Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Макин, О существовании решений одной нелинейной интегродифференциальной системы уравнений переноса, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 1, 113–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4510>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 09:29:34

УДК 517.9

О существовании решений одной нелинейной интегродифференциальной системы уравнений переноса

Р. С. Макин

В работе рассматривается система уравнений, описывающая процессы переноса в неоднородных распределенных средах, например, в ядерных реакторах. Для данной системы уравнений ставится смешанная задача. При некоторых условиях на начальные данные доказана глобальная разрешимость задачи в слабом обобщенном смысле. При этом используется стандартная схема нелинейного функционального анализа.

Библиография: 16 названий.

1. В настоящее время считается общепринятым, что наиболее точное описание процессов переноса в неоднородных распределенных средах дается уравнением переноса, которое в общем случае представляет собой нелинейное интегродифференциальное уравнение [1]–[3]. В частности, достаточно общая динамическая система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(x, v, t)}{\partial t} + (v, \nabla_x)N(x, v, t) + |v| \sum (x, v, t; T(x, t))N(x, v, t) \\ = \int_V \partial v' K(x, v, v'; T(x, t))N(x, v', t) + \sum_{k=1}^M z_k f_k(v) C_k(x, t), \\ \frac{\partial C_k(x, t)}{\partial t} = -z_k C_k(x, t) + \int_V \partial v K_k(x, v; T(x, t))N(x, v, t), \quad k = 1, \dots, M, \\ \alpha(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \operatorname{div}\{d(x) \nabla T(x, t)\} + \int_V \partial v K_{M+1}(x, v; T(x, t))N(x, v, t) \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$N(x, v, t)|_{t=+0} = N_0(x, v), \quad C_k(x, t)|_{t=+0} = C_{k0}(x), \quad k = 1, \dots, M, \quad (2)$$

$$T(x, t)|_{t=+0} = T_0(x), \quad (3)$$

$$N(x, v, t)|_{x \in \Gamma} = 0 \quad \forall (v, n(x)) < 0, \quad (3)$$

$$d(x)(n(x), \nabla_x T(x, t) + \alpha(x)T(x, t))|_{x \in \Gamma} = 0. \quad (4)$$

Здесь коэффициенты и ядра даются выражениями

$$\begin{aligned}
 K(x, v, v'; T) &= K_s(x, v, v'; T) + K_f(x, v, v'; T), \\
 K_p(x, v, v'; T) &= \sum_{l=1}^r |v'| \Sigma_p^l(x, v'; T) \nu_p^l(v') K_p^l(v, v') p = s, f, \\
 K_k(x, v; T) &= \sum_{l=1}^r |v| \Sigma_f^l(x, v; T) \beta_k^l(v), \\
 K_{M+1}(x, v; T) &= \sum_{l=1}^r |v| \Sigma_f^l(x, v; T) \mu_l(v), \\
 |v| \Sigma(x, v; T) &= \sum_{l=1}^r |v| \{ \Sigma_s^l(x, v; T) + \Sigma_f^l(x, v; T) + \Sigma_c^l(x, v; T) \}, \\
 \nu_s^l(v) &\equiv 1, \quad k = 1, \dots, M.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Функции $|v| \Sigma_f^l(x, v; T)$, $p = s, c, f$; $l = 1, \dots, r$, характеризуются макроскопическими сечениями взаимодействия излучения (частиц) со средой (веществом); p – тип взаимодействия излучения с ядрами l -го нуклида, входящего в состав среды.

Система (1)–(4) описывает эволюцию во времени пространственно-энергетического распределения плотности излучения $N(x, v, t)$, пространственного распределения M групп предшественников запаздывающего излучения $C_k(x, t)$, $k = 1, \dots, M$, и температуры среды $T(x, t)$ в некотором объеме G с границей ∂G ($\equiv \Gamma$). Система (1)–(4) является одной из наиболее общих моделей переноса излучения в мультиплицирующей среде с учетом обратных связей [3]–[5].

Вопросы анализа нелинейных систем уравнений в частных производных с распределенными параметрами, куда может входить интегродифференциальное уравнение переноса, в настоящее время привлекают внимание, прежде всего, в силу возникающих новых нелинейных явлений (“диффузионный” хаос, странные аттракторы, стохастичность поведения, инерциальные многообразия и т.д.) [6]–[9]. Здесь рассмотрены вопросы существования и единственности сильного локального решения задачи (1)–(4) при различных условиях на данные задачи; исследуется также возможность продолжения этого решения на полубесконечный интервал и устойчивость решения по возмущениям коэффициентов.

Далее будем предполагать выполненными следующие условия относительно областей G , V , а также коэффициентов и ядер системы (1)–(4).

УСЛОВИЕ 1. Пусть $G \subset E_3\{x_1, x_2, x_3\}$ – ограниченная выпуклая область в трехмерном евклидовом пространстве с границей $\Gamma \in C^2$; $n(x)$ – внешняя нормаль к Γ в точке $x \in \Gamma$; $V \subset E_3(v_1, v_2, v_3)$ – ограниченная область, причем

$$\forall v \in V \quad 0 < \underline{v} \leq |v| \leq \bar{v} < \infty, \quad |v| = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{1/2}, \quad \underline{v}, \bar{v} = \text{const}.$$

Область G может быть разбита на $(N + 1)$ подобласть G_i поверхностями Γ_i , $i = 1, \dots, N$, являющимися поверхностями Ляпунова, гомеоморфными сфере и не пересекающимися между собой и Γ .

УСЛОВИЕ 2. Функции $\alpha(x)$, $d(x)$, $a(x)$, $f_k(x)$, $\nu_f^l(v)$, $\beta_k^l(v)$, $\mu_l(v)$, $K_p^l(v, v')$, $p = s, f$; $l = 1, \dots, r$; $k = 1, \dots, M$, представляют из себя неотрицательные измеримые в соответствующих областях определения функции, удовлетворяющие следующим условиям ограниченности и суммируемости:

$$\begin{aligned} 0 < \mu_l(v) \leq m_l, \quad 0 < \beta_k^l(v) \leq b_k^l, \quad 0 < \nu_f^l(v) \leq n_l, \\ 0 < f_k(v) \leq f_k, \quad 0 < \alpha_m \leq \alpha(x) \leq \alpha_M, \quad 0 < d_m \leq d(x) \leq d_M < \infty, \\ K_p^l(v, v') \geq c_p^l > 0 \quad \forall (v, v') \in V \times V, \quad \int_V \partial_v K_p^l(v, v') = 1, \\ \int_V \partial_v |K_p^l(v, v')|^2 \leq K, \quad l = 1, \dots, r, \quad p = s, f, \quad k = 1, \dots, M, \\ m_l, b_k^l, n_l, f_k, \alpha_m, \alpha_M, d_m, d_M, c_p^l, K = \text{const} < \infty. \end{aligned}$$

При $x \in G_i$ функции $\alpha(x) = \alpha_i(x)$, $d(x) = d_i(x)$, где $\alpha_i(x)$, $d_i(x) \in C(G_i)$, $i = 1, \dots, N$. Функция $a(x) \in C^1(\Gamma)$, $a(x) > 0$, $x \in \Gamma$.

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_{E_1}$, $\|\cdot\|_{E_2}$, соответственно; $\hat{A}: E_1 \rightarrow E_2$ – оператор, действующий из E_1 в E_2 . Множества линейных замкнутых, ограниченных и вполне непрерывных операторов $\hat{A}: E_1 \rightarrow E_2$ обозначим $C(E_1, E_2)$, $B(E_1, E_2)$ и $Q(E_1, E_2)$, соответственно.

УСЛОВИЕ А. Нелинейные операторы $|v|\Sigma_p^l(x, v; T): L_2(G; \alpha) \rightarrow L_\infty(G \times V)$, $p = s, f, c$, $l = 1, \dots, r$, имеют производные Фреше

$$|v|\Sigma_{pT}^l(x, v; T) \in B(L_2(G; \alpha), L_\infty(G \times V)),$$

липшицево непрерывные по T , так что

$$\begin{aligned} \||v|\Sigma_{pT}^l(x, v; T_1) - |v|\Sigma_{pT}^l(x, v; T_2)\|_{B(L_2(G; \alpha), L_\infty(G \times V))} &\leq \chi_p^l \|T_1 - T_2\|_{L_2(G; \alpha)}, \\ \chi_p^l &= \text{const} < \infty \quad \forall T_i \in L_2(G; \alpha), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

При любых фиксированных значениях $T \in L_2(G; \alpha)$ $|v|\Sigma_p^l(x, v; T_1)$ являются ограниченными измеримыми в $L_\infty(G \times V)$ функциями и справедлива равномерная по $T \in L_2(G; \alpha)$ оценка

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma_{mp}^l \leq |v|\Sigma_p^l(x, v; T) \leq \sigma_{Mp}^l < \infty, \quad \sigma_{mp}^l, \sigma_{Mp}^l = \text{const}; \\ \exists l \in \{1, \dots, r\} \quad \text{такое, что} \quad \sigma_{ml}^l > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

УСЛОВИЕ В. Операторы $|v|\Sigma_p^l(x, v; T)$, $p = s, f, c$, $l = 1, \dots, r$, представимы в виде

$$|v|\Sigma_p^l(x, v; T) = |v|\Sigma_p^l(x, v) + \sigma_p^l(x, v; T), \quad (7)$$

где функции $|v|\Sigma_p^l(x, v; T) \in L_\infty(G \times V)$ удовлетворяют неравенству (6); $\sigma_p^l(x, v; T)$ – зависящие от $(x, v) \in (G \times V)$ линейные над $L_2(G; \alpha)$ функционалы, такие, что

$$\sigma_p^l(x, v; T) = \int_G dv' w_p^l(x, x', v) T(x'), \quad (8)$$

$w_p^l(x, x', v)$ – измеримые в области $G \times V \times G$ функции с оценкой

$$\int_G dv' |w_p^l(x, x', v)|^2 \leq W_{pl}^2 = \text{const} < \infty \quad \text{почти всюду в } G \times V,$$

и неотрицательные почти всюду на множестве $G \times V \times G$, $p = s, f$.

2. Введем оператор диффузии $\widehat{l} \equiv -\operatorname{div}\{d(x)\operatorname{grad}_x\}: D(\widehat{l}) \rightarrow L_2(G)$ с областью определения $D(\widehat{l})$, состоящей из функций $f(x) \in W_2^2(G)$, для которых выполнены граничное условие (4) и условия сопряжения

$$[f(x)]|_{\Gamma_i} = [f(x)]|_{\Gamma_i-0} - [f(x)]|_{\Gamma_i+0}, \quad \left[\frac{\partial f(x)}{\partial \mu} \right] \Big|_{\Gamma_i} = 0, \quad (9)$$

где $\partial f(x)/\partial \mu = d(x)(n_i(x), \nabla_x f(x))$ – производная по конормали к поверхности Γ_i в точке x ; $n_i(x)$ – внешняя по отношению к G_i нормаль к поверхности сопряжения Γ_i , $i = 1, \dots, N$.

