Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Поляков, Оценки ядра Дирихле и расходящиеся ряды Фурье по системе Уолша–Качмажа, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 2, 257–270

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4509>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 15:38:25

Оценки ядра Дирихле и расходящиеся ряды Фурье по системе Уолша–Качмажа

И. В. Поляков

В данной работе получена новая оценка снизу роста ядер Дирихле для системы Уолша–Качмажа и построен пример расходящегося почти всюду ряда Фурье по этой системе из класса более узкого по сравнению с рассмотренным ранее.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm4509

В 1923 г. Уолш построил ортонормированную систему функций, получившую название системы Уолша. Эта система обычно рассматривается в нумерациях Пэли, Качмажа и Уолша. Наиболее известна первая из них. Шипп рассматривал некоторые классы перестановок, с помощью которых из нумерации Пэли можно получить нумерации Качмажа и Уолша [1]. Настоящая работа посвящена системе Уолша в нумерации Качмажа. В ней получена новая оценка снизу роста ядер Дирихле по этой системе и некоторые следствия из нее.

Система Уолша в нумерации Качмажа изучалась многими авторами. В работе [2] показано, что для всякой функции из класса $L(\ln^+ L)^2[0, 1]$ ее ряды Фурье–Уолша–Качмажа сходятся к ней почти всюду. Для тригонометрической системы и системы Уолша–Пэли аналогичный результат для класса $L \ln^+ L \ln^+ \ln^+ L[0, 1]$ получен Антоновым в [3] и [4], а также независимо Съелином и Сория для системы Уолша–Пэли в [5]. С другой стороны, в работе [6] показано, что свойства ядер Дирихле в нумерации Качмажа существенно отличаются от свойств ядер Дирихле в нумерации Пэли, для которых верна оценка (см. [7; § 1.4, оценка (1.4.16)]): $|D_n(x)| < 1/x$ при всех x отличных от нуля. Для ядер же Дирихле–Качмажа найдется константа $C > 0$ такая, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|D_n^X(x)|}{\ln n} > C \quad \text{для почти всех } x \in [0, 1]. \quad (1)$$

Логарифм здесь и далее понимается двоичным. В работе Балашова [8] данная оценка использована для получения следующих утверждений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00321) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3252.2010.1).

ТЕОРЕМА 1. Для любой последовательности $w(n)$, монотонно убывающей к нулю, существует функция $f \in L[0, 1]$ такая, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n(x, f)|}{w(n) \ln(n)} = \infty \quad \text{для почти всех } x \in [0, 1].$$

ТЕОРЕМА 2. Для всякого $\epsilon \in (0, 1)$ найдется f из класса $L(\ln^+ L)^{1-\epsilon}[0, 1]$, ряд Фурье–Уолша–Качмажа которой имеет монотонные коэффициенты и расходится почти всюду в $[0, 1]$.

Отметим, что для системы Уолша–Пэли всякий ряд с монотонными коэффициентами, которые стремятся к нулю, сходится всюду, за исключением, быть может, нуля. Данная теорема показывает, что для нумерации Качмажа это свойство не выполняется.

Автором получено следующее обобщение оценки (1).

ЛЕММА 1. Для всякой положительной и возрастающей последовательности $\{\lambda_n\}$ такой, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} = \infty,$$

выполнено

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|D_n^X(x)|}{\lambda_n} = \infty \quad \text{для почти всех } x \in [0, 1].$$

С использованием данного утверждения по методу Балашова получены следующие результаты.

ТЕОРЕМА 3. Для всякой $F(u) = uf(u)$, где $f(u)$ – неубывающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, $f(0) = 1$ и $f(u)$ удовлетворяет условию

$$f(u) = o(\ln u) \quad \text{при } u \rightarrow \infty,$$

существует такая функция $g \in F(L)$, ряд Фурье–Уолша–Качмажа которой расходится почти всюду на $[0, 1]$.

ТЕОРЕМА 4. Для всякой положительной и возрастающей последовательности $\{\lambda_n\}$ такой, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} = \infty,$$

найдется f из $L(G)$ такая, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{S_n(x, f)}{\lambda_n} \right| = \infty \quad \text{для почти всех } x \in [0, 1].$$

Отметим, что для системы Уолша–Пэли наиболее сильный пример расходящегося всюду ряда Фурье принадлежит Бочкареву [9]:

ТЕОРЕМА 5. Для всякой $F(u) = uf(u)$, где $f(u)$ – неубывающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, $f(0) = 1$ и $f(u)$ удовлетворяет условию

$$f(u) = o(\sqrt{\ln u}) \quad \text{при } u \rightarrow \infty,$$

существует такая функция $g \in F(L)$, ряд Фурье–Уолша–Пэли которой расходится всюду на $[0, 1]$.

