Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Романюк, Приближение классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций одной и многих переменных, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 3, 429–442

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4508>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:35:44

Приближение классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций одной и многих переменных

А. С. Романюк

Получены точные по порядку оценки наилучших приближений классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q , $1 \leq p, q \leq \infty$, тригонометрическими полиномами с “номера́ми” гармоник из ступенчатых гиперболических крестов. В одномерном случае установлен порядок уклонения частных сумм Фурье функций из классов $B_{1,\theta}^{r_1}$ в пространстве L_1 .

Библиография: 10 названий.

1. Введение. В настоящей работе исследуются наилучшие приближения классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами с “номера́ми” гармоник из ступенчатых гиперболических крестов. Погрешность приближения измеряется в метрике пространства L_q и при этом главное внимание уделяется тем случаям, когда параметры p или q принимают предельные значения 1 или ∞ . Следует отметить, что наилучшие приближения классов $B_{p,\theta}^r$ именно в этих случаях изучены в меньшей мере по сравнению с их приближением в метрике L_q при $1 < p, q < \infty$. Полученные здесь точные по порядку оценки рассматриваемых величин дополняют результаты из работ [1]–[3], в которых изучались приближения функций из классов $B_{p,\theta}^r$ в пространстве L_q для других соотношений между p и q . В названных работах можно ознакомиться с более подробной библиографией, относящейся к данному вопросу. В заключительной части работы в одномерном случае получена точная по порядку оценка уклонения частных сумм Фурье функций из классов $B_{1,\theta}^{r_1}$ в пространстве L_1 .

Приведем необходимые в дальнейшем обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, обозначает d -мерное евклидово пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_d)$, $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$ и $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [-\pi; \pi]$, – пространство 2π -периодических по каждому аргументу функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty.$$

Далее будем предполагать, что для функций $f \in L_p(\pi_d)$ выполнено дополнительное условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, d.$$

Множество таких функций будем обозначать $L_p^0(\pi_d)$.

Для функции $f \in L_p^0(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, рассмотрим разность первого порядка по j -й переменной с шагом h

$$\Delta_{h,j}f(x) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_d) - f(x)$$

и определим разность l -го порядка

$$\Delta_{h,j}^l f(x) = \overbrace{\Delta_{h,j} \dots \Delta_{h,j}}^l f(x)$$

в точке x_j с шагом h . Далее, если $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$, то смешанная разность порядка k с векторным шагом $h = (h_1, \dots, h_d)$ определяется следующим образом:

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_{h_1,1}^{k_1} \dots \Delta_{h_d,d}^{k_d} f(x).$$

Пусть заданы вектор $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, d$, и параметры $1 \leq \theta \leq \infty$, $1 \leq p \leq \infty$. Функция $f \in L_p^0(\pi_d)$ принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$, если

$$\left(\int_{\pi_d} \|\Delta_h^k f(x)\|_p^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dh_j}{h_j^{1+r_j\theta}} \right)^{1/\theta} \leq 1, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\sup_h \|\Delta_h^k f(x)\|_p \prod_{j=1}^d h_j^{-r_j} \leq 1, \quad \theta = \infty.$$

При этом для векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$ и $r = (r_1, \dots, r_d)$ предполагаются выполненными условия $k_j > r_j$, $j = 1, \dots, d$. Классы $B_{p,\theta}^r$ являются аналогами классов, введенных Бесовым [4], и при $\theta = \infty$ $B_{p,\infty}^r = H_p^r$, где H_p^r – аналоги известных классов Никольского (см. [5; с. 89]). Далее нам будет удобно пользоваться эквивалентным (с точностью до абсолютных постоянных) определением классов функций $B_{p,\theta}^r$ в несколько другом виде, для формулировки которого приведем необходимые обозначения.

Пусть $V_l(t)$, $l \in \mathbb{N}$, обозначает ядро Валле-Пуссена вида

$$V_l(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^l \cos kt + 2 \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k-l}{l}\right) \cos kt.$$

Сопоставим каждому вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$, полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^d (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j))$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, положим

$$A_s(f, x) = f(x) * A_s(x),$$

где $*$ обозначает операцию свертки. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, d$, тогда классы $B_{p,\theta}^r$ определяются следующим образом (см., например, [6; замечание 2.1]):

$$B_{p,\theta}^r = \left\{ f(x) : \|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\} \quad (1)$$

при $1 \leq \theta < \infty$ и

$$B_{p,\infty}^r = \{f(x) : \|f\|_{B_{p,\infty}^r} = \sup_s 2^{(s,r)} \|A_s(f, x)\|_p \leq 1\}. \quad (2)$$

Заметим, что в случае $1 < p < \infty$ можно записать эквивалентные (1) и (2) (с точностью до абсолютных постоянных) определения, видоизменив соответствующим образом “блоки” $A_s(f, x)$.

