_0\}$ не пересекаются. Поскольку K является нормальным топологическим пространством [3; с. 244], у этих множеств найдутся непесекающиеся окрестности $U \supset m(q)$ и $V \ni t_0$. По лемме Урысона существуют функции $f, g \in C[K]$ со следующими свойствами: $f(t) = 0$ на $K \setminus U$, $f(t) = 1$ при $t \in m(q)$ и $0 \leq f(t) \leq 1$ при всех $t \in K$; $g(t_0) = 1$, $g(t) = 0$ при $t \in K \setminus V$ и $0 \leq g(t) \leq 1$ при всех $t \in K$.

Положим

$$q_1 = fq + gy, \quad q_2 = -fq + gy.$$

Нетрудно видеть, что $\|q_1\| = \|q_2\| = 1$, $m(q_1) = m(q_2) \supseteq (m(q) \cup \{t_0\})$, и $q_1(t) = -q_2(t) = q(t)$ при всех $t \in m(q)$. Поэтому $q_1, q_2 \in Q(Y)$. В то же время $\|q_1 + q_2\| = (q_1 + q_2)(t_0) = 2$, а

$$\rho(q_1 + q_2, Y) \leq \|q_1 + q_2 - y\| = \|2gy - y\| \leq \|y\| \cdot \|2g - 1\| = 1.$$

Отсюда $\lambda(Y) \leq \rho(q_1 + q_2, Y)/\|q_1 + q_2\| \leq 1/2$, что и требовалось.

Докажем утверждение (3). Если $2 \leq \text{codim } Y < \infty$ и компакт K бесконечен, то, как показал Моррис [14], оператор P_Y разрывен, откуда $\lambda(Y) = 0$ по теореме 1.

Если же $2 \leq \dim Y < \infty$ и компакт K бесконечен, то, как показал А. Клайн ([15; теорема 4]; см. также [16]), оператор P_Y не является липшицевым, откуда $\lambda(Y) = 0$ по теореме 1.

Теорема 3 полностью доказана.

По-видимому, в утверждении (3) теоремы 3 можно снять ограничения $\dim Y < \infty$ и $\text{codim } Y < \infty$. В частном случае это действительно удается сделать.

ТЕОРЕМА 4. Пусть бесконечный компакт K имеет конечное число предельных точек, Y – чебышевское подпространство в $C[K]$ (в частности, $C[K]$ может совпадать с пространством

$$c = C \left[\left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\} \right]$$

сходящихся последовательностей). Тогда

- (1) $\dim Y = 0$ или $\operatorname{codim} Y \leq 1 \Rightarrow \lambda(Y) = 1$;
- (2) $\dim Y = 1 \Rightarrow \lambda(Y) \leq 1/2$;
- (3) $\dim Y \geq 2$ или $\operatorname{codim} Y \geq 2 \Rightarrow \lambda(Y) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3 остается доказать утверждение (3) в случае чебышевского подпространства $Y \subset C[K]$ с $\dim Y = \operatorname{codim} Y = \infty$ (неизвестно, существуют ли такие подпространства). Но, как доказано в [12], оператор P_Y метрического проектирования для такого подпространства разрывен, а следовательно, $\lambda(Y) = 0$ по теореме 1.

Теорема 4 доказана.

Следует отметить, что о чебышевских подпространствах $Y \subset C[K]$ с $\dim Y = \operatorname{codim} Y = \infty$ мало что известно. Пример такого подпространства в пространстве $L_\infty[0, 1]$ построил Вулберт [17]. Неизвестно, есть ли такие подпространства в $C[0, 1]$.

4. Пространство L_1 . Пусть $L_1(M) = L_1(M, \Sigma, \mu)$ – пространство действительных функций, определенных на множестве M произвольной природы и суммируемых на M по мере μ , заданной на σ -алгебре Σ подмножеств этого множества. Для каждой функции $f \in L_1(M)$ ее носитель $\operatorname{supp} f := \{t \in M : f(t) \neq 0\}$ определен с точностью до множества меры 0.

ТЕОРЕМА 5. Для любого чебышевского подпространства $Y \subset L_1(M)$ имеет место либо равенство $\lambda(Y) = 1$, либо неравенство $\lambda(Y) \leq 1/2$.