Пространство $W_2^2(G)$ представляет из себя прямую сумму соболевских пространств $W_2^2(G_i)$ функций $f(x)$, определенных в G_i и имеющих две производные в $\overline{G_i}$, суммируемые с квадратом. Норма в $W_2^2(G_i)$ дается выражением

$$\|f\|_{W_2^2(G_i)}^2 = \|f\|_{L_2(G_i)}^2 + \sum_{j=1}^3 \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{L_2(G_i)}^2 + \sum_{j=1}^3 \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \right\|_{L_2(G_i)}^2,$$

где производные понимаются в смысле обобщенных функций. Пространство $W_2^2(G)$ очевидным образом гильбертово. Из теорем вложения следует, что $D(\widehat{l}) \subset W_2^2(G) \subset C(G)$; здесь $C^k(G)$ – пространство функций, непрерывных в G вместе с k -й производной; $C(G) \equiv C^0(G)$.

Пусть $\widehat{A}: E_1 \rightarrow E_2$, E_i – банаховы пространства с конусами $\mathcal{K}(E_i)$, $i = 1, 2$. Оператор $\widehat{A}$ называется *положительным*, если $\widehat{A}\mathcal{K}(E_1) \subseteq \mathcal{K}(E_2)$. Замкнутое множество $\mathcal{K}(E) \subset E$ называется *конусом*, если

$$\alpha(x) + \beta(y) \in \mathcal{K}(E) \quad \forall x, y \in \mathcal{K}(E), \quad \alpha, \beta \geq 0,$$

и по крайней мере один из элементов x или $-x$ ($x \neq \theta$, $x \in E$) не принадлежит $\mathcal{K}(E)$. Конус $\mathcal{K}(L_2(G; \alpha))$ является нормальным и воспроизводящим [10].

Пусть оператор $\widehat{A} \in C(E)$, $\overline{D(\widehat{A})} = E$, порождает C_0 – полугруппу $\widehat{\mathcal{U}}_t(\widehat{A})$, $t > 0$. Для положительности полугруппы $\widehat{\mathcal{U}}_t(\widehat{A})$, т.е. $\widehat{\mathcal{U}}_t(\widehat{A})\mathcal{K}(E) \subseteq \mathcal{K}(E)$, $t > 0$, достаточно, чтобы резольвента $\widehat{R}_\lambda(\widehat{A}) > 0$ для достаточно больших λ , $\widehat{R}_\lambda(\widehat{A}) \equiv (\lambda\widehat{I} - \widehat{A})^{-1}$.

ЛЕММА 1. Замкнутый линейный оператор $\widehat{l}: D(\widehat{l}) \rightarrow L_2(G)$ обладает следующими свойствами:

- (1) $D(\widehat{l}) \rightarrow L_2(G)$;
- (2) $\forall \varphi \in L_2(G)$ уравнение $\widehat{l}f = \varphi$ однозначно разрешимо в $D(\widehat{l})$;
- (3) существует положительный обратный оператор

$$\widehat{l}^{-1} \in Q(L_2(G)) \subset B(L_2(G));$$

- (4) оператор $\widehat{l}$ положительно определен, т.е.

$$(\widehat{l}f, f)_{L_2(G)} \geq \chi^2 \|f\|_{L_2(G; \alpha)}^2 \quad \forall f \in D(\widehat{l}),$$

$\chi = \operatorname{const} > 0$, $(\cdot, \cdot)_{L_2(G)}$ – скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2(G)$;

- (5) оператор $\hat{l}$ самосопряжен, его спектр $\sigma(\hat{l})$ состоит из счетного множества изолированных точек точечного спектра $\sigma_p(\hat{l})$, расположенных на вещественной оси.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2(G; \alpha)$ функций $f(x)$, квадратично суммируемых на G с весом $\alpha(x)$, линейный оператор $\hat{\Lambda} = -\alpha^{-1}(x)\hat{l}: D(\hat{\Lambda}) \rightarrow L_2(G; \alpha)$. Множество $D(\hat{\Lambda})$ состоит из функций $f(x) \in W_2^2(G; \alpha)$, удовлетворяющих условиям (4) и (9). Пространство $W_2^2(G; \alpha)$ определяется аналогично $W_2^2(G)$.

ЛЕММА 2. *Линейный оператор $\hat{\Lambda}: D(\hat{\Lambda}) \rightarrow L_2(G; \alpha)$ обладает следующими свойствами:*

- (1) $\hat{\Lambda} \in C(L_2(G; \alpha))$, $D(\hat{\Lambda}) = L_2(G; \alpha)$;
- (2) $\forall \varphi \in L_2(G; \alpha)$ уравнение $\hat{\Lambda}f = \varphi$ однозначно разрешимо в $D(\hat{\Lambda})$;
- (3) спектр $\sigma(\hat{\Lambda})$ состоит из счетного множества изолированных точек $\{-\mu_j\}$, $\mu_j > 0$, $j = 1, 2, \dots$, точечного спектра $\sigma_p(\hat{\Lambda})$, расположенного на вещественной оси; в спектре $\sigma_p(\hat{\Lambda})$ существует ведущее собственное значение (ВСЗ) $\{-\mu_0\}$, которому отвечает единственная (с точностью до нормы) собственная функция $\varphi_0 \in \mathcal{H}(L_2(G; \alpha))$ такая, что

$$\text{vrai}_{x \in G} \inf \varphi_0(x) = h_0(\varphi_0) = \text{const} > 0;$$

- (4) $\forall \text{Re } \lambda > -\mu_0 \exists \hat{R}_\lambda(\hat{\Lambda})$, для которой справедлива оценка

$$\hat{R}_\lambda(\hat{\Lambda}_{B(L_2(G; \alpha))}) \leq (\text{Re } \lambda + \mu_0)^{-1},$$

при этом оператор $\hat{R}_\lambda(\hat{\Lambda})$ положителен $\forall \lambda > -\mu_0$;

- (5) оператор $\hat{\Lambda}$ является производящим оператором C_0 -полугруппы положительных сжимающих операторов $\hat{\mathcal{W}}_t(\hat{\Lambda})$, $t > 0$, для которых справедлива оценка

$$\|\hat{\mathcal{W}}_t(\hat{\Lambda})\|_{B(L_2(G; \alpha))} \leq \exp(-\mu_0 t). \quad (10)$$

Рассмотрим в $L_2(G \times V)$ операторы

$$\hat{L} = (v, \nabla_x(\cdot)), \quad \hat{L}(T) = (v, \nabla_x(\cdot)) + |v| \cdot \Sigma(x, v; T(x))(\cdot), \quad (11)$$

где $T(x) \in L_2(G; \alpha)$ и фиксирована. Пусть π_v – ортогональная проекция области G на плоскость, перпендикулярную v и лежащую вне G ; $\pi_{y,v}$ – множество точек, по которому луч направления v , проходящий через точку $y \in \pi_v$, пересекает G . Множество $\pi_{y,v}$ можно представить в виде $\pi_{y,v} = \{y + s\xi : s = v/|v|, \xi_v(y, v) \leq \xi \leq \eta_v(y, v)\}$. Тогда $G = \pi_v \times \pi_{y,v}$. При этом $\forall f(x, v) \in L_2(G \times V)$ справедливо представление

$$\int_{G \times V} dx dv f(x, v) = \int_V dv \int_{\pi_v} dy \int_{\xi_v(y, v)}^{\eta_v(y, v)} d\xi f(y + s\xi, v).$$

По определению $f(x, v) \in D(\hat{l})$, если функция $f(y + s\xi, v)$, абсолютно непрерывная на замкнутом интервале $\overline{\pi_{y,v}}$, обладает обобщенной производной

$$(v, \nabla_x)f \equiv |v| \frac{\partial}{\partial \xi} f(y + s\xi, v) \in L_2(G \times V)$$

и удовлетворяет граничному условию $f(y + s\xi_v(y, v), v) = 0$ при почти всех $y \in \pi_v$, $v \in V$.

Свойства оператора $\widehat{L}$ хорошо изучены [2], [4]–[6]. С помощью (6) легко убедиться, что $\forall T(x) \in L_2(G; \alpha)$ фиксированной оператор $\widehat{L}(T)$ обладает аналогичными свойствами.

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия 1, 2, А. Тогда для любой фиксированной функции $T(x) \in L_2(G; \alpha)$:

- (1) $\widehat{L}(T) \subset C(L_2(G \times V))$, $D(\widehat{L}(T)) = D(\widehat{l}) \equiv D$, $D(\widehat{L}(T)) = L_2(G \times V)$;
- (2) $\forall \varphi(x, v) \in L_2(G \times V)$ уравнение $\widehat{L}(T)f = \varphi$ однозначно разрешимо в D ;
- (3) существует оператор $\widehat{L}^{-1}(T) \in B(L_2(G \times V))$, положительный относительно конуса $\mathcal{K}(L_2(G \times V))$;
- (4) спектр $\sigma(\widehat{L}(T))$ пуст; справедлива равномерная по $T \in L_2(G; \alpha)$ оценка

$$\|\widehat{R}_\lambda(\widehat{L}(T))\|_{B(L_2(G \times V))} \leq (\operatorname{Re} \lambda + \sigma_m)^{-1}, \quad \operatorname{Re} \lambda = -\sigma_m, \\ \sigma_m = \operatorname{vrai} \inf_{(x, v) \in G \times V} \Sigma(x, v; T);$$

- (5) оператор $\widehat{L}(T)$ является производящим оператором положительной C_0 -полугруппы $\widehat{\mathcal{U}}_t(\widehat{L}(T))$, $t > 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Лемма 3 справедлива для оператора $\widehat{L}_1 = \widehat{L} + |v|\Sigma(x, v)$, где функция $|v|\Sigma(x, v) \in L_2(G \times V)$ удовлетворяет оценке (6).

Рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} \widehat{S}_p(T)f &= \int_V dv' K_p(x, v, v'; T)f(x, v'), \\ \widehat{S}_k(T)f &= \int_V dv K_k(x, v; T)f(x, v), \quad k = 1, \dots, M+1, \\ \widehat{\Sigma}(T)f &= |v|\Sigma(x, v; T)f(x, v), \quad f \in L_2(G \times V); \\ \widehat{J}(T)f &= \Sigma(T)f + \sum_{p=s, f} \widehat{S}_p(T)f, \quad p = s, f. \end{aligned} \tag{12}$$

ЛЕММА 4. Пусть выполнены условия 1, 2, А и $T \in L_2(G; \alpha)$ – фиксированная функция. Тогда

- (i) $\widehat{S}_p(T), \widehat{\Sigma}(T), \widehat{J}(T) \in B(L_2(G \times V))$, $p = s, f$; $\widehat{S}_k(T) \in B(L_2(G \times V), L_2(G))$, $k = 1, \dots, M+1$;
- (ii) $\widehat{S}_p(T)\mathcal{K}(L_2(G \times V)) \subseteq \mathcal{K}(L_2(G \times V))$, $p = s, f$; $\widehat{S}_k(T)\mathcal{K}(L_2(G \times V)) \subseteq \mathcal{K}(L_2(G))$, $k = 1, \dots, M$; $\widehat{S}_{M+1}(T)\mathcal{K}(L_2(G \times V)) \subseteq \mathcal{K}(L_2(G; \alpha))$;
- (iii) $\widehat{L}^{-1}(T)\widehat{S}_p(T) \in Q(L_2(G \times V))$; $\widehat{L}^{-1}(T)\widehat{S}_K(T) \in Q(L_2(G \times V))$, $k = 1, \dots, M+1$; $p = s, f$;
- (iv) если $\sigma_{mp}^l > 0$ для какого-нибудь l , то операторы $\widehat{L}^{-1}(T), \widehat{S}_p(T)$ u_0 -положительны, $p = s, f$;
- (v) $r_\sigma(\widehat{L}^{-1}(T)\widehat{S}_p(T)) < 1$ и совпадает с ВСЗ λ_0 оператора $(\widehat{L}^{-1}(T)\widehat{S}_p(T))$ (здесь $r_\sigma(\widehat{A})$ – спектральный радиус оператора $\widehat{A}$), при этом можно считать, что равномерно по $T \in L_2(G; \alpha)$ справедлива оценка $\|\widehat{L}^{-1}(T)\widehat{S}_s(T)\|_{B(L_2(G; \alpha))} \leq q < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует основным положениям работы [4] и определениям из [10].