Для векторов $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, и $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, d$, положим

$$\rho(s) = \{k = (k_1, \dots, k_d) : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, d\}$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$ обозначим

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k, x)},$$

где $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k, t)} dt$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Тогда (см., например, [6]) при $1 < p < \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, d$,

$$B_{p,\theta}^r = \left\{ f(x) : \|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\}$$

при $1 \leq \theta < \infty$ и

$$B_{p,\infty}^r = \left\{ f(x) : \|f\|_{B_{p,\infty}^r} = \sup_s 2^{(s,r)} \|\delta_s(f, x)\|_p \leq 1 \right\}.$$

В комментариях к полученным результатам мы будем обращаться к оценкам соответствующих величин на классах функций $W_{p,\alpha}^r$ и поэтому для удобства напомним их определение. Пусть $F_r(x, \alpha)$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, обозначают многомерные аналоги ядер Бернулли, т.е.

$$F_r(x, \alpha) = 2^d \sum_k \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), \quad r_j > 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

и в сумме участвуют только те векторы $k = (k_1, \dots, k_d)$, для которых $k_j > 0$, $j = 1, \dots, d$. Обозначим (см., например, [7; с.31]) через $W_{p,\alpha}^r$ класс функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x) = \varphi(x) * F_r(x, \alpha) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \varphi(y) F_r(x - y, \alpha) dy,$$

где $\varphi \in L_p(\pi_d)$, $\|\varphi\|_p \leq 1$.

Ниже будем предполагать, что координаты векторов $r = (r_1, \dots, r_d)$, которые содержатся в определениях классов, упорядочены в виде

$$0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_d.$$

Вектору $r = (r_1, \dots, r_d)$ сопоставим вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$, $\gamma_j = r_j/r_1$, $j = 1, \dots, d$, которому, в свою очередь, сопоставляется вектор $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_d)$, где $\gamma_j = \gamma'_j$ при

$j = 1, \dots, \nu$ и $1 < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \nu + 1, \dots, d$. Полученные результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений. Для функций $\mu_1(N)$ и $\mu_2(N)$ запись $\mu_1 \ll \mu_2$ означает, что существует постоянная $C > 0$ такая, что $\mu_1(N) \leq C\mu_2(N)$. Соотношение $\mu_1 \asymp \mu_2$ равносильно тому, что $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_1 \gg \mu_2$. Все постоянные C_i , $i = 1, 2, \dots$, которые будут встречаться в работе, могут зависеть только от тех параметров, которые содержатся в определениях классов, метрики и размерности пространства $\mathbb{R}^d$. Если $\mathfrak{N}$ – конечное множество, то $|\mathfrak{N}|$ – количество элементов $\mathfrak{N}$.

Сформулируем несколько известных утверждений, которые нами будут использоваться.

ТЕОРЕМА А (Литтлвуда–Пэли) [5; с. 65]. Пусть задано $p \in (1, \infty)$. Существуют положительные константы $C_1(p)$ и $C_2(p)$ такие, что для каждой функции $f \in L_p^0(\pi_d)$ справедлива оценка

$$C_1(p)\|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f, x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C_2(p)\|f\|_p.$$

ТЕОРЕМА Б [7; с. 32]. Для того чтобы $\|\Delta_h^k f\|_p \ll \prod_{j=1}^d |h_j|^{r_j}$, $k_j > r_d$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} \|\delta_s(f, x)\|_p &\ll 2^{-(s, r)}, & 1 < p < \infty, \\ \|A_s(f, x)\|_p &\ll 2^{-(s, r)}, & 1 \leq p \leq \infty. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА В [8]. Пусть $n = (n_1, \dots, n_d)$, n_j – целые неотрицательные числа, $j = 1, \dots, d$, и

$$t(x) = \sum_{|k_j| \leq n_j} c_k e^{i(k, x)}.$$

Тогда при $1 \leq q < p \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\|t\|_p \leq 2^d \prod_{j=1}^d n_j^{1/q - 1/p} \|t\|_q.$$

Это неравенство было установлено Никольским и получило название “неравенство разных метрик”.

2. Наилучшие приближения. Пусть $Q_n^{\gamma'} = \bigcup_{(s, \gamma') \leq n} \rho(s)$. Тогда множество векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, d$, таких, что $k \in Q_n^{\gamma'}$, называют *ступенчатым гиперболическим крестом*. Через $S_n^{\gamma'}(f, x)$ будем обозначать частную сумму Фурье функции $f(x)$:

$$S_n^{\gamma'}(f, x) = \sum_{(s, \gamma') \leq n} \delta_s(f, x),$$

которую называют *ступенчатой гиперболической суммой Фурье*. Пусть $T(Q_n^{\gamma'})$ обозначает множество полиномов $t(x)$ вида

$$t(x) = \sum_{k \in Q_n^{\gamma'}} c_k e^{i(k, x)}.$$

Для $f \in L_q^0(\pi_d)$ определим величину

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(f)_q = \inf_{t \in T(Q_n^{\gamma'})} \|f - t\|_q, \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

– наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами с “номерами” гармоник из ступенчатого гиперболического креста. Для функционального класса $F \subset L_q$ полагаем

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(F)_q = \sup_{f \in F} E_{Q_n^{\gamma'}}(f)_q.$$

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 < q < \infty$, $r_1 > 0$, $1 \leq \theta < \infty$. Тогда

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(B_{\infty,\theta}^r)_q \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)+}, \quad (3)$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху в (3) следует из результата приближения функций из классов $B_{p,\theta}^r$ в пространстве L_q , $1 < q < p < \infty$, их ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье $S_n^{\gamma'}(f, x)$ [1].