Как показывает пример 2 из введения, неравенство $\lambda(Y) \leq 1/2$ в этой теореме является точным. Чебышевские подпространства Y с линейным оператором метрического проектирования (т.е. с $\lambda(Y) = 1$) в пространстве L_1 описаны в [11].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Y \subset L_1(M)$ – чебышевское подпространство. Рассмотрим три случая.

(а) Для любых двух элементов $q_1, q_2 \in Q(Y)$ их сумма $q_1 + q_2$ также квазиортогональна подпространству Y . Тогда по лемме А оператор P_Y линеен, и $\lambda(Y) = 1$.

(б) Для любого $q \in Q(Y)$ и любой функции $f \in L_1(M)$ с $\operatorname{supp} f \subseteq \operatorname{supp} q$ имеет место включение $f \in Q(Y)$.

Возьмем два элемента $q_1, q_2 \in Q(Y)$ с $q_1 + q_2 \notin Q(Y)$. В силу предположения (б) можно считать, что носители $M_1 = \operatorname{supp} q_1$ и $M_2 = \operatorname{supp} q_2$ не пересекаются. По лемме А имеем $q_1 + q_2 = q + y$, где $q \in Q(Y)$, $y \in Y$, $y \neq 0$. Положим $y_1 = y \cdot I_{M_1}$, $y_2 = y \cdot I_{M_2}$, где I_{M_1} и I_{M_2} – индикаторы множеств M_1 и M_2 соответственно.

В силу предположения (б) имеем $y_1, y_2 \in Q(Y)$. В то же время $y \neq y_1 + y_2$, иначе $y_1 = -y_2 + y \in Q(Y)$, и по лемме А подпространство Y не чебышевское. Положим $y_3 = y - y_1 - y_2$. Имеем $\operatorname{supp} y_3 \subset \operatorname{supp} q$, поэтому $y_3 \in Q(Y)$. Поскольку $y_1 + y_2 + y_3 = y$

и носители функций y_1, y_2, y_3 не пересекаются, норма суммы каких-то двух из этих трех функций – скажем, y_1 и y_2 – не меньше $(2/3)\|y\|$. Но тогда

$$\frac{\rho(y_1 + y_2, Y)}{\|y_1 + y_2\|} \leq \frac{\|y_1 + y_2 - y\|}{\|y_1 + y_2\|} \leq \frac{(1/3)\|y\|}{(2/3)\|y\|} = \frac{1}{2},$$

откуда $\lambda(Y) \leq 1/2$.

(с) Для некоторого $q \in Q(Y)$ и некоторой функции $f \in L_1(M)$ с $\text{supp } f \subseteq \text{supp } q$ имеем $f \notin Q(Y)$.

Известно [2], что функция $q \in L_1(M)$ квазиортогональна подпространству $Y \subset L_1(M)$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $y \in Y$ имеет место неравенство

$$\left| \int_{\text{supp } q} \text{sgn}(q) \cdot y \, d\mu \right| \leq \int_{M \setminus \text{supp } q} |y| \, d\mu.$$

Из этого критерия вытекает

ЛЕММА В. Если $q \in Q(Y)$, то любая функция $u \in L_1(M)$ со свойствами

(1) $\text{supp } u \subseteq \text{supp } q$;

(2) для любого $t \in \text{supp } u$ выполнено $\text{sgn}(u(t)) = \text{sgn}(q(t))$

также квазиортогональна подпространству Y .

В нашем случае имеем $f = q' + y$, где $q' \in Q(Y)$, $y \in Y$ и $y \neq 0$. При этом $\text{supp } y \not\subseteq \text{supp } q$, иначе для элементов $q_1 = 2|y| \cdot \text{sgn}(q)$ и $q_2 = q_1 + y$ имеем $q_1, q_2 \in Q(Y)$ по лемме В, и равенство $q_2 = q_1 + y$ в силу леммы А означает, что Y – не чебышевское подпространство.

