Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Аминов, Выражение тензора Римана подмногообразия риманова пространства, заданного системой уравнений, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 5, 643–648

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm451>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 09:03:09

УДК 517

ВЫРАЖЕНИЕ ТЕНЗОРА РИМАНА ПОДМНОГООБРАЗИЯ РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА, ЗАДАННОГО СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ

Ю. А. Аминов

В статье установлено выражение тензора Римана подмногообразия риманова пространства, заданного в неявном виде системой независимых уравнений. В частности, доказана формула для внутренней кривизны двумерной поверхности в трехмерном римановом пространстве. Даны примеры использования формулы.

Библиография: 3 названия.

Выражение тензора Римана для подмногообразия в евклидовом пространстве получено нами в работе [1]. В данной работе рассмотрим общий случай.

Пусть в римановом пространстве M^n с координатами $y^1, \dots, y^n$ и с метрикой

$$ds^2 = b_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta \quad (1)$$

задано в неявной форме регулярное подмногообразие F^m системой независимых уравнений

$$\Phi_1(y^1, \dots, y^n) = 0, \quad \dots, \quad \Phi_p(y^1, \dots, y^n) = 0, \quad (2)$$

где $p = n - m$. Пусть $a_{\rho\sigma} = (\text{grad } \Phi_\rho \text{ grad } \Phi_\sigma)$, где скалярное произведение берется в метрике (1) и $\|a^{\rho\sigma}\|$ – матрица, обратная к матрице $\|a_{\rho\sigma}\|$. Пусть $\Phi_{\rho|\alpha} = \partial\Phi_\rho/\partial y^\alpha$, $\Phi_{\rho|\alpha\beta} = \partial^2\Phi_\rho/\partial y^\alpha\partial y^\beta$, $\Phi^\sigma_{|\alpha\beta} = \Phi_{\rho|\alpha\beta}a^{\rho\sigma}$. Символы Кристоффеля метрики (1) обозначим через $\bar{\Gamma}^\gamma_{\mu\nu}$ и ее тензор Римана через $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Пусть векторы X, Y, Z, W касательные к F^m и $[XY]^{\alpha\beta}$ – компоненты бивектора $[XY]$. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Для тензора Римана $\langle R(X, Y)Z, W \rangle$ подмногообразия F^m имеет место соотношение

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \frac{1}{4}(A + B + C + \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta})[XY]^{\alpha\beta}[ZW]^{\gamma\delta}, \quad (3)$$

где

$$A = \begin{vmatrix} \Phi^\delta_{|\alpha\gamma} & \Phi^\sigma_{|\beta\gamma} \\ \Phi_{\sigma|\alpha\delta} & \Phi_{\sigma|\beta\delta} \end{vmatrix}, \quad C = \Phi^\sigma_\mu \Phi_{\sigma|\nu} \begin{vmatrix} \bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\gamma} & \bar{\Gamma}^\nu_{\beta\gamma} \\ \bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\delta} & \bar{\Gamma}^\nu_{\beta\delta} \end{vmatrix},$$

$$B = -\Phi^\sigma_\mu \left\{ \begin{vmatrix} \Phi_{\sigma|\alpha\gamma} & \bar{\Gamma}^\mu_{\beta\gamma} \\ \Phi_{\sigma|\alpha\delta} & \bar{\Gamma}^\mu_{\beta\delta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\gamma} & \Phi_{\sigma|\beta\gamma} \\ \bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\delta} & \Phi_{\sigma|\beta\delta} \end{vmatrix} \right\}.$$

В дальнейшем для доказательства нам будет удобно использовать и некоторое параметрическое задание подмногообразия $y^\alpha = y^\alpha(u^1, \dots, u^m)$, $\alpha = 1, \dots, n$, или в “векторной” форме $r = r(u^1, \dots, u^m)$. Производные этой “векторной” функции по координатам u^k обозначим через r_k . Рассмотрим вывод уравнений Гаусса, приведенный в [2, § 47].