Для получения в (3) соответствующей оценки снизу достаточно рассмотреть случай $\nu = d$. Тогда вектор $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_d)$ имеет вид $\gamma' = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$ и, следовательно, будем писать Q_n^1 и $S_n^1(f, x)$ вместо $Q_n^{\gamma'}$ и $S_n^{\gamma'}(f, x)$ соответственно.

Как следует из теоремы Литтлвуда–Пэли для $f \in L_q^0(\pi_d)$, $1 < q < \infty$, имеет место соотношение (см., например, [7; с. 7])

$$E_{Q_n^1}(f)_q \asymp \|f(x) - S_n^1(f, x)\|_q.$$

Поэтому для получения оценки снизу величины $E_{Q_n^1}(f)_q$ достаточно должным образом оценить снизу величину $\|f(x) - S_n^1(f, x)\|_q$, $f \in B_{\infty,\theta}^r$.

Пусть сначала $\theta \in [2, \infty)$. Рассмотрим функцию

$$g_1(x) = C_1 2^{-nr_1} n^{-(d-1)/\theta} \sum_{(s,1)=n+1} e^{i(2^s, x)},$$

где $(2^s, x) = 2^{s_1}x_1 + \dots + 2^{s_d}x_d$, $C_1 > 0$.

Нетрудно убедиться, что при надлежащем выборе постоянной $C_1 > 0$ эта функция принадлежит классу $B_{\infty,\theta}^r$. Положим $\varphi(x) = \sum_{(s,1)=n+1} e^{i(2^s, x)}$. Поскольку $\|A_s(\varphi, x)\|_\infty \leq 1$, для $\|g_1\|_{B_{\infty,\theta}^r}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{B_{\infty,\theta}^r} &= \left(\sum_s 2^{(r,s)\theta} \|A_s(g_1, x)\|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\asymp 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1)=n+1} 2^{(r,s)\theta} \|A_s(\varphi, x)\|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\leq 2^{-nr_1} n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{(s,1)=n+1} 2^{(r,s)\theta} \right)^{1/\theta} \\ &\asymp n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{(s,1)=n+1} 1 \right)^{1/\theta} \asymp n^{-(d-1)/\theta} n^{(d-1)/\theta} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $g_1 \in B_{\infty,\theta}^r$.

Отметим также, что согласно теореме Литтлвуда–Пэли

$$\|\varphi\|_q \asymp \left(\sum_{(s,1)=n+1} 1 \right)^{1/2} \asymp n^{(d-1)/2}, \quad 1 < q < \infty.$$

Таким образом, принимая во внимание, что $S_n^1(g_1, x) = 0$, будем иметь

$$\|g_1(x) - S_n^1(g_1, x)\|_q = \|g_1\|_q \asymp 2^{-nr_1} n^{-(d-1)/\theta} \|\varphi\|_q \asymp 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

Пусть теперь $\theta \in [1, 2)$. Поскольку в этом случае оценка сверху в (3) не зависит от размерности пространства $\mathbb{R}^d$, соответствующую оценку снизу достаточно получить в одномерном случае. Но легко видеть, что если $d = 1$, то искомая оценка реализуется при приближении функции $g_2(x) = 2^{-nr_1} e^{i2^{n+1}x}$ ее частной суммой Фурье порядка 2^n .

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Порядки величин $E_{Q_n^1}(H_\infty^r)_q$, $1 < q < \infty$, и $E_{Q_n^1}(W_{\infty, \alpha}^r)_q$, $1 \leq q < \infty$, установлены Темляковым (см., например, [9; теоремы 3.3, 3.4]).

В работе [3] при исследовании наилучших приближений классов $B_{p, \theta}^r$ в пространстве L_1 получены оценки

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(B_{p, \theta}^r)_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/p-1/\theta)_+},$$

$1 < p \leq 2$, $r_1 > 0$, $1 \leq \theta < \infty$ [3; теорема 1.1], и

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(B_{p, \theta}^r)_1 \asymp 2^{-nr_1},$$

$2 < p < \infty$, $r_1 > 0$, $1 \leq \theta \leq 2$ [3; теорема 1.2].