СЛЕДСТВИЕ. Оператор $\widehat{S}(T) = \alpha^{-1}(x)\widehat{S}_{M+1}(T)$, $T \in L_2(G; \alpha)$ – любая фиксированная функция, обладает следующими свойствами:

- (a) $\widehat{S}(T) \in B(L_2(G \times V), L_2(G \times V))$;
- (b) $\widehat{S}(T)\mathcal{H}(L_2(G \times V)) \subseteq \mathcal{H}(L_2(G; \alpha))$.

Введем в рассмотрение следующие линейные операторы:

$$\begin{aligned}
 \widehat{S}'_{pT}(T_0, N_0)f &= \int_V dv' \sum_{l=1}^r |v'| \Sigma'_{pT}(x, v; T_0) f(x) \nu_p^l(v') K_p^l(v, v') N_0(x, v), \\
 \widehat{\Sigma}'_{pT}(T_0, N_0)f &= \sum_{i=1}^r \sum_{p=s, f, c} \{|v| \Sigma'_{pT}(x, v; T_0) f(x)\} N_0(x, v), \\
 \widehat{J}'_T(T_0, N_0)f &= -\Sigma_T(T_0, N_0)f + \sum_{p=s, f} \widehat{S}_{pT}(T_0, N_0)f, \\
 \widehat{S}'_{kT}(T_0, N_0)f &= \int_V dv \sum_{l=1}^r |v| \Sigma'_{fT}(x, v; T_0) f(x) \beta_k^l(v) N_0(x, v), \quad k = 1, \dots, M, \\
 \widehat{S}'_{M+1, T}(T_0, N_0)f &= \int_V dv \sum_{l=1}^r |v| \Sigma'_{fT}(x, v'; T_0) f(x) \mu_l(v) N_0(x, v), \\
 N_0 &\in L_2(G \times V), \quad T_0 \in L_2(G; \alpha), \quad f \in L_2(G; \alpha).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Из свойств коэффициентов и ядер системы (1)–(4) и условия A устанавливается

ЛЕММА 5. Пусть выполнены условия 1, 2, A. Тогда $\forall N_0(x, v) \in L_2(G \times V)$, $T_0 \in L_2(G; \alpha)$ фиксированных, операторы $\widehat{\Sigma}'_T(T_0, N_0)$, $\widehat{J}'_T(T_0, N_0)$, $\widehat{S}'_{pT}(T_0, N_0) \in B(L_2(G; \alpha), L_2(G \times V))$;

$$\widehat{S}'_{kT}(T_0, N_0) \in B(L_2(G; \alpha), L_2(G)), \quad k = 1, \dots, M+1; \quad p = s, f.$$

СЛЕДСТВИЕ. Линейный оператор

$$\widehat{S}'_T(T_0, N_0) \equiv \alpha^{-1}(x)\widehat{S}'_{M+1, T}(T_0, N_0) \in B(L_2(G; \alpha))$$

$\forall T_0(x) \in L_2(G; \alpha)$, $N_0(x, v) \in L_2(G \times V)$ фиксированных.

С помощью условия A нетрудно убедиться, что линейные операторы (13) являются производными Фреше в точке (T_0, N_0) от нелинейных операторов $\widehat{S}_p(T)N$, $p = s, f$; $\widehat{\Sigma}(T)N$, $\widehat{J}(T)N$, $\widehat{S}_k(T)N$, $k = 1, \dots, M+1$, соответственно.

Пусть выполнено условие B. Тогда операторы (12) представимы в виде

$$\begin{aligned}
 \widehat{\Sigma}(T) &= \widehat{\Sigma} + \widehat{D}_0(T), \quad \widehat{S}_p(T) = \widehat{S}_p + \widehat{D}_p(T), \quad \widehat{S}_k(T) = \widehat{S}_k + \widehat{D}_k(T), \\
 k &= 1, \dots, M+1, \quad p = s, f.
 \end{aligned}$$

Здесь линейные операторы $\widehat{\Sigma}$, $\widehat{S}_p$, $\widehat{S}_k$ имеют вид

$$\begin{aligned}\widehat{\Sigma}f &= \sum_{l=1}^r \sum_p |v| \Sigma_p^l(x, v) f(x, v), \\ \widehat{S}_{pf}f &= \int_V dv' \sum_{l=1}^r |v'| \Sigma_p^l(x, v) \nu_p^l K_p^l(v, v') f(x, v), \quad p = s, f, \\ \widehat{S}_{kf}f &= \int_V dv \sum_{l=1}^r |v| \Sigma_f^l(x, v) \beta_k^l(v) f(x, v), \quad k = 1, \dots, M, \\ \widehat{S}_{M+1} &= \int_V dv \sum_{l=1}^r |v| \Sigma_f^l(x, v) \mu_l(v) f(x, v);\end{aligned}\tag{14}$$

операторы $\widehat{D}_0(T)$, $\widehat{D}_p(T)$, $\widehat{D}_k(T)$, $k = 1, \dots, M+1$, $p = s, f$, определяются выражениями (14), в которых $|v| \Sigma_p^l(x, v) = \sigma_p^l(x, v; T)$, $p = s, f$; $l = 1, \dots, r$. Поскольку функции $|v| \Sigma_p^l(x, v)$, $p = s, f, c$; $l = 1, \dots, r$, удовлетворяют оценке (6), для линейных операторов (14) справедлива лемма 4.

ЛЕММА 6. Пусть выполнены условия 1, 2, B. Тогда для $T(x) \in L_2(G; \alpha)$, $N(x, v) \in L_2(G \times V)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}\|\widehat{D}_0(T)N\|_{L_2(G; \alpha)} &\leq d_0 \|T\|_{L_2(G; \alpha)} \cdot \|N\|_{L_2(G \times V)}, \\ \|\widehat{D}_p(T)N\|_{L_2(G; \alpha)} &\leq d_p \|T\|_{L_2(G; \alpha)} \cdot \|N\|_{L_2(G \times V)}, \\ \|\widehat{D}_k(T)N\|_{L_2(G; \alpha)} &\leq d_k \|T\|_{L_2(G; \alpha)} \cdot \|N\|_{L_2(G \times V)}, \quad p = s, f, \quad k = 1, \dots, M+1.\end{aligned}\tag{15}$$

Если функция $T(x) \in \mathcal{K}(L_2(G; \alpha))$ фиксирована, то линейные ограниченные операторы $\widehat{D}_p(T)$, $\widehat{D}_k(T)$, $p = s, f$; $k = 0, 1, \dots, M+1$, положительны в соответствующих пространствах.

СЛЕДСТВИЕ. Операторы $\widehat{S} = \alpha^{-1}(x) \widehat{S}_{M+1}$ и $\alpha^{-1}(x) \widehat{D}_{M+1}(T)$ обладают следующими свойствами:

- (i) $\widehat{S} \in B(L_2(G \times V), L_2(G; \alpha))$; $\widehat{S}\mathcal{K}(L_2(G \times V)) \subseteq \mathcal{K}(L_2(G; \alpha))$;
- (ii) $\|\alpha^{-1}(x) \widehat{D}_{M+1}(T)N\|_{L_2(G \times V)} \leq d_{M+1} \alpha_m^{-1/2} \|T\|_{L_2(G; \alpha)} \|N\|_{L_2(G \times V)}$;
- (iii) если $T \in \mathcal{K}(L_2(G; \alpha))$, то $\alpha^{-1}(x) \widehat{D}_{M+1}(T)\mathcal{K}(L_2(G \times V)) \subseteq \mathcal{K}(L_2(G; \alpha))$.

3. Теорема о продолжении решения. Рассмотрим в банаховом пространстве E абстрактную задачу Коши (АЗК)

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \widehat{A}\varphi(t) + \widehat{F}(t; \varphi(t)), \quad t \in \Delta(a),\tag{16}$$

$$\varphi(t)|_{t=t_0} = \varphi_0 \in D(\widehat{A}),\tag{17}$$

где $\Delta(a)$ – подмножество вещественной оси вида $[0, a)$ или $[0, a]$. Обозначим через $E\{[0, a]\} = C\{[0, a]; D(\widehat{A}) \cap C^1[0, a], E\}$ – множество функций $\varphi(t)$, непрерывных из $[0, a]$ в $D(\widehat{A})$ и непрерывно дифференцируемых из $[0, a]$ в E . Это множество является банаховым пространством с топологией равномерной сходимости на $[0, a]$ и с нормой

$$\|\varphi\|_{E\{[0, a]\}} = \sup_{t \in [0, a]} \|\varphi(t)\| \equiv \sup_{t \in [0, a]} \{\|\varphi(t)\|_E + \|\widehat{A}\varphi(t)\|_E + \|\varphi'(t)\|_E\}, \quad \varphi(t) \in D(\widehat{A}).$$

Аналогичным образом определяется метризуемое пространство $E\{[0, a]\}$ (с топологией компактной сходимости, определяемой преднормами $\|\cdot\|_{E\{a_n\}}$, соответствующими компактными множествам a_n , $\bigcup_n a_n = [0, a]$).

Под решением задачи Коши (16)–(17) будем понимать функцию $\varphi(t) \in E\{\Delta\}$, удовлетворяющую на $\Delta(a)$ уравнению (16), а при $t \rightarrow +0$ – начальному условию (17).