Дифференцируя правые и левые части уравнений системы (2), получим

$$\Phi_{\rho|\alpha} \frac{\partial y^\alpha}{\partial u^i} = 0. \quad (4)$$

Так как векторы $r_i = \{\partial y^\alpha / \partial u^i\}$ касательные к F^m , то векторы $\xi_\rho = \text{grad } \Phi_\rho$ являются нормальными к F^m . Их набор образует базис нормального пространства, в общем случае не ортонормированный. Величины $\Phi_{\rho|\alpha}$ являются ковариантными компонентами вектора ξ_ρ .

В [2, § 47] дано выражение (47.4) для вторых ковариантных производных в метрике F^m от функций y^α :

$$y_{,ij}^\alpha = -\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha y_{,i}^\mu y_{,j}^\nu + \Omega^\sigma_{|ij} \xi_\sigma^\alpha. \quad (5)$$

Это выражение (аналог разложений Гаусса) может служить для определения коэффициентов вторых квадратичных форм $\Omega^\sigma_{|ij}$. Положим

$$\Omega_{\rho|ij} = \Omega^\sigma_{|ij} a_{\sigma\rho}. \quad (6)$$

Пусть $dl^2 = g_{ij} du^i du^j$ – метрика F^m , индуцированная метрикой (1). Заметим, что

$$y_{,ij}^\alpha = \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial u^i \partial u^j} - \Gamma_{ij}^k y_{,k}^\alpha,$$

где Γ_{ij}^k – символы Кристоффеля метрики dl^2 . Поэтому

$$\xi_{\sigma|\alpha} y_{,ij}^\alpha = \xi_{\sigma|\alpha} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial u^i \partial u^j} - \Gamma_{ij}^k y_{,k}^\alpha \xi_{\sigma|\alpha} = \xi_{\sigma|\alpha} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial u^i \partial u^j}. \quad (7)$$

С другой стороны, дифференцируя правую и левую части равенства (4) по u^j , получим

$$\Phi_{\rho|\alpha\beta} y_{,i}^\alpha y_{,j}^\beta + \Phi_{\rho|\alpha} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial u^i \partial u^j} = 0.$$

С учетом (6) находим

$$\xi_{\rho|\alpha} y_{,ij}^\alpha = -\Phi_{\rho|\alpha\beta} y_{,i}^\alpha y_{,j}^\beta. \quad (8)$$

Умножая обе части уравнения (5) на $\xi_{\rho|\alpha}$ и сворачивая по α с учетом (7), находим

$$\Omega_{\rho|ij} = -\Phi_{\rho|\alpha\beta} y_{,i}^\alpha y_{,j}^\beta + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha y_{,i}^\mu y_{,j}^\nu \xi_{\rho|\alpha}. \quad (9)$$

При выводе уравнения Гаусса в [2] предполагается, что базис ξ_ρ ортонормированный. Но часть формул из § 47 остается справедливой и для неортонормированного базиса, в

частности, формула (47.6). С помощью ковариантного дифференцирования из равенства $b_{\alpha\beta}y_{,i}^{\alpha}\xi_{\sigma}^{\beta} = 0$ получим

$$b_{\alpha\beta}y_{,i}^{\alpha}\xi_{\sigma,j}^{\beta} = -\Omega_{\sigma|ij} - \bar{\Gamma}_{\mu\beta,\nu}y_{,i}^{\nu}y_{,j}^{\mu}\xi_{\sigma}^{\beta}. \quad (10)$$

Из уравнения (5) с помощью ковариантного дифференцирования по u^k получим

$$y_{,ijk}^{\alpha} = -\frac{\partial\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial y^{\tau}}y_{,i}^{\mu}y_{,j}^{\nu}y_{,k}^{\tau} - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}y_{,ik}^{\mu}y_{,j}^{\nu} - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}y_{,i}^{\mu}y_{,jk}^{\nu} + \Omega^{\sigma}_{|ij,k}\xi_{\sigma}^{\alpha} + \Omega^{\sigma}_{|ij}\xi_{\sigma,k}^{\alpha}. \quad (11)$$