В следующем утверждении в двумерном случае мы получим порядок наилучших приближений классов $B_{p, \theta}^r$ в метрике L_1 при $2 < p \leq \infty$, $r_1 > 0$ и $2 \leq \theta < \infty$. Следует заметить, что в одномерном случае порядок соответствующих величин известен при $1 \leq \theta \leq \infty$ и $1 < p \leq \infty$ (см. [3; теорема 3.1]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $d = 2$. Тогда при $2 < \theta < \infty$, $r = (r_1, r_1)$, $r_1 > 0$, и $2 < p \leq \infty$ справедливо соотношение

$$E_{Q_n^1}(B_{p, \theta}^r)_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{(1/2-1/\theta)_+}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху в (4) следует из результата приближения функций класса $B_{p, \theta}^r$ их ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье в пространстве L_q , $1 < q \leq p < \infty$ [1].

Для доказательства в (4) оценки снизу нам понадобятся соответствующие обозначения.

Пусть $T^\perp(N)$ обозначает множество функций вида

$$T^\perp(N) = \{g \in L_1 : (f, g) = 0, f \in T(N)\},$$

где $T(N)$ – множество тригонометрических полиномов двух переменных со спектром из $\Gamma(N)$:

$$\Gamma(N) = \left\{ k : \prod_{j=1}^2 \max\{|k_j|, 1\} \leq N \right\}.$$

Множество $\Gamma(N)$ называют *гиперболическим крестом*.

Пусть $s' = (s'_1, s'_2) \in \mathbb{Z}_+^2$. Обозначим

$$S(m) = \{s = 2s' : s'_1 + s'_2 = m\}$$

и заметим, что $|S(m)| \asymp m$. Не ограничивая общности, будем считать, что $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Кроме того, поскольку $B_{\infty,\theta}^r \subset B_{p,\theta}^r$, $1 \leq p < \infty$, достаточно получить оценку снизу для величины $E_{Q_n^1}(B_{\infty,\theta}^r)_1$.

Рассмотрим тригонометрический полином двух переменных вида

$$P_m(x) = \prod_{s'_1=0}^m (1 + \cos 4^{s'_1} x_1 \cos 4^{m-s'_1} x_2).$$

который, как показано в [9; с. 167], можно представить в виде

$$P_m(x) = 1 + \sum_{s'_1=0}^m \cos 4^{s'_1} x_1 \cos 4^{m-s'_1} x_2 + t_m(x),$$

где $t_m(x) \in T^\perp(4^m)$. Кроме того, $P_m(x) \geq 0$ и $\|P_m\|_1 = 1$. Теперь рассмотрим функцию

$$g_3(x) = 2^{-2r_1 m} \sum_{s'_1=0}^m e^{i(4^{s'_1} x_1 + 4^{m-s'_1} x_2)}.$$

Поскольку $g_3 \in H_\infty^r$ (см. [9; с. 167]), согласно теореме Б

$$\|A_s(g_3, x)\|_\infty \ll 2^{-(s,1)r_1}, \quad s \in S(m).$$

Отправляясь от этого соотношения, можем записать

$$\begin{aligned} \|g_3\|_{B_{\infty,\theta}^r} &= \left(\sum_s 2^{(s,1)r_1\theta} \|A_s(g_3, x)\|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\ll \left(\sum_{s \in S(m)} 2^{(s,1)r_1\theta} 2^{-(s,1)r_1\theta} \right)^{1/\theta} = \left(\sum_{s \in S(m)} 1 \right)^{1/\theta} \asymp m^{1/\theta}. \end{aligned}$$

Отсюда делаем заключение, что функция

$$g_4(x) = C_2 m^{-1/\theta} 2^{-2r_1 m} \sum_{s'_1=0}^m e^{i(4^{s'_1} x_1 + 4^{m-s'_1} x_2)}$$

с соответствующей постоянной $C_2 > 0$ принадлежит классу $B_{\infty,\theta}^r$.

Далее, пусть $t^*(x) \in T(Q_{2m-1}^1)$ – полином наилучшего приближения функции $g_4(x)$. Тогда, с одной стороны, принимая во внимание, что

$$(g_4 - t^*) * 4(P_m - 1) = g_4,$$

можем записать

$$\|g_4\|_1 \leq 4\|P_m - 1\|_1 \|g_4 - t^*\|_1 \leq 8E_{Q_{2m-1}^1}(g_4)_1. \quad (5)$$

С другой стороны, для $g_4(x)$ справедливы соотношения

$$m^{-1/\theta} 2^{-2r_1 m} (m+1)^{1/2} \asymp \|g_4\|_2 \leq \|g_4\|_1^{1/3} \|g_4\|_4^{2/3}. \quad (6)$$

Далее, в силу теоремы Литтлвуда–Пэли для $f \in L_q(\pi_2)$, $1 < q < \infty$, имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_q &\leq C(q) \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f, x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_q = C(q) \left\| \sum_s |\delta_s(f, x)|^2 \right\|_{q/2}^{1/2} \\ &\leq C(q) \left(\sum_s \|\delta_s(f, x)\|_{q/2}^2 \right)^{1/2} = C(q) \left(\sum_s \|\delta_s(f, x)\|_q^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