Для тригонометрической системы аналогичный результат был построен Конягиным в [10].

Мы будем использовать следующие определения и обозначения: $[x]$ – верхняя целая часть числа x , т.е. $[x] - 1 < x \leq [x]$; $|E|$ означает меру Лебега множества E .

Пусть $G = Z_2 \times Z_2 \times \dots$ – группа Уолша. Каждый элемент группы представим в виде бесконечной последовательности 0 и 1, $x = (x_0, x_1, \dots)$. Групповой операцией является покомпонентное сложение последовательностей по модулю 2. В [11] на группе G определяется так называемая мера Хаара, обозначаемая μ . Существует каноническое отображение G на отрезок $[0, 1]$, биективное с точностью до счетного множества. Оно определяется по формуле

$$\lambda(x) = \frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2^2} + \dots + \frac{x_i}{2^{i+1}} + \dots.$$

Благодаря этому отображению систему Уолша можно рассматривать как на группе, так и на отрезке $[0, 1]$. При этом мера Лебега, перенесенная с отрезка на группу данным отображением, совпадает с мерой Хаара. Поэтому везде далее будем считать, что на группе задана мера Лебега, и все интегралы будем понимать относительно данной меры. Пусть $x \in G$, тогда положим

$$\Delta_x^k = \{y \in G : y_i = x_i, 0 \leq i \leq k-1\}, \quad \Delta_x^0 = G,$$

где элемент $x = (x_0, x_1, \dots)$ фиксирован. Заметим, что Δ_x^n является подгруппой группы G , а множества Δ_x^n являются смежными классами группы G по этой подгруппе. Мы будем называть их *двоичными отрезками ранга n* . Образ любого множества Δ_x^n при отображении λ – это отрезок вида $[k/2^n, (k+1)/2^n]$, где $k \in [0, 2^n - 1]$.

Функции Радемахера определяются следующим образом:

$$r_n(x) = (-1)^{x_n}.$$

Всякое натуральное n представимо в виде

$$n = n_0 + n_1 2 + n_2 2^2 + \dots + n_{|n|} 2^{|n|}.$$

Отметим, что $n_{|n|}$ всегда равно 1. Функции Уолша в нумерации Пэли могут быть определены следующим образом:

$$\psi_n(x) = r_0(x)^{n_0} r_1(x)^{n_1} \dots r_{|n|}(x)^{n_{|n|}}.$$

Система этих функций является ортонормированной. Определим функции Уолша в нумерации Качмажа:

$$\chi_n(x) = r_{|n|}(x) r_{|n|-1}(x)^{n_0} \dots r_0(x)^{n_{|n|-1}}.$$

Определим отображения $\tau_m(x): G \rightarrow G$, $m > 0$, по формуле

$$\tau_m(x) = (x_{m-1}, x_{m-2}, \dots, x_0, x_m, x_{m+1}, \dots).$$

Система Уолша–Качмажа может быть получена из системы Уолша–Пэли с помощью данного семейства отображений:

$$\chi_n(x) = r_{|n|}(x) \psi_{n-2^{|n|}}(\tau_{|n|}(x)).$$

Ядро Дирихле системы функций $\{\alpha_n\}$ определяется по формуле

$$D_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(x), \quad D_0^\alpha(x) = 0.$$

Напомним свойство, верное для системы Уолша как в нумерации Пэли, так и в нумерации Качмажа:

$$\alpha(x+y) = \alpha(x)\alpha(y).$$

Коэффициенты Фурье и частные суммы ряда Фурье определяются по формулам

$$f^\alpha(n) = \int_G f(x) \alpha_n(x) d\mu(x),$$

$$S_n^\alpha f(y) = \sum_{k=0}^{n-1} f^\alpha(k) \alpha_k(y) = \int_G f(x) D_n^\alpha(x+y) d\mu(x).$$

Перейдем к доказательству леммы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. В силу того, что для любой последовательности $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющей условиям леммы, можно найти последовательность $\{\mu_n\}$, также удовлетворяющую условиям леммы, такую, что

$$\lambda_n = o(\mu_n),$$

достаточно доказать лишь

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|D_n^\chi(x)|}{\lambda_n} \geq \frac{1}{2} \quad \text{почти всюду.} \quad (2)$$

Пусть

$$E_n^k = \{x \in G : x_i = 0, \ n - k \leq i \leq n - 1\}. \quad (3)$$

В работе Шнейдера [6] было показано, что для множеств

$$Q_n^k = \bigcup_{i=k}^n E_i^k \setminus \bigcup_{i=k}^{n-1} E_i^k = E_n^k \setminus \bigcup_{i=k}^{n-1} E_i^k$$