УСЛОВИЕ С. (i) $\hat{A} \in C(E)$, $\overline{D(E)} = E$ и оператор $\hat{A}$ порождает сильно непрерывную C_0 – полугруппу линейных операторов $\widehat{\mathcal{U}}_t(\hat{A})$, $t > 0$ с оценкой

$$\|\widehat{\mathcal{U}}_t(\hat{A})\|_{B(E)} \leq M \exp(\omega t), \quad \omega = \text{const}. \quad (18)$$

(ii) Нелинейный оператор $\hat{F}(t; \varphi): [0, \infty) \times E \rightarrow E$ – ограниченный непрерывный по совокупности переменных оператор, обладающий ограниченной липшицевой непрерывностью по φ и равномерно непрерывными по t производной Фреше $\hat{F}'_t(t; \varphi)$ и производной Фреше $\hat{F}'_\varphi(t; \varphi)$ на каждом множестве вида $\Delta(\delta) \times S_R(\varphi_0)$, $S_R(\varphi_0) = \{\varphi \in E : \|\varphi - \varphi_0\|_E \leq k\}$ и удовлетворяющий оценкам

$$\begin{aligned} \|\hat{F}(t; \varphi)\|_E &\leq a_1(\delta, R), \\ \|\hat{F}'_t(t; \varphi)\|_E &\leq a_2(\delta, R), \\ \|\hat{F}'_\varphi(t; \varphi)\|_{B(E)} &\leq a_3(\delta, R), \\ \|\hat{F}'_t(t; \varphi) - \hat{F}'_t(t; \psi)\|_E &\leq a_4(\delta, R)\|\varphi - \psi\|_E + \alpha(|t - \tau|, \delta, R), \\ \|\hat{F}'_\varphi(t; \varphi) - \hat{F}'_\varphi(t; \psi)\|_{B(E)} &\leq a_5(\delta, R)\|\varphi - \psi\|_E + \beta(|t - \tau|, \delta, R), \end{aligned} \quad (19)$$

где $a_i(\delta, R)$ – некоторые постоянные, зависящие от $\delta(> 0)$, $R(> 0)$; $\alpha(h, \delta, R)$, $\beta(h, \delta, R) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ для всех фиксированных δ, R ; $i = 1, \dots, 5$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия С (i), (ii). Тогда для всех $\varphi_0 \in D(\hat{A})$ задача Коши (16), (17) имеет единственное решение $\varphi(t) \equiv \varphi(t, \varphi_0)$ на максимальном интервале существования решения $[0, t_M(\varphi_0))$, $t_M(\varphi_0) > 0$, такое, что $\varphi(t) \in E\{[0, t_M(\varphi_0)]\}$. Если при этом $t_M(\varphi_0) < \infty$, то справедливо соотношение

$$\lim_{t \rightarrow t_M(\varphi_0)-0} \|\varphi(t)\| \rightarrow +\infty. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия С в силу результатов работы [11] следует, что задача Коши (1), (2) $\forall \varphi_0 \in D(\hat{A})$ имеет единственное локальное решение $\varphi(t)$ на некотором сегменте $[0, h_0(\varphi_0)]$, причем $\varphi(t) \in \{[0, h_0(\varphi_0)]\}$.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \hat{A}\omega(t) + \hat{F}(t + h_0(\varphi_0), \omega(t)), \quad \omega(t), \omega(t)|_{t=+0} = \omega_0 \equiv \varphi(h_0(\varphi_0)). \quad (21)$$

Ясно, что $\omega_0 \in D(\hat{A})$ и операторы задачи Коши (21) удовлетворяют условию С. Поэтому задача Коши (21) имеет единственное решение $\omega(t)$ на некотором сегменте $[0, \delta(\omega_0)]$ и $\omega(t) \in E\{[0, \delta(\omega_0)]\}$. При этом $\delta(\omega_0) = \delta(\varphi(h_0(\varphi_0))) \equiv \delta_0(\varphi_0)$. Определим функцию $\psi(t)$ следующим образом:

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi_0, & t = 0, \\ \varphi(t), & t \in (0, h_0(\varphi_0)), \\ \omega(t - h_0(\varphi_0)), & t \in (h_0(\varphi_0), h_0(\varphi_0) + \delta(\varphi_0)). \end{cases}$$

Очевидно, что функция $\psi(t)$ определена при

$$t \in [0, h_1(\varphi_0)], \quad h_1(\varphi_0) \equiv h_0(\varphi_0) + \delta_0(\varphi_0), \quad h_1 > h_0.$$

Нетрудно показать, что $\psi(t) \in E\{[0, h_1]\}$ и является решением задачи Коши (16), (17) на сегменте $[0, h_1(\varphi_0)]$. Таким образом, мы продолжили решение $\varphi(t)$ задачи Коши (16), (17) с сегмента $[0, h_0(\varphi_0)]$ на больший сегмент $[0, h_1(\varphi_0)]$. Продолжая этот процесс, находим продолжения решения $\varphi(t)$ задачи Коши (16), (17) на сегменты $[0, h_1(\varphi_0)], \dots, [0, h_i(\varphi_0)]$ и т.д., причем $\{h_i(\varphi_0)\}_{i=1,2,\dots}$ – возрастающая последовательность действительных чисел. Такая последовательность стремится к $(+\infty)$ либо имеет конечный предел, который совпадает с точной верхней гранью множества $\{h_i(\varphi_0)\}_{i=1}^\infty$. Обозначим этот предел через $t_n(\varphi_0)$. Если имеет место первый случай, т.е. $h_n(\varphi_0) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то решение задачи Коши (16), (17) продолжимо указанным образом на всю полуось $[0, \infty]$. Покажем, что если $t_M(\varphi_0) < \infty$, то выполнено соотношение (20). Доказательство проведем от противного. Пусть $t_M(\varphi_0) < \infty$ и

$$\lim_{t \rightarrow t_M(\varphi_0)-0} \|\varphi(t)\| = L < \infty. \quad (22)$$

Заметим, что для любого компакта $[0, h] \subset [0, t_M(\varphi_0))$ $\psi(t) \equiv \|\varphi(t)\|$ – непрерывная ограниченная функция, так что $\sup_{t \in [0, h]} \psi(t) \leq B(L) = \text{const}$. Легко показать (например, от противного), что если справедливо неравенство (22), то функция $\varphi(t)$ ограничена на полусегменте $[0, t_M(\varphi_0))$, так что справедлива оценка

$$\|\varphi(t)\| \leq B = \text{const} < \infty, \quad t \in [0, t_M(\varphi_0)). \quad (23)$$

Рассмотрим разность $\varphi(h+t) - \varphi(t)$; $t, t+h \in [0, t_M(\varphi_0))$ и оценим ее в метрике $\|\cdot\|$. С помощью (II.1.43), (II.1.47), (II.1.48) работы [12], оценок (18), (19) и (23), проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы Гронуолла–Беллмана, приходим к справедливости оценки

$$\|\varphi(h+t) - \varphi(t)\| \leq \omega(h), \quad \omega(h) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \quad t \in [0, t_M(\varphi_0)).$$

Из нее следует, что для любого $\varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $t_M(\varphi_0) - \delta(\varepsilon) < \tau < t < t_M(\varphi_0)$, то $\|\varphi(t) - \varphi(\tau)\| < \varepsilon$, т.е. функция $\varphi(t)$ удовлетворяет критерию существования нового предела в точке $t_M(\varphi_0)$; значит существует

$$\lim_{t \rightarrow t_M(\varphi_0)-0} (\varphi(t)) = \varphi(t_M(\varphi_0)) \in D(\hat{A}). \quad (24)$$

Задавая начальное условие (24), приходим к задаче Коши вида (21) с начальным условием (24), имеющей решение на некотором сегменте $[0, h_*]$, $h_* > 0$. Это означает, что решение $\varphi(t)$ можно продолжить на сегмент

$$[0, T_M(\varphi_0)], \quad \text{где} \quad T_M(\varphi_0) = t_M(\varphi_0) + h_* > t_M(\varphi_0).$$

Но это противоречит определению $t_M(\varphi_0)$. Значит, допущение (22) не верно и справедливо соотношение (20). Приведем полезные далее следствия из теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнено условие С. Тогда если для решения $\varphi(t)$ задачи Коши (16), (17) справедлива априорная оценка

$$\|\varphi(t)\| \leq k(t) \quad (25)$$

на всем интервале существования решения и $k(t) \in C[0, \infty)$, то задача Коши (16), (17) имеет глобальное решение $\varphi(t) \in E\{[0, \infty)\}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях теоремы 1 пусть на всем интервале существования решения задачи Коши (16), (17) $\varphi(t)$ справедлива априорная оценка решения

$$\|\varphi(t)\|_E \leq l(t), \quad l(t) \in C[0, \infty). \quad (26)$$

Кроме того, предположим справедливость оценок

$$\begin{aligned} \|\widehat{F}(t; \varphi)\|_E &\leq a(t, \|\varphi\|_E), & \|\widehat{F}'_t(t; \varphi)\|_{B(E)} &\leq b(t, \|\varphi\|_E), \\ \|\widehat{F}'_\varphi(t; \varphi)\|_{B(E)} &\leq c(t, \|\varphi\|_E), & \varphi &\in E, \quad t \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (27)$$

где $a(t, s), b(t, s), c(t, s) \in C\{[0, \infty) \times [0, \infty)\}$; $a(t, s), b(t, s), c(t, s): [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ и функции $a(t, s), b(t, s), c(t, s)$ при любом фиксированном $t \in [0, \infty)$ не убывают по s (последнее требование, очевидно, не ограничивает общность рассмотрения). Тогда задача Коши (16), (17) имеет глобальное решение $\varphi(t) \in E\{[0, \infty)\}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть в условиях теоремы 1 справедливы оценки (27), причем $a(t, \|\varphi\|_E) \leq k\|\varphi\|_E^{1+\delta}$, $\delta, k = \text{const} > 0$. Пусть далее полугруппа $\widehat{\mathcal{U}}_t(\widehat{A}, t > 0)$, порождаемая оператором $\widehat{A}$, отрицательного типа (это значит, что в оценке (18) $\omega > 0$). Тогда задача Коши имеет глобальное решение $\varphi(t) \in E\{[0, \infty)\}$, если $\|\varphi_0\|_E \leq R$, где R – достаточно малая положительная величина.

Доказательство следствий 1–3 к теореме 1 основано на получении решения $\varphi(t)$ вида (25) из оценок (26), (27) с помощью леммы об интегральных неравенствах (см., например, [13], [14]).

4. О решении для условия А. Рассмотрим нелинейную интегро-дифференциальную систему уравнений (1) с начальными и граничными условиями (2)–(4). Будем считать выполненным условие А; это означает равномерную ограниченность операторов $|v|\Sigma_p^l(x, v; T)$, $p = s, f, c$; $l = 1, \dots, r$, по температуре T .

Введем в рассмотрение гильбертово пространство

$$\mathcal{H} = L_2(G \times V) \times L_2(G) \times \dots \times L_2(G) \times L_2(G; \alpha)$$

вектор-функций $\Phi = \text{col}\{N, C_1, \dots, C_M, T\}$ с обычным определением нормы и скалярного произведения:

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{\mathcal{H}} &= \left\{ \|N\|_{L_2(G \times V)}^2 + \sum_{k=1}^M \|C_k\|_{L_2(G)}^2 + \|T\|_{L_2(G; \alpha)}^2 \right\}^{1/2}, \\ \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle &= \langle N_1, N_2 \rangle_{L_2(G \times V)} + \sum_{k=1}^M \langle C_{1k}, C_{2k} \rangle_{L_2(G)} + \langle T_1, T_2 \rangle_{L_2(G; \alpha)} \quad \forall \Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Конус неотрицательных в $\mathcal{H}$ вектор-функций обозначим через

$$\mathcal{K}(\mathcal{H}) \quad (\equiv \{\mathcal{K}(L_2(G \times V)) \times \mathcal{K}(L_2(G)) \times \dots \times \mathcal{K}(L_2(G)) \times \mathcal{K}(L_2(G; \alpha))\});$$

он является воспроизводящим и нормальным.