и поэтому для $\|g_4\|_4$ приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned} \|g_4\|_4 &\ll m^{-1/\theta} 2^{-2r_1 m} \left(\sum_s \|\delta_s(e^{i(4^{s'_1} x_1 + 4^{m-s'_1} x_2)})\|_4^2 \right)^{1/2} \\ &= m^{-1/\theta} 2^{-2r_1 m} \left(\sum_{s \in S(m)} 1 \right)^{1/2} \asymp m^{-1/\theta} 2^{-2r_1 m} m^{1/2} = 2^{-2r_1 m} m^{1/2-1/\theta}. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, сопоставив (6) и (7), будем иметь

$$\|g_4\|_1^{1/3} \gg m^{-1/\theta} 2^{-2r_1 m} m^{1/2} \|g_4\|_4^{-2/3} \gg 2^{-2r_1 m} m^{1/2-1/\theta} (2^{-2r_1 m} m^{1/2-1/\theta})^{-2/3}.$$

Отсюда после элементарных преобразований находим

$$\|g_4\|_1 \gg 2^{-2r_1 m} m^{1/2-1/\theta}. \quad (8)$$

Сопоставив (5) и (8) и приняв во внимание, что $n = 2m$, приходим к искомой оценке

$$E_{Q_{n-1}^1}(g_4)_1 \gg 2^{-nr_1} n^{1/2-1/\theta}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Порядки величин $E_{Q_n^1}(H_p^r)_1$, $2 < p \leq \infty$, в двумерном случае и $E_{Q_n^1}(W_{p,\alpha}^r)_1$, $2 < p \leq \infty$, для всех размерностей $d \geq 2$, установлены Темляковым (см., например, [9; с. 165–166]).

В следующем утверждении получим точную по порядку оценку $E_{Q_n^\gamma}(B_{p,1}^r)_\infty$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $r_1 > 1/p$. Тогда имеет место соотношение

$$E_{Q_n^\gamma}(B_{p,1}^r)_\infty \asymp 2^{-n(r_1-1/p)}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим в (9) сначала оценку сверху. Рассмотрим для $f \in B_{p,1}^r$ приближающий полином вида

$$t_n(f, x) = \sum_{(s,\gamma) \leq n} A_s(f, x).$$

Тогда при $1 \leq p < \infty$ в силу неравенств Минковского и разных метрик Никольского будем иметь

$$\|f(x) - t_n(f, x)\|_\infty = \left\| \sum_{(s,\gamma) > n} A_s(f, x) \right\|_\infty \leq \sum_{(s,\gamma) > n} \|A_s(f, x)\|_\infty$$

$$\begin{aligned}
&\ll \sum_{(s,\gamma)>n} 2^{(s,1)1/p} \|A_s(f,x)\|_p \leq \sum_{(s,\gamma)>n} 2^{(s,\gamma)/p} \|A_s(f,x)\|_p \\
&= \sum_{(s,\gamma)>n} 2^{(s,r)} \|A_s(f,x)\|_p 2^{-(s,\gamma)(r_1-1/p)} \\
&\leq 2^{-n(r_1-1/p)} \sum_{(s,\gamma)>n} 2^{(s,r)} \|A_s(f,x)\|_p \\
&\leq 2^{-n(r_1-1/p)} \|f\|_{B_{p,1}^r} \leq 2^{-n(r_1-1/p)}.
\end{aligned}$$

Аналогично для $f \in B_{p,1}^r$ в случае $p = \infty$ находим

$$\|f(x) - t_n(f,x)\|_\infty \ll 2^{-nr_1}.$$

Оценка сверху в теореме доказана.

Переходя к доказательству в (9) оценки снизу, заметим, что при этом достаточно рассмотреть случай $d = 1$.

Пусть $T(2^n)$ обозначает множество полиномов вида

$$t(x) = \sum_{k=-2^n}^{2^n} c_k e^{ikx}$$

и

$$E_{2^n}(f)_q = \inf_{t \in T(2^n)} \|f(x) - t(x)\|_q$$

– наилучшее приближение функции $f \in L_q[-\pi, \pi]$ тригонометрическими полиномами из $T(2^n)$. Для функционального класса $F \subset L_q[-\pi, \pi]$ полагаем

$$E_{2^n}(F)_q = \sup_{f \in F} E_{2^n}(f)_q.$$

Итак, рассмотрим функцию

$$v(x) = V_{2^{n+1}}(x) - V_{2^n}(x),$$

где $V_{2^{n+1}}(x)$ и $V_{2^n}(x)$ – ядра Валле-Пуссена соответствующих порядков.