В дальнейшем нам понадобится аналог разложений Вейнгартена. Запишем разложение ковариантной производной от контравариантной компоненты вектора ξ_{σ} :

$$\xi_{\sigma,j}^{\beta} = A_{\sigma|j}^k y_{,k}^{\beta} + B_{\sigma|j}^{\tau} \xi_{\tau}^{\beta}. \quad (12)$$

Умножая правую и левую части (12) на $b_{\alpha\beta}y_{,i}^{\alpha}$ и используя (10), находим

$$A_{\sigma|j}^k g_{ki} = b_{\alpha\beta}y_{,i}^{\alpha}\xi_{\sigma,j}^{\beta} = -\Omega_{\sigma|ij} - \bar{\Gamma}_{\mu\beta,\nu}y_{,i}^{\nu}y_{,j}^{\mu}\xi_{\sigma}^{\beta}.$$

Следовательно,

$$A_{\sigma|j}^k = -\Omega_{\sigma|ij}g^{ik} - \bar{\Gamma}_{\mu\beta,\nu}y_{,i}^{\nu}y_{,j}^{\mu}\xi_{\sigma}^{\beta}g^{ik}. \quad (13)$$

Подставим эти выражения в правую часть (12) и затем соответствующее выражение $\xi_{\sigma,k}^{\alpha}$ – в правую часть (11). Для разности третьих ковариантных производных функций y^{α} имеем

$$\begin{aligned} y_{,ijk}^{\alpha} - y_{,ikj}^{\alpha} &= R_{ijk}^l y_{,l}^{\alpha} = \left(\frac{\partial\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial y^{\tau}} - \frac{\partial\bar{\Gamma}_{\mu\tau}^{\alpha}}{\partial y^{\nu}} \right) y_{,j}^{\tau}y_{,i}^{\mu}y_{,k}^{\nu} + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}y_{,ij}^{\mu}y_{,k}^{\nu} - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}y_{,ik}^{\mu}y_{,j}^{\nu} \\ &\quad + \Omega^{\sigma}_{|ik}(\Omega_{\sigma|js}g^{sl} + \bar{\Gamma}_{\mu\beta,\nu}y_{,s}^{\nu}y_{,j}^{\mu}\xi_{\sigma}^{\beta}g^{sl})y_{,l}^{\alpha} \\ &\quad - \Omega^{\sigma}_{|ij}(\Omega_{\sigma|ks}g^{sl} + \bar{\Gamma}_{\mu\beta,\nu}y_{,s}^{\nu}y_{,k}^{\mu}\xi_{\sigma}^{\beta}g^{sl})y_{,l}^{\alpha} + \dots, \end{aligned}$$

где точками заменены компоненты нормальных векторов. Обе части равенства умножим на $b_{\alpha\beta}y_{,h}^{\beta}$ и свернем по h . Это соответствует скалярному умножению на касательный вектор r_h . Поэтому слагаемые, замененные многоточием, дают нуль. Далее, с помощью уравнения (5) заменим вторые ковариантные производные $y_{,ij}^{\mu}$ и $y_{,ik}^{\mu}$. Получим