Задачу (1)–(4) удобно записать в виде абстрактной задачи Коши (АЗК)

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \widehat{A}\Phi(t) + \widehat{F}(\Phi(t)), \quad t \in \Delta, \quad \Phi(t)|_{t=+0} = \Phi_0 \in D(\widehat{A}), \quad \Phi \in \mathcal{H}. \quad (28)$$

Здесь $\hat{A}: D(\hat{A}) \rightarrow \mathcal{H}$ – линейный неограниченный оператор с областью определения

$$D(\hat{A}) = D \times L_2(G) \times \cdots \times L_2(G) \times D(\hat{A}); \quad \hat{A} = \text{diag}\{\hat{L}, -z_1, \dots, -z_M, \hat{A}\}, \quad (29)$$

$\hat{F}(\Phi(t)): \mathcal{H} \times \Delta \rightarrow \mathcal{H}$ – нелинейный оператор вида

$$\begin{aligned} \hat{F}(\Phi(t)) &= \text{col}\{\hat{F}_0(\Phi), \hat{F}_1(\Phi), \dots, \hat{F}_M(\Phi), \hat{F}_{M+1}(\Phi)\}, \\ \hat{F}_0(\Phi(t)) &= \hat{J}(T) + \sum_{k=1}^M z_k f_k(v) c_k, \\ \hat{F}_k(\Phi) &= \hat{S}_k(T)N, \quad k = 1, \dots, M. \\ \hat{F}_{M+1}(\Phi) &= \hat{S}(T)N, \end{aligned} \quad (30)$$

Под решением задачи Коши (28) на отрезке Δ будем понимать вектор-функцию $\Phi(t) \in C\{\Delta, D(\hat{A})\} \cap C^1\{\Delta, \mathcal{H}\} \equiv \mathcal{H}\{\Delta\}$, удовлетворяющую АЗК (28) на Δ . Покажем, что при выполнении условий 1, 2, А АЗК (28) имеет единственное решение $\forall \Phi_0 = \text{col}\{N_0, C_{10}, \dots, C_{M0}, T_0\} \in D(\hat{A})$. Рассмотрим свойства операторов $\hat{A}$ и $\hat{F}(\Phi)$.

ЛЕММА 7. Пусть выполнены условия 1, 2, А. Тогда оператор $\hat{A}$ обладает следующими свойствами:

- (1) $\hat{A} \in C(\mathcal{H}), \overline{D(\hat{A})}D = \mathcal{H}$;
- (2) существует обратный оператор $\hat{A}^{-1} \in B(\mathcal{H})$;
- (3) существует резольвента $\hat{R}_\lambda(\hat{A})$, для которой справедлива оценка

$$\|\hat{R}_\lambda(\hat{A})\|_{B(\mathcal{H})} \leq (\text{Re } \lambda)^{-1} \quad \forall \text{Re } \lambda > 0;$$

- (4) оператор $\hat{A}$ является производящим оператором C_0 -полугруппы сжимающих положительных операторов $\widehat{\mathcal{U}}_t(\hat{A}), t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 7 основано на представлении (29) оператора $\hat{A}$ и свойствах операторов $\hat{L}$ и $\hat{\Lambda}$ (см. леммы 2 и 3).

ЛЕММА 8. В условиях 1, 2, А нелинейный оператор $\hat{F}(\Phi(t))$ ограничен из $\mathcal{H} \times [0, \infty)$ в $\mathcal{H}$ и имеет сильно непрерывную производную Фреше по $\Phi \hat{F}_\Phi(\Phi)$, удовлетворяющую по Φ условию Липшица в каждом шаре

$$S_R(\Phi_0) = \{\Phi \in \mathcal{H} : \|\Phi - \Phi_0\|_{\mathcal{H}} \leq R\};$$

при этом справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\hat{F}(\Phi)\|_{\mathcal{H}} &\leq c_1 \|\Phi\|_{\mathcal{H}}, & \|\hat{F}(\Phi_1) - \hat{F}(\Phi_2)\|_{\mathcal{H}} &\leq l \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{\mathcal{H}}, \\ \|\hat{F}'_\Phi(\Phi)\|_{B(\mathcal{H})} &\leq c_2(R), & \|\hat{F}'_\Phi(\Phi_1) - \hat{F}'_\Phi(\Phi_2)\|_{B(\mathcal{H})} &\leq c_3(R) \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{\mathcal{H}}, \\ l, c_1, c_2(R), c_3(R) &= \text{const} < \infty, & \Phi_1, \Phi_2 &\in S_R(\Phi_0), \quad \Phi \in \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) С помощью леммы 4 из (30) оценим норму $\|\hat{F}(\Phi)\|_{\mathcal{H}}$:

$$\|\hat{F}_0(\Phi)\|_{L_2(G \times V)} \leq \|\hat{J}(T)N\|_{L_2(G \times V)} + \sum_{k=1}^M z_k \|f_k(v)C_k\|_{L_2(G \times V)}$$

$$\leq C_J \|W\|_{L_2(G \times V)} + \sum_{k=1}^M z_k f_k(\text{mes } V)^{1/2} - \|C_k\|_{L_2(G)}.$$

Аналогично оценим $\widehat{F}_k(\Phi)$, $k = 1, \dots, M+1$:

$$\begin{aligned} \|\widehat{F}_k(\Phi)\|_{L_2(G)} &\leq C_k \|N\|_{L_2(G \times V)}, & k = 1, \dots, M, \\ \|\widehat{F}_{M+1}(\Phi)\|_{L_2(G; \alpha)} &\leq C_{M+1} \|N\|_{L_2(G \times V)}, & C_J, C_k = \text{const}, \quad k = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

С использованием неравенства Минковского

$$\left\{ \sum_{k=1}^M \left(\sum_{i=1}^M \xi_{ki} \right)^2 \right\}^{1/2} \leq \sum_{k=1}^M \left(\sum_{i=1}^M \xi_{ki}^2 \right)^{1/2}, \quad \xi_{ki} \geq 0,$$

находим

$$\begin{aligned} \|\widehat{F}(\Phi)\|_{\mathcal{H}} &\leq \left\{ C_J \|N\|_{L_2(G \times V)} + \sum_{k=1}^M z_k f_k(\text{mes } V)^{1/2} \|C_k\|_{L_2(G)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^M C_k \|N\|_{L_2(G \times V)}^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq C_1 \left\{ \|N\|_{L_2(G \times V)}^2 + \sum_{k=1}^M \|C_k\|_{L_2(G)}^2 \right\}^{1/2} \leq C_1 \|\Phi\|_{\mathcal{H}}, \quad C_1 = \text{const} < \infty. \end{aligned}$$

(ii) Покажем теперь, что оператор $\widehat{F}(\Phi(t))$ имеет в каждой точке

$$\Phi_* = \text{col}\{N_*, c_1, \dots, c_M, T_*\}$$

производную Фреше $\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*)$ вида

$$\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*) = \text{col}\{(\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*)\Phi)_0, (\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*)\Phi)_1, \dots, (\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*)\Phi)_{M+1}\},$$

где

$$\begin{aligned} (\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*)\Phi)_0 &= \widehat{J}(T_*)N + \sum_{k=1}^M z_k f_k(v) c_k + \widehat{J}'_T(T_*, N_*)T, \\ (\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*)\Phi)_k &= \widehat{S}_k(T_*)N + \widehat{S}_{kT'}(T_*, N_*)T, \quad k = 1, \dots, M, \\ (\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*)\Phi)_M &= \widehat{S}(T_*)N + \widehat{S}'_T(T_*, N_*)T. \end{aligned} \tag{32}$$

Для этого рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \widehat{F}(\Phi_* + \Delta\Phi) - \widehat{F}(\Phi) - \widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*)\Delta\Phi &= \widehat{W}(\Phi_*, \Delta\Phi) \\ &= \text{col}\{\widehat{W}_0(\Phi_*, \Delta\Phi), \dots, \widehat{W}_{M+1}(\Phi_*, \Delta\Phi)\} \end{aligned}$$

и оценим норму $\|\widehat{W}(\Phi_*, \Delta\Phi)\|_{\mathcal{H}}$. При этом отметим, что оценки норм $\widehat{W}_k(\Phi_*, \Delta\Phi)$, $k = 1, \dots, M+1$, проводятся аналогичным образом. Рассмотрим $\widehat{W}_{M+1}(\Phi_*, \Delta\Phi)$.

Из (30), (31) находим

$$\begin{aligned} & \widehat{W}_{M+1}(\Phi_*, \Delta\Phi)_0 \\ &= \{\widehat{S}(T_* + \Delta T)N_* - \widehat{S}(T_*)N_* - \widehat{S}'_T(T_*, N_*)\Delta T\} \\ & \quad + \{\widehat{S}(T_* + \Delta T)\Delta N - \widehat{S}(T_*)\Delta N - \widehat{S}'_T(T_*, \Delta N)\} + \widehat{S}_T(T_*, \Delta N)\Delta T. \end{aligned} \quad (33)$$

Поскольку в соответствии с условием A операторы

$$|v|\Sigma_p^l(x, v, ; T): L_2(G; \alpha) \rightarrow L_\infty(G \times V)$$

дифференцируемы по Фреше, справедлива оценка (см. п. 1)

$$\begin{aligned} & \| |v|\Sigma_p^l(x, v, ; T_* - \Delta T) - |v|\Sigma_p^l(x, v, ; T_*) - |v|\Sigma_{pT}^l(x, v, ; T_*)\Delta T \|_{L_\infty(G \times V)} \\ &= \varphi_p^l(\|\Delta T\|_{L_2(G; \alpha)}), \quad \frac{\varphi_p^l(\sigma)}{\sigma} \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow 0, \quad p = s, f, c, \quad l = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \|\widehat{S}(T_* + \Delta T)\Delta N - \widehat{S}(T_*)\Delta N - \widehat{S}'_T(T_*, N_*)\Delta N\|_{L_2(G; \alpha)} \\ &= \left\{ \int_G dx \alpha(x) \left| \frac{1}{\alpha(x)} \int_V dv \sum_{l=1}^r |v|\{\Sigma_f^l(x, v; T_* + \Delta T) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \Sigma_f^l(x, v; T_*) - \Sigma_{fT}^l(x, v; T_*)\Delta T\} u_1(v) N_*(x, v) \right|^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq \sum_{l=1}^r \frac{m_l}{\alpha_m} \| |v|\Sigma_f^l(x, v; T_* + \Delta T) - |v|\Sigma_f^l(x, v; T_*) - |v|\Sigma_{fT}^l(x, v; T_*)\Delta T \|_{L_\infty(G \times V)} \\ & \quad \times (\alpha_m \text{mes } V)^{1/2} \|N_*\|_{L_2(G \times V)} \\ &\leq \sum_{l=1}^r \frac{m_l}{\alpha_m} (\alpha_m \text{mes } V)^{1/2} \varphi_f^l(\|\Delta T\|_{L_2(G; \alpha)}) \|N_*\|_{L_2(G \times V)}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} & \|\widehat{S}(T_* + \Delta T)\Delta N - \widehat{S}(T_*)\Delta N - \widehat{S}'_T(T_*, \Delta N)\Delta T\|_{L_2(G; \alpha)} \\ &\leq \sum_{l=1}^r \frac{m_l}{\alpha_m} (\alpha_m \text{mes } V)^{1/2} \varphi_f^l(\|\Delta T\|_{L_2(G; \alpha)}) \|N_*\|_{L_2(G \times V)}. \end{aligned}$$

Используя эти оценки и следствие 3 к теореме 1, из (33) находим

$$\begin{aligned} & \|\widehat{W}_{M+1}(\Phi_*, \Delta\Phi)\|_{L_2(G; \alpha)} \\ &\leq \sum_{l=1}^r \frac{m_l}{\alpha_m} (\alpha_M \text{mes } V)^{1/2} \varphi_f^l(\|\Delta T\|_{L_2(G; \alpha)}) (\|N_*\|_{L_2(G \times V)} + \|\Delta N\|_{L_2(G \times V)}) \\ & \quad + C_{M+1} \|\Delta N\|_{L_2(G \times V)} \|\Delta T\|_{L_2(G; \alpha)} \\ &\leq \sum_{l=1}^r \tilde{C}_l \varphi_p^l \left(\frac{\|\Delta T\|_{L_2(G; \alpha)}}{\|\Delta T\|_{L_2(G; \alpha)}} \right) \left(\|\Delta\Phi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|N_*\|_{L_2(G \times V)} \|\Delta\Phi\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{M+1}}{2} \|\Delta\Phi\|_{\mathcal{H}}^2 \right), \\ & \quad C_{M+1}, \tilde{C}_l = \text{const} < \infty. \end{aligned}$$