Поскольку

$$\|v\|_p \asymp 2^{n(1-1/p)}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (10)$$

легко убедиться, что функция

$$g_5(x) = C_3 2^{-n(r_1+1-1/p)} v(x)$$

с соответствующей постоянной $C_3 > 0$, принадлежит классу $B_{p,1}^{r_1}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Далее, пусть

$$t_n^*(x) = \sum_{k=-2^n}^{2^n} c_k^* e^{ikx}$$

– полином наилучшего приближения функции $g_5(x)$ в метрике пространства L_∞ . Тогда, с одной стороны, в силу ортогональности $t_n^*(x)$ и $v(x)$ можем записать

$$((g_5 - t_n^*), v) = (g_5, v) \asymp 2^{-n(r_1+1-1/p)} \|v\|_2^2 \asymp 2^{-n(r_1-1/p)}. \quad (11)$$

С другой стороны, в силу неравенства Гёльдера и вследствие оценки (10) будем иметь

$$((g_5 - t_n^*), v) \leq \|g_3 - t_n^*\|_\infty \|v\|_1 \ll \|g_5 - t_n^*\|_\infty = E_{2^n}(g_5)_\infty. \quad (12)$$

Сопоставив (11) и (12), приходим к оценке

$$E_{2^n}(g_5)_\infty \gg 2^{-n(r_1 - 1/p)}.$$

Оценка снизу и вместе с ней теорема доказаны.

Прокомментируем полученный результат.

Пусть $r = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p < \infty$, и $\mathcal{L}_{Q_n^r}$ — последовательность линейных ограниченных операторов, определенных на $L_p^0(\pi_d)$ и сопоставляющих каждой функции $f \in L_p^0(\pi_d)$ тригонометрический полином $\mathcal{L}_{Q_n^r}(f, x) \in T(Q_n^\gamma)$. Пусть $1 < \theta < \infty$ и $d \geq 2$. Тогда имеют место соотношения

$$E_{Q_n^\gamma}(B_{p,\theta}^r)_\infty = o\left(\sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \|f(x) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f, x)\|_\infty\right), \quad (13)$$

$$2 < p < \infty, r_1 > 1/p,$$

$$E_{Q_n^\gamma}(B_{p,\theta}^r)_\infty = o\left(\sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \|f(x) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f, x)\|_\infty\right), \quad (14)$$

$$1 \leq p \leq 2, r_1 > 1/p.$$

Соотношения (13) и (14) установлены в [2] и [3] соответственно.

Ранее Темляковым (см., например, [7; теоремы 5.5, 5.6]) была доказана справедливость соотношений

$$E_{Q_n^\gamma}(W_{p,\alpha}^r)_\infty = o\left(\sup_{f \in W_{p,\alpha}^r} \|f(x) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f, x)\|_\infty\right), \quad 1 < p < \infty, \quad r_1 > \frac{1}{p}, \quad (15)$$

$$E_{Q_n^\gamma}(H_p^r)_\infty = o\left(\sup_{f \in H_p^r} \|f(x) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f, x)\|_\infty\right), \quad 1 \leq p < \infty, \quad r_1 > \frac{1}{p}. \quad (16)$$

Таким образом, соотношения (13)–(16) свидетельствуют о том, что приближения классов функций $B_{p,\theta}^r$, $W_{p,\alpha}^r$ и H_p^r линейными методами при соответствующих значениях параметров, их определяющих, не реализуют порядков наилучших приближений этих классов функций.

С другой стороны, как следует из доказательства теоремы 3, существует линейный метод, для которого

$$E_{Q_n^\gamma}(B_{p,1}^r)_\infty \asymp \sup_{f \in B_{p,1}^r} \|f(x) - \mathcal{L}_{Q_n^r}(f, x)\|_\infty,$$

$$1 \leq p \leq \infty, r_1 > 1/p.$$

3. Приближение классов $B_{1,\theta}^{r_1}$ частными суммами Фурье в пространстве L_1 . В работе [3; следствие 3.1] получена точная по порядку оценка уклонения ступенчатых гиперболических сумм Фурье

$$S_n^{\gamma'}(f, x) = \sum_{(s, \gamma') < n} \delta_s(f, x)$$

от функций $f(x)$ из классов $B_{p,\theta}^r$, $1 < p \leq \infty$, в метрике L_1 . Иными словами, при $r_1 > 0$, $1 \leq \theta < \infty$ и $1 < p \leq \infty$

$$\sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \|f(x) - S_n^{\gamma'}(f, x)\|_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/p^*-1/\theta)_+},$$

где $p^* = \min\{2, p\}$.

К настоящему времени вопрос о порядке величины $\sup_{f \in B_{1,\theta}^r} \|f(x) - S_n^{\gamma'}(f, x)\|_1$ в многомерном случае ($d \geq 2$), по-видимому, открыт.

В следующем утверждении в одномерном случае получим порядок приближения функций из классов $B_{1,\theta}^{r_1}$ их частными суммами Фурье в пространстве L_1 .

Пусть $f \in L_1[-\pi; \pi]$ и $S_N(f, x) = \sum_{k=-N}^N \hat{f}(k) e^{ikx}$ — частная сумма Фурье функции $f(x)$ порядка N .