$$\begin{aligned} R_{hijk} &= \left(\frac{\partial\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial y^{\tau}} - \frac{\partial\bar{\Gamma}_{\mu\tau}^{\alpha}}{\partial y^{\nu}} + \bar{\Gamma}_{s\tau}^{\alpha}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^s - \bar{\Gamma}_{s\nu}^{\alpha}\bar{\Gamma}_{\mu\tau}^s \right) y_{,j}^{\tau}y_{,i}^{\mu}y_{,k}^{\nu}y_{,h}^{\beta}b_{\alpha\beta} \\ &\quad + \Omega^{\sigma}_{|ik}\Omega_{\sigma|jh} - \Omega^{\sigma}_{|ij}\Omega_{\sigma|kh} + (\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}y_{,k}^{\nu}\Omega^{\sigma}_{|ij}\xi_{\sigma}^{\mu} - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}y_{,j}^{\nu}\Omega^{\sigma}_{|ik}\xi_{\sigma}^{\mu})y_{,h}^{\beta}b_{\alpha\beta} \\ &\quad + (\bar{\Gamma}_{\mu\beta,\nu}\Omega^{\sigma}_{|ik}y_{,j}^{\mu} - \bar{\Gamma}_{\mu\beta,\nu}\Omega^{\sigma}_{|ij}y_{,k}^{\mu})y_{,s}^{\nu}\xi_{\sigma}^{\beta}g^{sl}y_{,l}^{\alpha}y_{,h}^{\beta}b_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Последние две суммы взаимно уничтожаются, так как $g^{sl}y_{,l}^{\alpha}y_{,h}^{\beta}b_{\alpha\beta} = g^{sl}g_{lh} = \delta_h^s$, и мы получим уравнения Гаусса

$$R_{hijk} = R_{\beta\mu\tau\nu}y_{,h}^{\beta}y_{,i}^{\mu}y_{,j}^{\tau}y_{,k}^{\nu} + (\Omega^{\sigma}_{|ik}\Omega_{\sigma|hj} - \Omega^{\sigma}_{|ij}\Omega_{\sigma|hk}). \quad (14)$$

Равенства (9) перепишем в виде

$$\Omega_{\rho|ij} = C_{\rho|ij} + D_{\rho|ij},$$

где

$$C_{\rho|ij} = -\Phi_{\rho|\alpha\beta} y_{,i}^{\alpha} y_{,j}^{\beta}, \quad D_{\rho|ij} = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} y_{,i}^{\mu} y_{,j}^{\nu} \xi_{\rho|\alpha}.$$

Пусть $p_{hi}^{\alpha\beta} = y_{,h}^{\alpha} y_{,i}^{\beta} - y_{,i}^{\alpha} y_{,h}^{\beta}$ – компоненты бивектора $[r_h r_i]$. Тогда выражение в круглых скобках в правой части (14) можно записать в виде суммы трех слагаемых $P + Q + R$, где

$$\begin{aligned} P &= \begin{vmatrix} C^{\sigma}_{|ik} & C^{\sigma}_{|ij} \\ C^{\sigma}_{|hk} & C^{\sigma}_{|hj} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \Phi^{\sigma}_{|\alpha\gamma} & \Phi^{\sigma}_{|\beta\gamma} \\ \Phi^{\sigma}_{|\alpha\delta} & \Phi^{\sigma}_{|\beta\delta} \end{vmatrix} p_{hi}^{\alpha\beta} p_{jk}^{\gamma\delta}, \\ Q &= \begin{vmatrix} D^{\sigma}_{|ik} & C^{\sigma}_{|hk} \\ D^{\sigma}_{|ij} & C^{\sigma}_{|hj} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C^{\sigma}_{|ik} & D^{\sigma}_{|hk} \\ C^{\sigma}_{|ij} & D^{\sigma}_{|hj} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \xi_{\sigma|\gamma} a^{\rho\sigma} \left(\begin{vmatrix} \Phi_{\rho|\alpha\beta} & \bar{\Gamma}_{\alpha\nu}^{\gamma} \\ \Phi_{\rho|\mu\beta} & \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\gamma} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} & \Phi_{\rho|\alpha\nu} \\ \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^{\gamma} & \Phi_{\rho|\mu\nu} \end{vmatrix} \right) p_{ih}^{\alpha\mu} p_{kj}^{\nu\beta}, \\ R &= \begin{vmatrix} D^{\sigma}_{|ik} & D^{\sigma}_{|hk} \\ D^{\sigma}_{|ij} & D^{\sigma}_{|hj} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\mu} & \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\nu} \\ \bar{\Gamma}_{\alpha\delta}^{\mu} & \bar{\Gamma}_{\beta\delta}^{\nu} \end{vmatrix} \xi_{\sigma|\mu} \xi_{\rho|\nu} a^{\rho\sigma} p_{ih}^{\alpha\beta} p_{kj}^{\gamma\delta}. \end{aligned}$$

Итак, формула (3) доказана.