при $n > 2k$ имеет место оценка

$$|Q_n^k| \geq \frac{2^{k+1} + 2k - 1 - n}{2^{2k+2}}.$$

Ясно, что если рассмотреть множества

$$Q_{n,m}^k = \bigcup_{i=m}^n E_i^k \setminus \bigcup_{i=m}^{n-1} E_i^k = E_n^k \setminus \bigcup_{i=m}^{n-1} E_i^k$$

при $m \geq k$, $n > m + k$, то

$$|Q_{n,m}^k| = |Q_{n-m+k}^k| \geq \frac{2^{k+1} + 2k - 1 - n + m - k}{2^{2k+2}},$$

поскольку одно множество может быть получено из другого с помощью изометрического отображения

$$(x_0, x_1, \dots) \rightarrow (y_0, y_1, \dots),$$

где

$$\begin{cases} y_i = x_{i+m-k}, & 0 \leq i < n-m+k, \\ y_i = x_{n-i}, & n-m+k < i \leq n, \\ y_i = x_i, & i > n. \end{cases}$$

Пусть

$$C_k^\alpha(x) = \sup_{2^k \leq n < 2^{k+1}} |D_n^\alpha(x)|.$$

Нам понадобятся следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть

$$g_k = \lceil \ln \lambda_{2^{k+1}} \rceil, \quad k > k_0(\lambda). \quad (4)$$

Тогда при $x \in \Delta_0^{g_k}$ выполнено

$$C_k^\psi(x) \geq \lambda_{2^{k+1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $D_{2^k+2^{g_k}}^\psi(x)$. Имеем

$$D_{2^k+2^{g_k}}^\psi(x) = D_{2^k}^\psi(x) + \psi_{2^k}(x) D_{2^{g_k}}^\psi(x).$$

При $x \in \Delta_0^k$ и $k > k_0(\lambda)$

$$|D_{2^k+2^{g_k}}^\psi(x)| \geq 2^k - 2^{g_k} \geq 2^k - 2\lambda_{2^{k+1}} \geq \lambda_{2^{k+1}},$$

поскольку $\lambda_{2^k} < C(\lambda)k^2$. При $x \in \Delta_0^{g_k} \setminus \Delta_0^k$

$$|D_{2^k+2^{g_k}}^\psi(x)| = |D_{g_k}^\psi(x)| = 2^{g_k} \geq \lambda_{2^{k+1}}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\{\lambda_k\}$ – положительная возрастающая последовательность такая, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\lambda_k}$$

расходится. Тогда для всякой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{a_l\}$, $a_l < C^l$ для некоторого $C > 1$, расходится ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{a_l}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу монотонности λ_k по k

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{a_l}} \geq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\lceil C^l \rceil}}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \infty &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\lambda_k} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{C^l < k \leq C^{l+1}} \frac{1}{k\lambda_k} \leq \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{C^l < k \leq C^{l+1}} \frac{1}{k\lambda_{\lceil C^l \rceil}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\lceil C^l \rceil}} \sum_{C^l < k \leq C^{l+1}} \frac{1}{k} \\ &\leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\lceil C^l \rceil}} \int_{C^{l-1}}^{C^{l+1}+1} \frac{1}{x} dx \leq (\ln C + 2) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\lceil C^l \rceil}}. \end{aligned}$$

Откуда следует расходимость ряда $\sum_{l=0}^{\infty} (1/(\lambda_{\lceil C^l \rceil}))$, а значит, и ряда $\sum_{l=1}^{\infty} (1/(\lambda_{a_l}))$.

Продолжим доказательство леммы 1. Из определения системы Качмажа получаем

$$\begin{aligned} D_{2^n+i}^X(x) &= D_{2^n}^X(x) + r_n(x)D_i^\psi(\tau_n(x)) = D_{2^n}^\psi(x) + r_n(\tau_n(x))D_i^\psi(\tau_n(x)) \\ &= D_{2^n}^\psi(\tau_n(x)) + r_n(\tau_n(x))D_i^\psi(\tau_n(x)) = D_{2^n+i}^\psi(\tau_n(x)). \end{aligned}$$