Имеет место

ТЕОРЕМА 4. Пусть $d = 1$ и $r_1 > 0$. Тогда при $1 \leq \theta < \infty$

$$\sup_{f \in B_{1,\theta}^{r_1}} \|f(x) - S_N(f, x)\|_1 \asymp N^{-r_1} \log N. \quad (17)$$

Прежде чем перейти к доказательству отметим, что порядки этой величины, когда вместо классов $B_{1,\theta}^{r_1}$ рассматриваются классы $W_{1,\alpha}^{r_1}$ либо $H_1^{r_1}$, известны (см., например, [9; теорема 3.8]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $B_{1,\theta}^{r_1} \subset H_1^{r_1}$, $1 \leq \theta < \infty$, оценка сверху в (17) следует из теоремы 3.8 [9], в которой доказано соотношение

$$\sup_{f \in H_1^{r_1}} \|f(x) - S_N(f, x)\|_1 \asymp N^{-r_1} \log N.$$

Соответствующую оценку снизу в (17) достаточно получить при $\theta = 1$, поскольку $B_{1,1}^{r_1} \subset B_{1,\theta}^{r_1}$, $1 < \theta \leq \infty$.

Кроме того, как будет видно из последующих рассуждений, нам будет удобно считать, что $N = 3 \cdot 2^m$, $m = 1, 2, \dots$, т.е. $m \asymp \log N$.

Пусть $\mathcal{K}_l(x)$ обозначает ядро Фейера порядка l :

$$\mathcal{K}_l(x) = \sum_{|k| \leq l} \left(1 - \frac{|k|}{l}\right) e^{ikx}.$$

Рассмотрим функцию

$$g_6(x) = C_4 2^{-mr_1} e^{i(2^m + 2^{m+1})x} \mathcal{K}_{2^m}(x), \quad C_4 > 0,$$

и покажем, что при надлежащем выборе постоянной $C_4 > 0$ эта функция принадлежит классу $B_{1,1}^{r_1}$.

Обозначим

$$\psi(x) = e^{i(2^m + 2^{m+1})x} \mathcal{K}_{2^m}(x),$$

и заметим, что спектр полинома $\psi(x)$ принадлежит отрезку $[2^{m+1}, 2^{m+2}]$. Следовательно, в силу легко проверяемого соотношения

$$A_s(\psi, x) = A_s(x) * (\delta_s(\psi, x) + \delta_{s+1}(\psi, x)) \quad (18)$$

делаем вывод, что за исключением $A_{m+1}(\psi, x)$ и $A_{m+2}(\psi, x)$ для всех остальных $A_s(\psi, x)$ выполнено равенство $A_s(\psi, x) = 0$.

Таким образом, согласно (18) справедливы соотношения

$$A_{m+1}(\psi, x) = A_{m+1}(x) * \delta_{m+2}(\psi, x), \quad A_{m+2}(\psi, x) = A_{m+2}(x) * \delta_{m+2}(\psi, x).$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\|A_{m+1}(x)\|_1 \leq 6$ и $\|\mathcal{K}_{2^m}(x)\|_1 = 1$, находим

$$\begin{aligned} \|A_{m+1}(\psi, x)\|_1 &\leq \|A_{m+1}(x)\|_1 \|\delta_{m+2}(\psi, x)\|_1 \leq 6 \|\delta_{m+2}(\psi, x)\|_1 \\ &= 6 \|e^{i(2^m+2^{m+1})x} \mathcal{K}_{2^m}(x)\|_1 = 6 \|\mathcal{K}_{2^m}(x)\|_1 = 6. \end{aligned} \quad (19)$$

Аналогично для $A_{m+2}(\psi, x)$ имеем

$$\|A_{m+2}(\psi, x)\|_1 \leq 6. \quad (20)$$

Следовательно, в силу (19) и (20)

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{B_{1,1}^{r_1}} &= \sum_s 2^{sr_1} \|A_s(\psi, x)\|_1 = 2^{(m+1)r_1} \|A_{m+1}(\psi, x)\|_1 + 2^{(m+2)r_1} \|A_{m+2}(\psi, x)\|_1 \\ &\leq 6 \cdot 2^{mr_1} (2^{r_1} + 2^{2r_1}) = C(r_1) 2^{mr_1}. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что функция $g_6(x)$ при

$$C_4 = C^{-1}(r_1) = \frac{1}{6} (2^{r_1} + 2^{2r_1})^{-1}$$

принадлежит классу $B_{1,1}^{r_1}$.

Итак, по заданному m подберем N из равенства $N = 3 \cdot 2^m$ и рассмотрим приближение функции $\psi(x)$ ее суммой Фурье $S_N(\psi, x)$.