Рассмотрим частный случай двумерной поверхности F^2 в трехмерном римановом пространстве M^3 . Пусть поверхность F^2 задана одним уравнением

$$\Phi(y^1, \dots, y^3) = 0.$$

Гауссова кривизна K_i этой поверхности определяется уравнением

$$K_i = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Если $n = (p^{23}, p^{31}, p^{12})$ – компоненты бивектора, составленного из двух касательных векторов, то $n = \lambda \text{grad } \Phi$. В этом случае можно дать выражение для гауссовой кривизны K_i в довольно компактном виде.

Положим $\Lambda_{ij} = \Phi_{,\nu} \bar{\Gamma}_{ij}^{\nu}$ и $N_{ijkl} = \Phi_{,ik} \Lambda_{jl} + \Phi_{,jl} \Lambda_{ik} - \Phi_{,il} \Lambda_{jk} - \Phi_{,jk} \Lambda_{il}$. Введем матрицу

$$N = \begin{bmatrix} N_{2323} & N_{3123} & N_{2132} \\ N_{3123} & N_{1313} & N_{1231} \\ N_{2132} & N_{1231} & N_{1212} \end{bmatrix}.$$

Тогда общая формула для гауссовой кривизны K_i поверхности F^2 в римановом пространстве M^3 имеет вид

$$K_i = \frac{\begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_1 \\ \Phi_{12} & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_2 \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & \Phi_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & 0 \end{vmatrix} + (\text{grad } \Phi N \text{ grad } \Phi) \begin{vmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} & \Phi_1 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} & \Phi_2 \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} & \Phi_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & 0 \end{vmatrix}}{(\Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} b^{\mu\nu})^2 \det \|b_{\mu\nu}\|} + \bar{K}. \quad (15)$$

Здесь $\bar{K}$ – кривизна риманова пространства M^3 для площадки, касательной к F^2 . Обозначим через K_l внешнюю кривизну F^2 в M^3 . Имеет место формула $K_i = K_l + \bar{K}$. Поэтому первое слагаемое в правой части формулы (15) есть не что иное как внешняя кривизна K_l . Далее заметим, что первый определитель является квадратичным выражением относительно вторых производных $\Phi_{\alpha\beta}$, выражение $(\text{grad } \Phi N \text{ grad } \Phi)$ линейно по этим производным, а второй определитель содержит только первые производные функции Φ .

Применим эту формулу к поверхности в пространстве Лобачевского L^3 с метрикой в форме Пуанкаре

$$ds^2 = \frac{(dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2}{(y^3)^2}.$$

Тогда $b_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $b_{ii} = 1/(y^3)^2$, $b^{ii} = (y^3)^2$.

Удобно использовать матрицу символов Кристоффеля

$$\begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{11}^1 & \bar{\Gamma}_{12}^1 & \bar{\Gamma}_{13}^1 & \bar{\Gamma}_{23}^1 & \bar{\Gamma}_{22}^1 & \bar{\Gamma}_{33}^1 \\ \bar{\Gamma}_{11}^2 & \bar{\Gamma}_{12}^2 & \bar{\Gamma}_{13}^2 & \bar{\Gamma}_{23}^2 & \bar{\Gamma}_{22}^2 & \bar{\Gamma}_{33}^2 \\ \bar{\Gamma}_{11}^3 & \bar{\Gamma}_{12}^3 & \bar{\Gamma}_{13}^3 & \bar{\Gamma}_{23}^3 & \bar{\Gamma}_{22}^3 & \bar{\Gamma}_{33}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{y^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{y^3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{y^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{y^3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты Λ_{ij} легко вычисляются; например, $\Lambda_{12} = \Lambda_{33} = 0$. Положим для удобства записи $(y^3)^{-1} = t$. Найдем второй определитель в правой части (15), который обозначим через Λ :

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} & \xi_1 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} & \xi_2 \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t\xi_3 & 0 & -t\xi_1 & \xi_1 \\ 0 & t\xi_3 & -t\xi_2 & \xi_2 \\ -t\xi_1 & -t\xi_2 & 0 & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{2\xi_3^2(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_3^4}{(y^3)^2}. \quad (16)$$

Здесь $\xi_i = \Phi_i$.