Отметим также, что $E_k^{g_k} = \tau_k(\Delta_0^{g_k})$, откуда по утверждению 1 получаем

$$C_k^X(x) \geq \lambda_{2^{k+1}} \quad \text{при } x \in E_k^{g_k}.$$

Для завершения доказательства леммы 1 достаточно проверить, что G совпадает $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k^{g_k}$ с точностью до множества меры нуль. Действительно, тогда для почти всех $x \in G$ верно, что x принадлежит бесконечному числу множеств $E_k^{g_k}$. Значит, существует возрастающая последовательность k_i такая, что $x \in E_{k_i}^{g_{k_i}}$. Следовательно, верно

$$C_{k_i}^X(x) \geq \lambda_{2^{k_i+1}},$$

откуда следует (2). Итак, используя технику Шнейдера, покажем совпадение G с $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k^{g_k}$ с точностью до множества меры нуль. Рассмотрим $B_l = \{k \in N : g_k = l\}$. Ясно, что $\bigcup_{l=1}^{\infty} B_l$ покрывает N , за исключением, быть может какого-то количества начальных элементов (в зависимости от λ). В силу нестрогой монотонности g_k по k , каждое непустое B_l имеет вид $N \cap [k_{\min}(l), k_{\max}(l)]$. Отметим, что из монотонности λ_k и расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (1/(k\lambda_k))$ следует, что

$$\lambda_k \leq M(\ln k)^2 \quad (5)$$

для некоторой константы $M(\lambda)$.

Если $|B_l| \leq 2l + 2$, положим $E_l = \emptyset$. В противном случае, пусть

$$E_l = \bigcup_{n=k_{\min}(l)+1}^{k_{\max}(l)} E_n^l = E_{k_{\min}(l)+l}^l + \bigcup_{n=k_{\min}(l)+l+1}^{k_{\max}(l)} Q_{n, k_{\min}(l)+l}^l.$$

Отметим что при $l_1 < l_2$ множества E_{l_1} и E_{l_2} независимы в вероятностном смысле. Поэтому достаточно показать, что выполнено $\sum_{l \in \mathbb{N}} |E_l| = \infty$. Оценим $|E_l|$ в случае, если $k_{\max}(l) - k_{\min}(l) \leq 2^l$. Имеем

$$|E_l| \geq \left| \bigcup_{n=k_{\min}(l)+2l+1}^{k_{\max}(l)} Q_{n, k_{\min}(l)+l}^l \right| \geq \sum_{n=k_{\min}(l)+2l+1}^{k_{\max}(l)} \frac{2^{l+1} + 2l - 1 - n + k_{\min}(l)}{2^{2l+2}}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{n=k_{\min}(l)+2l+1}^{k_{\max}(l)} \frac{2^{l+1} + 2l - 1 - k_{\max}(l) + k_{\min}(l)}{2^{2l+2}} \\
&\geq \sum_{n=k_{\min}(l)+2l+1}^{k_{\max}(l)} \frac{2^l}{2^{2l+2}} \geq (|B_l| - 2l - 2)2^{-l-2}.
\end{aligned}$$

Если же $k_{\max}(l) - k_{\min}(l) > 2^l$, получаем

$$|E_l| \geq \sum_{n=k_{\min}(l)+2l+1}^{k_{\max}(l)} \frac{2^{l+1} + 2l - 1 - n + k_{\min}(l)}{2^{2l+2}} \geq \sum_{i=2l+1}^{2^l} \frac{2^{l+1} - i}{2^{2l+2}} \geq \frac{1}{32}.$$

Для B_l таких, что $|B_l| \leq 2l + 2$, также справедлива оценка

$$|E_l| \geq (|B_l| - 2l - 2)2^{-l-2}. \quad (6)$$

Для всех $k \in B_l$ в силу (4) верно $l - 1 < \ln \lambda_{2^{k+1}} \leq l$, т.е.

$$2^{l-1} < \lambda_{2^{k+1}} \leq 2^l. \quad (7)$$

Покажем, что ряд $\sum_{l \in \mathbb{N}} |E_l|$ расходится. Поскольку для каждого E_l справедливо

$$|E_l| > \frac{1}{32}, \quad \text{либо} \quad |E_l| \geq (|B_l| - 2l - 1)2^{-l-2},$$

то возможно 2 случая. Если $|E_l| > 1/32$ справедливо бесконечное число раз, то очевидно $\sum_{l \in \mathbb{N}} |E_l| = \infty$. В противном случае начиная с некоторого l_0 справедливо $|E_l| \geq (|B_l| - 2l - 1)2^{-l-2}$. В силу утверждения 2 расходится ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_{2^{k+1}}}.$$

Значит,

$$\sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{k \in B_l} \frac{1}{\lambda_{2^{k+1}}} = \infty,$$

откуда в силу (7)

$$\sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{k \in B_l} \frac{1}{2^{l-1}} = \infty.$$

Следовательно, расходится ряд

$$\sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{|B_l|}{2^{l-1}},$$

откуда в силу (6) получаем расходимость

$$\sum_{l=l_0}^{\infty} |E_l| \geq \sum_{l=l_0}^{\infty} \frac{|B_l| - 2l - 2}{2^{l+2}}.$$

Тем самым, утверждение леммы полностью доказано.