С помощью элементарных преобразований легко убедиться, что

$$\psi(x) - S_N(\psi, x) = \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) e^{i(k+2^m+2^{m+1})x},$$

и, следовательно, будем иметь

$$\begin{aligned} \|\psi(x) - S_N(\psi, x)\|_1 &= \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) e^{ikx} \right\|_1 \\ &= \left\| i \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \cos kx - \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin kx \right\|_1 \\ &\geq \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin kx \right\|_1 - \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=-2^m}^{2^m} \left(1 - \frac{|k|}{2^m}\right) e^{ikx} \right\|_1 + \frac{1}{2} \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin kx \right\|_1 - \frac{1}{2} \|\mathcal{K}_{2^m}(x)\|_1 + \frac{1}{2} \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin kx \right\|_1. \end{aligned} \quad (21)$$

Для продолжения оценки (21) обозначим

$$F(x) = \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin kx$$

и рассмотрим функцию

$$g_7(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Хорошо известно, что $g_7(x) = (\pi - x)/2$, $x \in (0; 2\pi)$.

Пусть $\mathcal{J} = (F, g_7)$. Тогда, с одной стороны,

$$\mathcal{J} = \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^m-1} \frac{1}{k}. \quad (22)$$

С другой стороны, в силу неравенства Гёльдера можем записать

$$\mathcal{J} \leq \|F\|_1 \|g_7\|_{\infty} = \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin kx \right\|_1 \left\| \frac{\pi - x}{2} \right\|_{\infty} \ll \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin kx \right\|_1. \quad (23)$$

Сопоставив (22) и (23), приходим к оценке

$$\left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin kx \right\|_1 \gg \sum_{k=1}^{2^m-1} \frac{1}{k} > \ln 2^m \gg m \asymp \log N. \quad (24)$$

Таким образом, согласно (21) и (24) можем записать

$$\|\psi(x) - S_N(\psi, x)\|_1 \gg \log N. \quad (25)$$

Наконец, принимая во внимание определение функции $g_6(x)$, в силу (25) находим

$$\|g_6(x) - S_N(g_6, x)\|_1 \gg N^{-r_1} \log N.$$

Теорема доказана.

В завершение работы приведем соотношение между результатом, полученным в теореме 4, и оценкой величины, которая исследовалась Темляковым на классах Бесова $\mathfrak{B}_{p,\theta}^r$ в [10]. Предварительно отметим, что в одномерном случае эти классы совпадают с классами $B_{p,\theta}^{r_1}$, рассматриваемыми в настоящей работе.

Пусть $f \in L_1[-\pi; \pi]$ и $\{\widehat{f}(k(l))\}_{l=1}^{\infty}$ – коэффициенты Фурье $\{\widehat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ функции $f(x)$, упорядоченные в порядке невозрастания их модулей, т.е.

$$|\widehat{f}(k(1))| \geq |\widehat{f}(k(2))| \geq \dots$$

Обозначим для $f \in L_1[-\pi; \pi]$

$$G_N(f, x) = \sum_{l=1}^N \widehat{f}(k(l)) e^{ik(l)x},$$

и если $F \subset L_1[-\pi; \pi]$ – некоторый класс функций, то положим

$$G_N(F)_1 = \sup_{f \in F} \|f(x) - G_N(f, x)\|_1.$$

В [10], в частности, для одномерного случая получен следующий результат:

$$G_N(B_{1,\theta}^{r_1})_1 \asymp N^{-r_1+1/2}, \quad 1 \leq \theta \leq \infty, \quad r_1 > \frac{1}{2}. \quad (26)$$

Таким образом, сопоставив (17) и (26), находим, что при $r_1 > 1/2$ и $1 \leq \theta < \infty$ имеет место соотношение

$$\sup_{f \in B_{1,\theta}^{r_1}} \|f(x) - S_N(f, x)\|_1 \asymp G_N(B_{1,\theta}^{r_1})_1 N^{-1/2} \log N.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. С. Романюк, “Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q ”, *Укр. матем. журн.*, **43**:10 (1991), 1398–1408.
- [2] А. С. Романюк, “Приближение классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения”, *Матем. сб.*, **195**:2 (2004), 91–116.
- [3] А. С. Романюк, “Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных”, *Матем. сб.*, **199**:2 (2008), 93–114.
- [4] О. В. Бесов, “О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения”, *Докл. АН СССР*, **126**:6 (1959), 1163–1165.
- [5] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969.
- [6] П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, “Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 13*, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **187**, Наука, М., 1989, 143–161.
- [7] В. Н. Темляков, “Приближение функций с ограниченной смешанной производной”, Тр. МИАН СССР, **178**, 1986, 3–113.
- [8] С. М. Никольский, “Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных”, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его 60-летию, Тр. МИАН СССР, **38**, Изд-во АН СССР, М., 1951, 244–278.
- [9] V. N. Temlyakov, *Approximation of Periodic Functions*, Comput. Math. Anal. Ser., Nova Science Publ., Commack, NY, 1993.
- [10] V. N. Temlyakov, “Greedy algorithm and m -term trigonometric approximation”, *Constr. Approx.*, **14**:4 (1998), 569–587.

А. С. Романюк

Институт математики НАН Украины

E-mail: funct@imath.kiev.ua

Поступило

29.01.2008