Из этой оценки следует, что

$$\lim_{\|\Delta\Phi\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0} \frac{\|\widehat{W}_{M+1}(\Phi_*, \Delta\Phi)\|_{L_2(G;\alpha)}}{\|\Delta\Phi\|_{\mathcal{H}}} = 0.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\lim_{\|\Delta\Phi\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0} \frac{\|\widehat{W}_0(\Phi_*, \Delta\Phi)\|_{L_2(G \times V)}}{\|\Delta\Phi\|_{\mathcal{H}}} = \lim_{\|\Delta\Phi\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0} \frac{\|\widehat{W}_k(\Phi_*, \Delta\Phi)\|_{L_2(G;\alpha)}}{\|\Delta\Phi\|_{\mathcal{H}}} = 0.$$

Поскольку

$$\frac{\|\widehat{W}(\Phi_*, \Delta\Phi)\|_{\mathcal{H}}}{\|\Delta\Phi\|_{\mathcal{H}}} \leq \left\{ \frac{\|\widehat{W}_0\|_{L_2(G \times V)}^2}{\|\Delta\Phi\|_{\mathcal{H}}} + \sum_{k=1}^M \frac{\|\widehat{W}_k\|_{L_2(G)}}{\|\Delta\Phi\|_{\mathcal{H}}} + \frac{\|\widehat{W}_{M+1}\|_{L_2(G;\alpha)}}{\|\Delta\Phi\|_{\mathcal{H}}} \right\}^{1/2},$$

следовательно,

$$\lim_{\|\Delta\Phi\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0} \frac{\|\widehat{W}(\Phi_*, \Delta\Phi)\|_{\mathcal{H}}}{\|\Delta\Phi\|_{\mathcal{H}}} = 0,$$

что подтверждает, что оператор $\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*)$ вида (32) является производной Фреше нелинейного оператора $\widehat{F}(\Phi(t))$ в точке Φ_* .

(iii) Покажем, что $\widehat{F}'_{\Phi} \in B(\mathcal{H}) \ \forall \Phi \in S_R(\Phi_0)$. Для этого рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \|\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*)\Phi\|_{\mathcal{H}} &= \left\{ \|(\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*)\Phi)_0\|_{L_2(G \times V)}^2 + \sum_{k=1}^M \|(\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*)\Phi)_k\|_{L_2(G)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|(\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*)\Phi)_{M+1}\|_{L_2(G;\alpha)}^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (34)$$

и оценим каждую из норм $\|(\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*)\Phi)_k\|$, $k = 0, 1, \dots, M+1$. Используя результаты п. 1, из выражений (32) последовательно находим

$$\begin{aligned} &\|(\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*)\Phi)_0\|_{L_2(G \times V)} \\ &\leq \|\widehat{J}(T_*)N\|_{L_2(G \times V)} + \sum_{k=1}^M z_k \|f_k(v)C_k\|_{L_2(G)} + \|\widehat{J}_T(T_*, N_*)T\|_{L_2(G \times V)} \\ &\leq C_J \|N\|_{L_2(G \times V)} + \sum_{k=1}^M z_k f_k(\text{mes } V)^{1/2} \|C_k\|_{L_2(G)} + \widetilde{C}_J \|N_*\|_{L_2(G \times V)} \|T\|_{L_2(G;\alpha)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\|(\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*)\Phi)_k\|_{L_2(G)} \\ &\leq C_k \|N\|_{L_2(G \times V)} + \widetilde{C}_k \|N_*\|_{L_2(G \times V)} \|T\|_{L_2(G \times V)}, \quad k = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

$$\|(\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*)\Phi)_{M+1}\|_{L_2(G;\alpha)} \leq C_{M+1} \|N\|_{L_2(G \times V)} + \widetilde{C}_{M+1} \|N_*\|_{L_2(G \times V)} \|T\|_{L_2(G \times V)},$$

где $C_J, \widetilde{C}_J, C_k, \widetilde{C}_k = \text{const} < \infty$, $k = 1, \dots, M+1$.

Подставляя эти оценки в (34) и применяя неравенство Минковского, находим оценки

$$\|\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*)\Phi\|_{\mathcal{H}} \leq C(\|\Phi_*\|_{\mathcal{H}})\|\Phi\|_{\mathcal{H}} \leq C_2(R)\|\Phi\|_{\mathcal{H}},$$

т.е. $\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_*) \in B(\mathcal{H})$.

(iv) Пусть $\Phi_1, \Phi_2 \in S_R(\Phi_0) \subset \mathcal{H}$, $\Phi \in \mathcal{H}$. Обозначим

$$\{\widehat{F}'_\Phi(\Phi_1) - \widehat{F}'_\Phi(\Phi_2)\}\Phi \equiv \widehat{W} = \text{col}\{\widehat{W}_0, \widehat{W}_1, \dots, \widehat{W}_M, \widehat{W}_{M+1}\},$$

где

$$\begin{aligned}\widehat{W}_0 &= [\widehat{J}(T_1) - \widehat{J}(T_2)]N + \widehat{J}'_T(T_2, N_1 - N_2)T + [\widehat{J}'_T(T_1, N_1) - \widehat{J}'_T(T_2, N_1)]T, \\ \widehat{W}_k &= [\widehat{S}_k(T_1) - \widehat{S}_k(T_2)]N + \widehat{S}'_{kT}(T_2, N_1 - N_2)T + [\widehat{S}'_{kT}(T_1, N_1) - \widehat{S}'_{kT}(T_2, N_1)]T, \\ \widehat{W}_{M+1} &= [\widehat{S}(T_1) - \widehat{S}(T_2)]N + \widehat{S}'_T(T_2, N_1 - N_2)T + [\widehat{S}'_T(T_1, N_1) - \widehat{S}'_T(T_2, N_1)]T.\end{aligned}$$

Оценим норму $\|\widehat{W}_k\|$, $k = 1, \dots, M + 1$. Для этого потребуются оценки

$$\begin{aligned}\|\widehat{J}(T_1) - \widehat{J}(T_2)\|_{B(L_2(G \times V))}, & \quad \|\widehat{J}'_T(T_1, N_1) - \widehat{J}'_T(T_2, N_1)\|_{B(L_2(G; \alpha); L_2(G \times V))}, \\ \|\widehat{S}_k(T_1) - \widehat{S}_k(T_2)\|_{B(L_2(G \times V); L_2(G))}, & \quad \|\widehat{S}'_{kT}(T_1, N_1) - \widehat{S}'_{kT}(T_2, N_1)\|_{B(L_2(G; \alpha); L_2(G))}, \\ \|\widehat{S}(T_1) - \widehat{S}(T_2)\|_{B(L_2(G \times V); L_2(G))}, & \quad \|\widehat{S}'_T(T_1, N_1) - \widehat{S}'_T(T_2, N_1)\|_{B(L_2(G; \alpha); L_2(G))}.\end{aligned}$$

Последние можно получить, используя представления (12), (13) и условие А. Например,

$$\begin{aligned}& \|[\widehat{S}_k(T_1) - \widehat{S}_k(T_2)]N\|_{L_2(G)} \\ &= \left\{ \int_G dx \left[\int_V dv \sum_{l=1}^r \{ |v| \Sigma_f^l(x, v; T_1) - |v| \Sigma_f^l(x, v; T_2) \} \beta_k^l(v) N(x, v) \right]^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{ \int_G dx \left[\int_V dv \sum_{l=1}^r \int_0^1 d\eta |v| \Sigma_{fT}^l(x, v; \eta T_1 + (1 - \eta) T_2) \beta_k^l(v) N(x, v) \right]^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq \sum_{l=1}^r \Sigma_f^l \|T_1 - T_2\|_{L_2(G; \alpha)} b_k^l (\text{mes } V)^{1/2} \|N\|_{L_2(G \times V)} \\ &\leq \widetilde{\widetilde{C}}_k \|T_1 - T_2\|_{L_2(G; \alpha)} \|N\|_{L_2(G \times V)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \|\widehat{S}'_T(T_1, N_1) - \widehat{S}'_T(T_2, N_1)\|_{L_2(G)} \\ &= \left\{ \int_G dx \left[\int_V dv \sum_{l=1}^r \{ |v| \Sigma_{fT}^l(x, v; T_1) - |v| \Sigma_{fT}^l(x, v; T_2) \} \beta_k^l(v) T(x) N(x, v) \right]^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq \sum_{l=1}^r \chi_f^l b_k^l (\text{mes } V)^{1/2} \|T_1 - T_2\|_{L_2(G; \alpha)} \|T\|_{L_2(G; \alpha)} \|N_1\|_{L_2(G \times V)} \\ &\leq \widetilde{\widetilde{C}}_k(R) \|T_1 - T_2\|_{L_2(G; \alpha)} \|T\|_{L_2(G; \alpha)},\end{aligned}$$

где $\widetilde{\widetilde{C}}_k, \widetilde{\widetilde{C}}_k(R) = \text{const} < \infty$, $k = 1, \dots, M$. Из этих оценок и леммы 5 следует, что

$$\begin{aligned}\|\widehat{W}_k\|_{L_2(G)} &\leq \|[\widehat{S}_k(T_1) - \widehat{S}_k(T_2)]N\|_{L_2(G)} + \|\widehat{S}_{kT}(T_2, N_1 - N_2)T\|_{L_2(G)} \\ &\leq \widetilde{\widetilde{C}}_k \|T_1 - T_2\|_{L_2(G; \alpha)} \|N\|_{L_2(G \times V)} + \widetilde{\widetilde{C}}_k \|N_1 - N_2\|_{L_2(G \times V)} \|T\|_{L_2(G; \alpha)} \\ &\quad + \widetilde{\widetilde{C}}_k(R) \|T_1 - T_2\|_{L_2(G; \alpha)} \|T\|_{L_2(G; \alpha)}.\end{aligned}$$

Используя неравенство Гёльдера, находим: $\|\widehat{W}_k\|_{L_2(G)} \leq C'_k(R)\|\Phi_1 - \Phi_2\|_{\mathcal{H}}\|\Phi\|_{\mathcal{H}}$, $k = 1, \dots, M$. Аналогичным образом можно показать, что

$$\begin{aligned}\|\widehat{W}_0\|_{L_2(G \times V)} &\leq C'_0(R)\|\Phi_1 - \Phi_2\|_{\mathcal{H}}\|\Phi\|_{\mathcal{H}}, \\ \|\widehat{W}_{M+1}\|_{L_2(G \times V)} &\leq C'_{M+1}(R)\|\Phi_1 - \Phi_2\|_{\mathcal{H}}\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

где $C'_k(R) = \text{const} < \infty$, $k = 1, \dots, M, M+1$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\|\widehat{W}\|_{\mathcal{H}} &= \left\{ \sum_{k=0}^{M+1} \|W_k\|^2 \right\}^{1/2} \leq \left\{ \sum_{k=0}^{M+1} (C'_k(R))^2 \right\}^{1/2} \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{\mathcal{H}}\|\Phi\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq C_3(R)\|\Phi_1 - \Phi_2\|_{\mathcal{H}}\|\Phi\|_{\mathcal{H}}, \quad C_3(R) = \text{const} < \infty.\end{aligned}$$

Это означает, что производная Фреше $\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi)$ оператора $\widehat{F}(\Phi)$ липшицево непрерывна по Φ и справедлива оценка

$$\|\widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_1) - \widehat{F}'_{\Phi}(\Phi_2)\|_{B(\mathcal{H})} \leq c_3(R)\|\Phi_1 - \Phi_2\|_{\mathcal{H}}\|\Phi\|_{\mathcal{H}}.$$

(v) Если оператор $\widehat{F}(\Phi)$ включает в себя посторонний источник $Q_0(x, v, t)$, т.е. оператор имеет вид $\widehat{F}(\Phi; t)$, то его дифференцируемость по t следует из дифференцируемости по t функции источника $Q_0(x, v, t)$. При этом ясно, что $\widehat{F}'_t(t) = \text{col}\{Q'_0(x, v, t), 0, \dots, 0\}$ и $\|\widehat{F}'_t(t)\|_{\mathcal{H}} = \|Q'_0(x, v, t)\|_{L_2(G \times V)} = q(t)$. Тем самым лемма 7 установлена полностью.