Перейдем к доказательству теорем 3 и 4. Докажем вспомогательное

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $\{\lambda_k\}$ – положительная возрастающая последовательность такая, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1/(\lambda_{2^k}))$ расходится. Тогда расходится и ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i\lambda_i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценивая

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i\lambda_i} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{i\lambda_i} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{2^k \lambda_{2^k}} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2^k}} = \infty,$$

получаем требуемое утверждение.

Учитывая этот факт, лемму 1 можно переформулировать следующим образом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для всякой положительной и возрастающей последовательности $\{\lambda_n\}$ такой, что $\sum_{n=1}^{\infty} (1/\lambda_n) = \infty$, выполнено

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{2^{n-1} \leq i < 2^n} \frac{|D_i^X(x) - D_{2^{n-1}}^X(x)|}{\lambda_n} = \infty \quad \text{для почти всех } x \in [0, 1].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для всякого x , отличного от 0, начиная с некоторого n верно $D_{2^n}^X(x) = 0$, получаем, что для $x \neq 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{2^{n-1} \leq i < 2^n} \frac{|D_i^X(x) - D_{2^{n-1}}^X(x)|}{\lambda_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{2^{n-1} \leq i < 2^n} \frac{|D_i^X(x)|}{\lambda_n}.$$

Бесконечность второго предела следует из леммы 1, если применить ее к последовательности $\{\mu_n\}$, определенной следующим образом:

$$\mu_n = \lambda_{2^k}, \quad 2^{k-1} \leq n < 2^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Покажем, что для всякой $F(u) = uf(u)$, где $f(u)$ – неубывающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, $f(0) = 1$ и $f(u)$ удовлетворяет условию

$$f(u) = o(\ln u) \quad \text{при } u \rightarrow \infty,$$

существует такая функция $g \in F(L)$, ряд Фурье–Уолша–Качмажа которой расходится почти всюду на $[0, 1)$.

Выберем последовательность $\{f_j\}$, удовлетворяющую условиям

- 1) $\sup_{x \leq 9(2^j)} \left| \frac{f(x)}{j} \right| \leq f_j, \quad \frac{1}{\ln j - 1} \leq f_j;$
- 2) $f_{j+1} \leq f_j;$
- 3) $f_j - f_{j+1} \leq \frac{1}{j \ln j};$
- 4) $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = 0.$

Существование последовательности, удовлетворяющей первому и последнему свойствам, следует из свойств функции f . Добиться выполнения второго свойства можно, перейдя к последовательности $f'_j = \sup_{i \geq j} f_i$. Для выполнения третьего свойства достаточно перейти к последовательности

$$f'_j = \max \left(f_j, f_{j-1} - \frac{1}{(j-1) \ln(j-1)} \right).$$

Покажем, что можно выбрать последовательность $\{\lambda_j\}$, удовлетворяющую следующим свойствам:

- 1) $j < \lambda_j < \lambda_{j+1}$;
- 2) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} = \infty$;
- 3) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j}{\lambda_j} < \infty$;
- 4) $\lambda_{j+1} - \lambda_j > \frac{3}{4}(\lambda_j - \lambda_{j-1})$;
- 5) $\lambda_{j+2} < \frac{4}{3}\lambda_j$;
- 6) $\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{j+1}} \leq \frac{1}{2}$.

Отметим, что последнее свойство следует из первого, при условии что $\lambda_j > 2$ при всех j . Будем выбирать последовательность $\{\lambda_i\}$ так, чтобы $\lambda_i > 2$, в соответствии со следующим алгоритмом. Выберем $\lambda_0 = 9$. Положим $\lambda_i = 3(10/9)^i$ для i таких, что $f_i \geq 1/2$. Пусть i_0 — наименьшее i такое, что $f_i < 1/2$. Для $i > i_0$ положим $\lambda_i = 1 + \lambda_{i-1} + (3/4)(\lambda_{i-1} - \lambda_{i-2})$. Получим расходящийся ряд $\sum_{i=i_0}^{\infty} (1/\lambda_i)$. Выберем i_1 так, что $2 > \sum_{i=i_0}^{i_1} (1/\lambda_i) > 1$. Для $i > i_1$ положим $\lambda_i = \lambda_{i_1} (10/9)^{i-i_1}$. Пусть i_2 — наименьшее из всех $i > i_1$, для которого верно $f_i < 1/4$. Для $i > i_2$ положим

$$\lambda_i = 1 + \lambda_{i-1} + \frac{3}{4}(\lambda_{i-1} - \lambda_{i-2}).$$

Получим расходящийся ряд $\sum_{i=i_2}^{\infty} (1/\lambda_i)$. Выберем i_3 так, что $2 > \sum_{i=i_2}^{i_3} (1/\lambda_i) > 1$.