По указанной выше формуле находим матрицу N . Далее получим

$$\begin{aligned} & (\xi_1 \xi_2 \xi_3) N \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \\ &= (\xi_1 \xi_2 \xi_3) \begin{vmatrix} t(\Phi_{33}\xi_3 + 2\Phi_{23}\xi_2) & -t(\Phi_{23}\xi_1 + \Phi_{13}\xi_2) & t(\Phi_{22}\xi_1 - \Phi_{12}\xi_2 - \Phi_{13}\xi_3) \\ * & -t(\Phi_{33}\xi_3 + 2\Phi_{13}\xi_1) & t(-\Phi_{12}\xi_1 + \Phi_{11}\xi_2 - \Phi_{23}\xi_3) \\ * & * & t(\Phi_{11} + \Phi_{22}) \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\xi_3}{y^3} \{ \Phi_{33}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_3^2(\Phi_{11} + \Phi_{22}) + 2(\Phi_{11}\xi_2^2 - 2\Phi_{12}\xi_1\xi_2 + \Phi_{22}\xi_1^2) \\ &\quad - 2\xi_3(\xi_1\Phi_{13} + \xi_2\Phi_{23}) \}. \end{aligned} \quad (17)$$

Найдем внутреннюю кривизну поверхности, заданной уравнением

$$\Phi = ay^1 + by^2 + cy^3 - d = 0,$$

где a, b, c, d – константы.

Тогда $\xi_1 = a$, $\xi_2 = b$, $\xi_3 = c$. По формуле (15) с учетом (16) и (17) имеем

$$\Lambda = -\frac{2c^2(a^2 + b^2) + c^4}{(y^3)^2}, \quad N = 0.$$

Следовательно, внутренняя кривизна поверхностей, заданных линейным уравнением,

$$K_i = \frac{c^2(2(a^2 + b^2) + c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} - 1.$$

Внешняя кривизна K_l поверхности всегда положительна или равна нулю. При $c = 0$ получаем вполне геодезическую поверхность; в этом случае $K_l \equiv 0$. Если $a = b = 0$, то $K_l = 1$ и $K_i = 0$. Действительно, уравнение $y^3 = \text{const}$ задает орисферу в пространстве Лобачевского, внутренняя кривизна которой, как известно, равна нулю.

Найдем кривизну K_i для сфер $(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3 - d)^2 = R^2$, где d и R постоянные. В этом случае приходим к выражению

$$K_i = \frac{d((y^3 - d)^3 - R^2(y^3 - d) + dR^2)}{R^4} - 1.$$

Если $d = 0$, то центр сферы лежит на абсолюте и получаем в этом случае вполне геодезическую поверхность, для которой, очевидно, $K_l = 0$. Анализ этой формулы достаточно элементарен и мы проводить его не будем. Формулу (15) можно применить во многих других случаях.

В заключение отмечу, что тема статьи совпадает с тематикой работы [3], в которой, однако, отсутствуют важные, с нашей точки зрения, формулы (3) и (15) или аналогичные им соотношения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Аминов Ю. А. Выражение тензора Римана подмногообразия евклидова пространства, заданного системой уравнений // Матем. заметки. (в печати).
- [2] Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1947.
- [3] Dombrowski Z. P. Krümmungsgrößen gleichungsdefinierter Untermannigfaltigkeiten Riemannscher Mannigfaltigkeiten // Math. Nachr. 1968. V. 38. № 3/4. P. 133–180.

Харьковский государственный университет
E-mail: aminov@ilt.kharkov.ua

Поступило
20.04.1999