Возьмем множества

$$M_1 := \text{supp } y \setminus \text{supp } q, \quad M_2 := \{t \in \text{supp } q : \text{sgn}(y(t)) = \text{sgn}(q(t))\},$$

$$M_3 := \{t \in \text{supp } q : \text{sgn}(y(t)) = -\text{sgn}(q(t))\},$$

и положим

$$y_1 = y \cdot I_{M_1}, \quad y_2 = y \cdot I_{M_2}, \quad y_3 = y \cdot I_{M_3},$$

где $I_{M_1}, I_{M_2}, I_{M_3}$ – индикаторы множеств M_1, M_2, M_3 соответственно. На множестве $M_1 = \text{supp } y_1$ справедливо тождество $\text{sgn}(y_1(t)) = \text{sgn}(-q'(t))$, на множестве $M_2 = \text{supp } y_2$ – тождество $\text{sgn}(y_2(t)) = \text{sgn}(q(t))$, на множестве $M_3 = \text{supp } y_3$ – тождество $\text{sgn}(y_3(t)) = \text{sgn}(-q(t))$, поэтому $y_1, y_2, y_3 \in Q(Y)$ по лемме В.

Поскольку $y_1 + y_2 + y_3 = y$ и носители функций y_1, y_2, y_3 не пересекаются, норма суммы каких-то двух из этих трех функций – скажем, y_1 и y_2 – не меньше $(2/3)\|y\|$. Но тогда так же, как и выше в случае (b), получаем $\rho(y_1 + y_2, Y)/\|y_1 + y_2\| \leq 1/2$, откуда $\lambda(Y) \leq 1/2$.

Теорема 5 полностью доказана.

К сожалению, неравенство $\lambda(Y) \leq 1/2$, полученное в теоремах 3 и 5, после применения утверждения (2) теоремы 1 влечет лишь тривиальное неравенство $k(Y) \geq 1$ для липшицевой нормы оператора метрического проектирования.

Автор благодарен С. В. Конягину и И. Г. Царькову за полезные обсуждения. Основные результаты работы докладывались автором на Международной летней математической школе С. Б. Стечкина по теории функций, проходившей в г. Алексине в августе 2007 г.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. Singer, *Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces*, Grundlehren Math. Wiss., **171**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.
- [2] E. W. Cheney, D. E. Wulbert, “The existence and unicity of best approximation”, *Math. Scand.*, **24**:1 (1969), 113–140.
- [3] П. С. Александров, *Введение в теорию множеств и общую топологию*, Наука, М., 1977.
- [4] P. D. Morris, “Chebyshev subspaces of L_1 with linear metric projection”, *J. Approx. Theory*, **29**:3 (1980), 231–234.
- [5] П. В. Галкин, “О модуле непрерывности оператора наилучшего приближения в пространстве непрерывных функций”, *Матем. заметки*, **10** (1971), 601–613.
- [6] J. Lindenstrauss, “On nonlinear projections in Banach spaces”, *Michigan Math. J.*, **11**:3 (1964), 263–287.
- [7] R. C. James, “Characterizations of reflexivity”, *Studia Math.*, **23**:3 (1964), 205–216.
- [8] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, “On the complemented subspaces problem”, *Israel J. Math.*, **9**:2 (1971), 263–269.
- [9] П. В. Альбрехт, “Порядки модулей непрерывности операторов почти наилучшего приближения”, *Матем. сб.*, **185**:9 (1994), 3–28.
- [10] А. Л. Гаркави, “Теория наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах”, *Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анализ*. 1967, ВИНТИ, М., 1969, 75–132.
- [11] П. А. Бородин, “О линейности оператора метрического проектирования на чебышевские подпространства в пространствах L_1 и C ”, *Матем. заметки*, **63**:6 (1998), 812–820.
- [12] П. А. Бородин, “Аппроксимативные свойства подпространств в пространствах типа c ”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2002, № 5, 54–58.
- [13] K. Borsuk, “Drei Sätze über die n -dimensionale euclidische Sphäre”, *Fund. Math.*, **20** (1933), 177–190.
- [14] P. D. Morris, “Metric projections onto subspaces of finite codimension”, *Duke Math. J.*, **35**:4 (1968), 799–808.
- [15] A. K. Cline, “Lipschitz conditions on uniform approximation operators”, *J. Approx. Theory*, **8**:2 (1973), 160–172.
- [16] В. И. Бердышев, “Метрическая проекция на конечномерные подпространства из C и L ”, *Матем. заметки*, **18**:4 (1975), 473–488.
- [17] D. E. Wulbert, “Convergence of operators and Korovkin’s theorem”, *J. Approx. Theory*, **1**:3 (1968), 381–390.

П. А. Бородин

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: pborodin@inbox.ru

Поступило

13.12.2007

Исправленный вариант

20.05.2008