Пусть уже выбрано i_{2m} и λ_i , $i < i_{2m}$. Для $i > i_{2m}$ положим

$$\lambda_i = 1 + \lambda_{i-1} + \frac{3}{4}(\lambda_{i-1} - \lambda_{i-2}).$$

Получим расходящийся ряд $\sum_{i=i_{2m}}^{\infty} (1/\lambda_i)$. Выберем i_{2m+1} так, что

$$2 > \sum_{i=i_{2m}}^{i_{2m+1}} \frac{1}{\lambda_i} > 1.$$

Для $i > i_{2m+1}$ положим

$$\lambda_i = \lambda_{i_{2m+1}} \left(\frac{10}{9} \right)^{i-i_{2m+1}}.$$

Пусть i_{2m+2} – наименьшее из всех $i > i_{2m+1}$, для которого верно $f_i < 1/2^{m+1}$. Продолжим построение по индукции.

По построению полученная последовательность удовлетворяет свойствам 1), 4), 5). Свойство 2) очевидно выполнено, так как для всех m $\sum_{i=i_{2m}}^{i_{2m+1}} (1/\lambda_i) > 1$. Проверим выполнение свойства 3). Имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j}{\lambda_j} \leq C + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=i_{2m}}^{i_{2m+1}} \frac{f_i}{\lambda_i} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=i_{2m+1}+1}^{i_{2m+2}} \frac{f_i}{\lambda_i} \leq 2 \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3(10/9)^i} f_i < \infty.$$

Таким образом, требуемая последовательность построена.

Рассмотрим ряд

$$R(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} (D_{2^j}^{\chi}(x) - D_{2^{j-1}}^{\chi}(x)).$$

Покажем, что его поточечный предел задает функцию принадлежащую классу $F(L)(G)$, ряд Фурье–Уолша–Качмажа которой совпадает с

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \sum_{i=2^{j-1}}^{2^j-1} \chi_i(x). \quad (8)$$

Отметим, что из утверждения 4 следует расходимость данного ряда Фурье–Уолша–Качмажа почти всюду на G .

При $x \in \Delta_0^n \setminus \Delta_0^{n+1}$ имеем

$$R(x) = -\frac{2^n}{\lambda_{n+1}} + \sum_{j=1}^n \frac{2^{j-1}}{\lambda_j}.$$

Посчитаем разность между значениями R на $\Delta_0^n \setminus \Delta_0^{n+1}$ и $\Delta_0^{n+1} \setminus \Delta_0^{n+2}$:

$$R(\Delta_0^{n+1} \setminus \Delta_0^{n+2}) - R(\Delta_0^n \setminus \Delta_0^{n+1}) = 2^{n+1} \left(\frac{1}{\lambda_{n+1}} - \frac{1}{\lambda_{n+2}} \right).$$

Отсюда получаем, что

$$R(\Delta_0^n \setminus \Delta_0^{n+1}) = \sum_{j=1}^n 2^j \left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{j+1}} \right).$$

В силу свойств последовательности $\{\lambda\}$

$$\begin{aligned} |R(\Delta_0^n \setminus \Delta_0^{n+1})| &= \left| \sum_{j=1}^n 2^j \left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{j+1}} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{1-8/9} 2^n \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) \leq 9 \cdot 2^n \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right), \end{aligned}$$

поскольку

$$\frac{2^j}{2^{j+1}} \frac{1/\lambda_j - 1/\lambda_{j+1}}{1/\lambda_{j+1} - 1/\lambda_{j+2}} \leq \frac{\lambda_{j+1} - \lambda_j}{\lambda_{j+2} - \lambda_{j+1}} \cdot \frac{\lambda_{j+2}}{\lambda_j} \cdot \frac{1}{2} \leq \frac{8}{9}.$$

Пусть $R_n = R(\Delta_0^n \setminus \Delta_0^{n+1})$. Оценим интеграл

$$\begin{aligned} \int_G F(|R(x)|) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Delta_0^n \setminus \Delta_0^{n+1}} |R(x)| f(|R(x)|) dx = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} |R_n| f(|R_n|) \\ &\leq C + \sum_{n=1}^{\infty} \left| 9 \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) \right| f \left(\left| 9 \cdot 2^n \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) \right| \right) \\ &\leq C + \sum_{n=1}^{\infty} \left| 9 \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) \right| n f_n. \end{aligned}$$