Леммы 7 и 8 показывают, что АЗК (28) удовлетворяет условиям теоремы 1 и следствия 3, в результате чего находим, что АЗК (28) имеет единственное глобальное решение для всех $\Phi_0 \in D(\widehat{A})$.

ТЕОРЕМА 2. В условиях 1, 2, А для любых начальных данных $\Phi_0 \in D(\widehat{A})$ существует единственное сильное глобальное решение задачи (1)–(4) (АЗК (28)) $\Phi(t) \in \mathcal{H}\{[0, \infty)\}$. При этом для любого компакта $\Delta \subset [0, \infty)$, $\Delta \subset [0, a)$, справедлива оценка

$$\|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}(\Delta)} \leq k(c_1, a)\{\|\Phi_0\|_{\mathcal{H}} + \|\widehat{A}\Phi_0\|_{\mathcal{H}}\}, \quad k(c_1, a) = \text{const} < \infty. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было отмечено выше, существование сильного глобального решения системы (1)–(4) (задачи Коши (28)) $\Phi(t) \in \mathcal{H}\{[0, \infty)\}$ вытекает из следствия 3. Осталось установить оценку (35). Пусть $\Delta = [0, a] \subset [0, \infty)$. Согласно лемме 7 оператор $\widehat{A}$ задачи Коши (28) порождает сильно непрерывную C_0 -полугруппу сжимающих операторов $\widehat{U}_t(\widehat{A})$, $t > 0$. Поэтому решение задачи (28) можно представить в виде

$$\Phi(t) = \widehat{U}_t(\widehat{A})\Phi_0 + \int_0^t d\tau \widehat{U}_{t-\tau}(\widehat{A})\widehat{F}(\Phi(\tau)). \quad (36)$$

Из (36), используя известные свойства полугруппы $\widehat{U}_t(\widehat{A})$ [15], находим

$$\begin{aligned}\widehat{A}\Phi(t) &= \widehat{U}_t(\widehat{A})\widehat{A}\Phi_0 + \widehat{U}_t(\widehat{A})\widehat{F}(\Phi(0)) + \widehat{F}(\Phi(t)) + \int_0^t d\tau \widehat{U}_{t-\tau}(\widehat{A})\widehat{F}'_{\tau}(\Phi(\tau)), \\ \Phi'(t) &= \widehat{U}_t(\widehat{A})\widehat{A}\Phi_0 + \widehat{U}_t(\widehat{A})\widehat{F}(\Phi(0)) + \int_0^t d\tau \widehat{U}_{t-\tau}(\widehat{A})\widehat{F}'_{\tau}(\Phi(\tau)).\end{aligned} \quad (37)$$

Из (36) и (37), используя леммы 7 и 8, а также лемму Гронуолла–Беллмана, находим

$$\begin{aligned}\|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}} &\leq \{\|\Phi_0\|_{\mathcal{H}} + \sup_{t \in \Delta} \exp(c_1 t)\}, \\ \|\hat{A}\Phi(t)\|_{\mathcal{H}} &\leq \|\hat{A}\Phi_0\|_{\mathcal{H}} + (c_1 + c_1 \exp(c_1 t))\|\Phi_0\|_{\mathcal{H}} + q(0) + q(t) \\ &\quad + c_1 \exp(c_1 t) \sup_{t \in \Delta} q(t) + t \sup_{t \in \Delta} q_1(t), \\ \|\Phi'(t)\|_{\mathcal{H}} &\leq \|\hat{A}\Phi_0\|_{\mathcal{H}} + c_1 \|\Phi_0\|_{\mathcal{H}} + q(0) + t \sup_{t \in \Delta} q_1(t).\end{aligned}$$

Здесь $q(t) = \|Q_0(x, v, t)\|_{L_2(G \times V)}$; $q_1(t) = \|Q'_0(x, v, t)\|_{L_2(G \times V)}$. В этих оценках рассмотрен более общий случай исходной задачи (1)–(4), а именно: случай с внешним источником в правой части (1). При этом предполагается, что $Q_0(x, v, t) \in L_2(G \times V)$, $Q'_{0t}(x, v, t) \in L_2(G \times V)$.

Из этих оценок следует, что $(k_*(c_1, a) = \text{const} < \infty)$

$$\begin{aligned}\|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}(\Delta)} &= \sup_{t \in \Delta} \|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}} = \sup_{t \in \Delta} \{\|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}} + \|\hat{A}\Phi(t)\|_{\mathcal{H}} + \|\Phi'(t)\|_{\mathcal{H}}\} \\ &\leq 2c_1 + (c_1 + 1) \exp(c_1 a) \|\Phi_0\|_{\mathcal{H}} + 2\|\hat{A}\Phi_0\|_{\mathcal{H}} + 2q(0) \\ &\quad + [(1 + c_1) \exp(c_1, a) + 1] \sup_{t \in \Delta} q(t) + 2a \sup_{t \in \Delta} q_1(t) \\ &\leq k_*(c_1, a) \left\{ \|\Phi_0\|_{\mathcal{H}} + \|\hat{A}\Phi_0\|_{\mathcal{H}} + q(0) + \sup_{t \in \Delta} q(t) + 2a \sup_{t \in \Delta} q_1(t) \right\} \\ &\leq k_*(c_1, a) \left\{ \|\Phi_0\|_{\mathcal{H}} + \|\hat{A}\Phi_0\|_{\mathcal{H}} + q(0) + \sup_{t \in \Delta} q_1(t) \right\}.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Phi(t)$ – решение задачи (1)–(4), $\Phi_{0\varepsilon}(t)$ – решение аналогичной задачи (1)–(4), где вместо функций $|v|\Sigma_p^l(x, v; T)$, Φ_0 использованы функции $|v|\Sigma_{p\varepsilon}^l(x, v; T)$, $\Phi_{0\varepsilon}$, $p = s, f$; $l = 1, \dots, r$. Пусть также выполнены условия

$$\|\Phi_0\|_{D(\hat{A})} = \|\Phi_0\|_{\mathcal{H}} + \|\hat{A}\Phi_0\|_{\mathcal{H}} \leq R, \quad \|\Phi_{0\varepsilon}\|_{D(\hat{A})} \leq R, \quad R = \text{const} < \infty.$$

Тогда на любом компакте $\Delta = [0, a] \subset [0, \infty)$ и $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}\|\Phi_\varepsilon(t) - \Phi(t)\|_{\mathcal{H}(\Delta)} &\leq L_0 \left\{ \|(\Phi_{0\varepsilon}(t) - \Phi_0)_{D(\hat{A})}\| \right. \\ &\quad + \sum_{p=s, f} \sum_{l=1}^r [\| |v|\Sigma_{p\varepsilon}^l(x, v; T) - |v|\Sigma_p^l(x, v; T) \|_{L_2(G \times V)} \\ &\quad \left. + \| |v|\Sigma_{p\varepsilon, T}^l(x, v; T) - |v|\Sigma_{pT}^l(x, v; T) \|_{B(L_2(G; \alpha); L_2(G \times V))} \right\} \\ &\equiv k_0 \left\{ \|(\Phi_{0\varepsilon}(t) - \Phi_0)_{D(\hat{A})} + \hat{J}_\varepsilon(T)\| \right\},\end{aligned}\tag{38}$$

где

$$k_0 = k_0(R, c_1, \sigma_m, \sigma_M, \chi_0^l) = \text{const} > 0$$

и не зависит от Φ , Φ_ε , Φ_0 , $\Phi_{0\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Доказательство теоремы 3 проводится на основе применения оценки (35) к операторному уравнению

$$\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} = \widehat{A}\psi_\varepsilon(t) + \Phi_\varepsilon\psi_\varepsilon, \quad \psi_\varepsilon(t)|_{t=+0} = \Phi_{0\varepsilon} - \Phi_0 \in D(\widehat{A}),$$

где $\Phi_\varepsilon(\psi_\varepsilon(t)) = \widehat{F}_\varepsilon(\Phi - \psi_\varepsilon) - \widehat{F}(\Phi)$; $\psi_\varepsilon(t) = \Psi_\varepsilon(t) - \Psi(t)$; $\widehat{F}_\varepsilon(\Phi)$ соответствует оператору $\widehat{F}(\Phi)$ с измененными коэффициентами $|v|\Sigma_{p\varepsilon}^l(x, v; T)$.

Из теоремы 3 следует, что если $\|\Phi_{0\varepsilon} - \Phi_0\|_{D(\widehat{A})} \rightarrow 0$, $\widehat{J}_\varepsilon(T) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0 \quad \forall T \in L_2(G; \alpha)$, то в силу оценки (38) $\|\Phi_\varepsilon(t) - \Phi(t)\|_{\mathcal{H}(\Delta)} \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, имеет место устойчивость решения задачи (1)–(4) по возмущению коэффициентов и начальных условий системы (1). Тем самым установлено, что смешанная задача для системы (1)–(4) поставлена корректно (см. также [16], [6; гл. 2]).

5. Рассмотрим нелинейную интегро-дифференциальную задачу (1)–(4), считая выполненными условия 1, 2, В. Запишем исходную задачу в виде АЗК в пространстве $\mathcal{H}$:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \widehat{\mathcal{A}}\Phi(t) + \widehat{\mathcal{F}}(\Phi(t)), \quad t \in \Delta, \quad \Phi(t)|_{t=+0} = \Phi_0, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{A}} &= \widehat{\mathcal{A}}_1 + \widehat{\mathcal{B}}: D(\widehat{\mathcal{A}}) \rightarrow \mathcal{H}, \quad \widehat{A}_1 = \text{diag}\{-\widehat{L}_1, -z_1, \dots, -z_M, \widehat{\Lambda}\}, \\ D(\widehat{A}_1) &= D(\widehat{A}), \quad \widehat{L}_1 = \widehat{L} + |v|\Sigma(x, v), \quad \widehat{\mathcal{B}} = \{\widehat{\mathcal{B}}_{ij}\}_{i,j=0}^{M+1}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{B}}_{0,j} &= z_j f_j(v), \quad j = 1, \dots, M, \quad \widehat{\mathcal{B}}_{i0} = \widehat{S}_i, \quad i = 1, \dots, M, \\ \widehat{\mathcal{B}}_{00} &= \widehat{S}_s + \widehat{S}_f, \quad \widehat{\mathcal{B}}_{M+1,j} = \widehat{\mathcal{B}}_{i,M+1} = \widehat{0}, \quad i, j = 0, \dots, M+1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}}(\Phi(t)) &= \text{col}\{\widehat{\mathcal{F}}_0(\Phi), \widehat{\mathcal{F}}_1(\Phi), \dots, \widehat{\mathcal{F}}_{M+1}(\Phi)\}, \\ \widehat{\mathcal{F}}_0(\Phi) &= \widehat{D}_0(T)N + \sum_{p=s,f} \widehat{D}_p(T)N, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\widehat{\mathcal{F}}_k(\Phi) = \widehat{D}_k N, \quad k = 1, \dots, M, \quad \widehat{\mathcal{F}}_{M+1}(\Phi) = \alpha^{-1} \widehat{D}_{M+1}(\Phi)N.$$

Следующие две леммы устанавливаются с помощью лемм 3 и 4 аналогично тому, как были доказаны леммы 7 и 8.