Рассмотрим m -ю частную сумму данного ряда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m 9 \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) n f_n &= \sum_{n=1}^m 9 \left(\frac{1}{\lambda_n} \right) n f_n - \sum_{n=2}^{m+1} \frac{9}{\lambda_n} (n-1) f_{n-1} \\ &= \frac{9f_1}{\lambda_1} - \frac{9mf_m}{\lambda_{m+1}} + 9 \sum_{n=2}^m \frac{1}{\lambda_n} (n f_n - (n-1) f_{n-1}) \\ &= \frac{9f_1}{\lambda_1} - \frac{9mf_m}{\lambda_{m+1}} + 9 \sum_{n=2}^m \frac{1}{\lambda_n} ((n-1)(f_n - f_{n-1}) + f_n) \\ &= \frac{9f_1}{\lambda_1} - \frac{9mf_m}{\lambda_{m+1}} + 9 \sum_{n=2}^m \frac{f_n}{\lambda_n} + \sum_{n=2}^m \frac{1}{\lambda_n} (n-1)(f_n - f_{n-1}). \end{aligned}$$

В силу выбора последовательности $\{\lambda_i\}$ второе слагаемое стремится к нулю, третье имеет конечный предел. Четвертая сумма оценивается следующим образом:

$$\left| \sum_{n=3}^m \frac{1}{\lambda_n} (n-1)(f_n - f_{n-1}) \right| \leq \sum_{n=3}^m \frac{1}{\lambda_n \ln(n-1)} \leq \sum_{n=3}^m \frac{f_n}{\lambda_n}$$

в силу выбора последовательности $\{f_i\}$. Данная сумма также имеет конечный предел в силу выбора $\{\lambda_i\}$. Итак, показана конечность интеграла $\int_G F(|R(x)|) dx$, а значит, принадлежность $R(x)$ классу $F(L)(G)$.

Осталось показать, что ряд Фурье–Уолша–Качмажа $R(x)$ совпадает с (8). Пусть $2^m \leq n < 2^{m+1}$. Поскольку $R(x) \in L(G)$

$$\int_G R(x) \chi_n(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{G \setminus \Delta_0^k} R(x) \chi_n(x) dx.$$

Пусть $k > m$. Учитывая, что на множестве $G \setminus \Delta_0^k$ функция $R(x)$ совпадает с

$$\sum_{j=0}^k \frac{1}{\lambda_j} (D_{2^j}^\chi(x) - D_{2^{j-1}}^\chi(x)),$$

а на множестве Δ_0^k выполнено $\chi_n(x) = 1$, оценим

$$\int_{G \setminus \Delta_0^k} R(x) \chi_n(x) dx = \int_{G \setminus \Delta_0^k} \sum_{j=0}^k \frac{1}{\lambda_j} (D_{2^j}^\chi(x) - D_{2^{j-1}}^\chi(x)) \chi_n(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lambda_{m+1}} - \int_{\Delta_0^k} \sum_{j=0}^k \frac{1}{\lambda_j} (D_{2^j}^x(x) - D_{2^{j-1}}^x(x)) dx \\
&= \frac{1}{\lambda_{m+1}} - \sum_{j=0}^k \frac{2^{j-1-k}}{\lambda_j}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что последовательность λ_i возрастает к бесконечности, получаем [7; с. 98], что

$$\int_G R(x) \chi_n(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_{m+1}} - \sum_{j=0}^k \frac{2^{j-1-k}}{\lambda_j} \right) = \frac{1}{\lambda_{m+1}}.$$

Таким образом, утверждение теоремы полностью доказано.

Перейдем к доказательству теоремы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Покажем, что для всякой положительной и возрастающей последовательности $\{\lambda_n\}$ такой, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} = \infty,$$

найдется f из $L(G)$ такая, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{S_n(x, f)}{\lambda_n} \right| = \infty \quad \text{для почти всех } x \in [0, 1].$$

Выберем возрастающую к бесконечности последовательность $\{\mu_k\}$ так, чтобы было выполнено

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k \lambda_{2^k}} = \infty. \quad (9)$$

Рассмотрим ряд

$$R(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} (D_{2^j}^x(x) - D_{2^{j-1}}^x(x)).$$

Покажем, что его поточечный предел задает функцию, принадлежащую классу $L(G)$, ряд Фурье–Уолша–Качмажа которой совпадает с

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} \sum_{i=2^{j-1}}^{2^j-1} \chi_i(x). \quad (10)$$

Отметим, что тогда из (9) и утверждения 4 для этого ряда следует

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{S_n(x)}{\lambda_n} \right| = \infty \quad \text{для почти всех } x \in [0, 1].$$

Проверим принадлежность $R(x)$ классу $L(G)$. При $x \in \Delta_0^n \setminus \Delta_0^{n+1}$

$$R(x) = -\frac{2^n}{\mu_{n+1}} + \sum_{j=1}^n \frac{2^{j-1}}{\mu_j}.$$

Посчитаем разность между значениями R на $\Delta_0^n \setminus \Delta_0^{n+1}$ и $\Delta_0^{n+1} \setminus \Delta_0^{n+2}$

$$R(\Delta_0^{n+1} \setminus \Delta_0^{n+2}) - R(\Delta_0^n \setminus \Delta_0^{n+1}) = 2^{n+1} \left(\frac{1}{\mu_{n+1}} - \frac{1}{\mu_{n+2}} \right).$$

Отсюда получаем, что

$$R(\Delta_0^n \setminus \Delta_0^{n+1}) = \sum_{j=1}^n 2^j \left(\frac{1}{\mu_j} - \frac{1}{\mu_{j+1}} \right).$$

Учитывая, что $1/\mu_j - 1/\mu_{j+1} > 0$, имеем

$$\begin{aligned} \int_G R(x) dx &= C + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_0^n \setminus \Delta_0^{n+1}} R(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n 2^{j-n} \left(\frac{1}{\mu_j} - \frac{1}{\mu_{j+1}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} 2^{j-n-1} \left(\frac{1}{\mu_j} - \frac{1}{\mu_{j+1}} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu_j} - \frac{1}{\mu_{j+1}} \right) \leq \frac{1}{\mu_1}. \end{aligned}$$

Откуда следует принадлежность $R(x)$ классу $L(G)$. Осталось показать, что ряд Фурье–Уолша–Качмажа $R(x)$ совпадает с (10). Пусть $2^m \leq n < 2^{m+1}$. Поскольку $R(x) \in L(G)$

$$\int_G R(x) \chi_n(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{G \setminus \Delta_0^k} R(x) \chi_n(x) dx.$$

Пусть $k > m$. Учитывая, что на множестве $G \setminus \Delta_0^k$ функция $R(x)$ совпадает с

$$\sum_{j=0}^k \frac{1}{\mu_j} (D_{2^j}^{\chi}(x) - D_{2^{j-1}}^{\chi}(x)),$$

а на множестве Δ_0^k выполнено $\chi_n(x) = 1$, оценим

$$\begin{aligned} \int_{G \setminus \Delta_0^k} R(x) \chi_n(x) dx &= \int_{G \setminus \Delta_0^k} \sum_{j=0}^k \frac{1}{\mu_j} (D_{2^j}^{\chi}(x) - D_{2^{j-1}}^{\chi}(x)) \chi_n(x) dx \\ &= \frac{1}{\mu_{m+1}} - \int_{\Delta_0^k} \sum_{j=0}^k \frac{1}{\mu_j} (D_{2^j}^{\chi}(x) - D_{2^{j-1}}^{\chi}(x)) dx \\ &= \frac{1}{\mu_{m+1}} - \sum_{j=0}^k \frac{2^{j-1-k}}{\mu_j}. \end{aligned}$$

Учитывая, что последовательность μ возрастает к бесконечности, получаем [7; с. 98], что

$$\int_G R(x) \chi_n(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\mu_{m+1}} - \sum_{j=0}^k \frac{2^{j-1-k}}{\mu_j} \right) = \frac{1}{\mu_{m+1}}.$$

Таким образом, утверждение теоремы полностью доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. Шипп, “О некоторых перестановках рядов по системе Уолша”, *Матем. заметки*, **18**:2 (1975), 193–201.
- [2] Wo Sang Young, “On a.e. convergence of Walsh–Kaczmarz–Fourier series”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **44** (1974), 353–358.
- [3] N. Yu. Antonov, “Convergence of Fourier series”, *East J. Approx.*, **2**:2 (1996), 187–196.
- [4] Н. Ю. Антонов, “Условия конечности мажорант последовательностей операторов и сходимость рядов Фурье”, *Теория приближений. Асимптотические разложения*, Сборник статей, Тр. ИММ УрО РАН, **7**, 2001, 3–20.
- [5] P. Sjölin, F. Soria, “Remarks on a theorem by N. Y. Antonov”, *Studia Math.*, **158** (2003), 79–97.
- [6] А. А. Шнейдер, “О рядах по функциям Вальша с монотонными коэффициентами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **12**:2 (1948), 179–192.
- [7] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987.
- [8] Л. А. Балашов, “О рядах по системе Уолша с монотонными коэффициентами”, *Сиб. матем. журн.*, **12**:1 (1971), 25–39.
- [9] С. В. Бочкарев, “Всюду расходящиеся ряды Фурье по системе Уолша и мультипликативным системам”, *УМН*, **59**:1(355) (2004), 103–124.
- [10] С. В. Конягин, “О расходимости всюду тригонометрических рядов Фурье”, *Матем. сб.*, **191**:1 (2000), 103–126.
- [11] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1990.

И. В. Поляков

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: igorp86@mail.ru

Поступило

31.01.2008

Исправленный вариант

15.01.2013