ЛЕММА 9. Пусть выполнены условия 1, 2, В. Тогда

- (1) $\widehat{\mathcal{A}}_1, \widehat{\mathcal{A}} \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, $D(\widehat{\mathcal{A}}) = D(\widehat{\mathcal{A}}_1) = D(\widehat{A})$, $\overline{D(\widehat{\mathcal{A}})} = \overline{D(\widehat{\mathcal{A}}_1)} = \mathcal{H}$;
- (2) при $\text{Re } \lambda > -\rho_0$, $\rho_0 = \min\{\sigma_m, z_k, \mu_0; k = 1, \dots, M\}$ существует резольвента $R_\lambda(A_1)$, для которой справедлива оценка

$$\|R_\lambda(A_1)\|_{B(\mathcal{H})} \leq (\text{Re } \lambda + \rho_0)^{-1}, \quad k = 1, \dots, M; \quad (42)$$

- (3) при $\text{Re } \lambda > -\rho_0 + \|\widehat{\mathcal{B}}\|_{B(\mathcal{H})}$ существует резольвента

$$R_\lambda(\widehat{\mathcal{A}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \{R_\lambda(A_1)\widehat{\mathcal{B}}\}^n R_\lambda(A_1),$$

для которой справедлива оценка

$$\|R_\lambda(\widehat{\mathcal{A}})\|_{B(\mathcal{H})} \leq (\text{Re } \lambda + \rho_0 - \|\widehat{\mathcal{B}}\|_{B(\mathcal{H})})^{-1}; \quad (43)$$

- (4) Операторы $\widehat{A}_1$ и $\widehat{\mathcal{A}}$ являются производящими операторами C_0 -полугруппы линейных положительных операторов $\widehat{\mathcal{U}}_t(\widehat{A}_1)$, $\widehat{\mathcal{U}}_t(\widehat{\mathcal{A}})$, $t > 0$, соответственно, причем

$$\|\widehat{\mathcal{U}}_t(\widehat{A}_1)\| \leq \exp(-\rho_0 t), \quad \|\widehat{\mathcal{U}}_t(\widehat{\mathcal{A}})\|_{B(\mathcal{H})} \leq \exp[-(\rho_0 - \|\widehat{\mathcal{B}}\|)t]. \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, с учетом следствия 1 легко заметить, что оператор $\widehat{A}$ удовлетворяет лемме 1 и для его резольвенты при $\operatorname{Re} \lambda > -\rho_0$ справедлива оценка (42). Из (42) согласно теореме Хилле–Иосида–Филлипса [15] следует, что оператор $\widehat{A}$ является производящим оператором C_0 -полугруппы сжимающих операторов $\widehat{\mathcal{U}}_t(\widehat{A}_1)$, $t > 0$, с оценкой $\|\widehat{\mathcal{U}}_t(\widehat{A}_1)\|_{B(\mathcal{H})} \leq \exp(-\rho_0 t)$. Поскольку резольвента

$$\widehat{R}_\lambda(\widehat{A}_1) = \operatorname{diag}\{\widehat{R}_\lambda(-\widehat{L}_1), (\lambda + z_1)^{-1}, \dots, (\lambda + z_M)^{-1}, \widehat{R}_\lambda(-\widehat{\Lambda})\}$$

положительна при достаточно больших положительных λ (см. свойства резольвент $\widehat{R}_\lambda(-\widehat{L}_1)$, $\widehat{R}_\lambda(-\widehat{\Lambda})$), то согласно критерию положительности C_0 -полугруппы полугруппа $\widehat{\mathcal{U}}_t(\widehat{A}_1)$ положительна, т.е. $\widehat{\mathcal{U}}_t(\widehat{A}_1)\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $t > 0$.

Из условий леммы и свойств операторов $\widehat{S}_p$, $p = s, f$; $\widehat{S}_k$, $k = 1, \dots, M$; $\widehat{S}_{M+1}$ (см. п. 3) следует, что линейный оператор $\widehat{\mathcal{B}}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ вида (40) ограничен и положителен. Поэтому оператор $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}_1 + \widehat{\mathcal{B}} \subset C(\mathcal{H})$ и $D(\widehat{\mathcal{A}}) = D(\widehat{A}_1) = D(\widehat{A})$ есть возмущение оператора $\widehat{A}_1 \in C(\mathcal{H})$ ограниченным оператором $\widehat{\mathcal{B}} \in B(\mathcal{H})$. Рассмотрим оператор $\lambda\widehat{I} - \widehat{\mathcal{A}}$. При $\operatorname{Re} \lambda > -\rho_0$ можно записать

$$\lambda\widehat{I} - \widehat{\mathcal{A}} = \lambda\widehat{I} - (\widehat{A}_1 + \widehat{\mathcal{B}}) = (\lambda\widehat{I} - \widehat{A}_1)(\widehat{I} - \widehat{R}_\lambda(\widehat{A}_1)\widehat{\mathcal{B}}).$$

Поскольку при $\operatorname{Re} \lambda < -\rho_0 + \|\widehat{\mathcal{B}}\|_{B(\mathcal{H})}$ справедлива оценка

$$\|\widehat{R}_\lambda(\widehat{A}_1)\widehat{\mathcal{B}}\|_{B(\mathcal{H})} \leq \|\widehat{\mathcal{B}}\|_{B(\mathcal{H})}(\operatorname{Re} \lambda + \rho_0)^{-1} < 1,$$

при таких λ оператор $\widehat{I} - \widehat{R}_\lambda(\widehat{A}_1)\widehat{\mathcal{B}}$ обратим, значит при $\operatorname{Re} \lambda < -\rho_0 + \|\widehat{\mathcal{B}}\|_{B(\mathcal{H})}$ существует резольвента

$$\widehat{R}_\lambda(\widehat{\mathcal{A}}) = (\widehat{I} - \widehat{R}_\lambda(\widehat{A}_1)\widehat{\mathcal{B}})^{-1}\widehat{R}_\lambda(\widehat{A}_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\widehat{R}_\lambda(\widehat{A}_1)\widehat{\mathcal{B}}\}^n \widehat{R}_\lambda(\widehat{A}_1), \quad (45)$$

для которой справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\widehat{R}_\lambda(\widehat{\mathcal{A}})\|_{B(\mathcal{H})} &\leq \|\widehat{R}_\lambda(\widehat{A}_1)\| [1 - \|\widehat{R}_\lambda(\widehat{\mathcal{A}})\widehat{\mathcal{B}}\|]^{-1} \\ &\leq (\operatorname{Re} \lambda + \rho_0)^{-1} [1 - \|\widehat{\mathcal{B}}\|(\operatorname{Re} \lambda + \rho_0)^{-1}]^{-1} \leq (\operatorname{Re} \lambda + \rho_0 - \|\widehat{\mathcal{B}}\|)^{-1}. \end{aligned}$$

Из этой оценки также с помощью теоремы Хилле–Иосида–Филлипса [15] находим, что оператор $\widehat{A}$ является производящим оператором C_0 -полугруппы $\widehat{\mathcal{U}}_t(\widehat{A}_1)$, $t > 0$, с оценкой (44). Из представления (45) и положительности оператора $\widehat{\mathcal{B}}$ и резольвенты $\widehat{R}_\lambda(\widehat{A})$ следует положительность резольвенты $\widehat{R}_\lambda(\widehat{\mathcal{A}})$ при достаточно больших действительных λ . Отсюда вытекает положительность C_0 -полугруппы $\widehat{\mathcal{U}}_t(\widehat{\mathcal{A}})$, $\widehat{\mathcal{U}}_t(\widehat{\mathcal{A}})\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $t > 0$.

ЛЕММА 10. Пусть выполнены условия 1, 2, В. Тогда нелинейный оператор

$$\widehat{\mathcal{F}}(\Phi(t)): \mathcal{H} \times \Delta \rightarrow \mathcal{H}$$

непрерывен по совокупности переменных и обладает сильно непрерывной производной Фреше $\widehat{\mathcal{F}}_\Phi(\Phi_0)$, ограниченной и липшицевой в каждом шаре $S_R(\Phi_0)$ для всех $\Phi_1, \Phi_2 \in S_R(\Phi_0)$; $k_1, k_2(R), k_3(R) = \text{const} < \infty$:

$$\|\widehat{\mathcal{F}}(\Phi(t); t)\|_{\mathcal{H}} \leq k_1 \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2 + q(t), \quad (46)$$

$$\|\widehat{\mathcal{F}}_t(t)\|_{\mathcal{H}} \leq q_1(t) \leq q_2(\Delta), \quad \|\widehat{\mathcal{F}}_\Phi(\Phi)\|_{B(\mathcal{H})} \leq k_2(R), \quad (47)$$

$$\|\widehat{\mathcal{F}}_\Phi(\Phi_1) - \widehat{\mathcal{F}}_\Phi(\Phi_2)\|_{B(\mathcal{H})} \leq k_3(R) \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{\mathcal{H}}. \quad (48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (46) следует из представления (41) для оператора $\widehat{\mathcal{F}}(\Phi(t); t)$ (в случае, если в него входит источник $Q_0(x, v, t)$) и оценки леммы 6. Покажем, что $\widehat{\mathcal{F}}(\Phi(t); t)$ – непрерывный в $\mathcal{H}$ оператор. Рассмотрим

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathcal{F}}(\Phi_1(t); t) - \widehat{\mathcal{F}}(\Phi_2(t); t) \\ & \equiv \Delta \widehat{\mathcal{F}} = \text{col}\{(\Delta \widehat{\mathcal{F}})_0, (\Delta \widehat{\mathcal{F}})_1, \dots, (\Delta \widehat{\mathcal{F}})_{M+1}\} \quad \forall \Phi_i \in \mathcal{H}, \quad i = 1, 2; \end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned} (\Delta \widehat{\mathcal{F}})_0 &= -\widehat{D}_0(T_1 - T_2)N_1 - \widehat{D}_0(T_2)(N_1 - N_2) \\ & \quad + \sum_{p=s,f} \widehat{D}_p(T_1 - T_2)N_1 + \sum_{p=s,f} \widehat{D}_p(T_2)(N_1 - N_2), \\ (\Delta \widehat{\mathcal{F}})_k &= \widehat{D}_k(T_1 - T_2)N_1 + \widehat{D}_k(T_2)(N_1 - N_2), \quad k = 1, \dots, M, \\ (\Delta \widehat{\mathcal{F}})_{M+1} &= (\alpha(x))^{-1} \{\widehat{D}_{M+1}(T_1 - T_2)N_1 + \widehat{D}_{M+1}(T_2)(N_1 - N_2)\}. \end{aligned}$$

С помощью оценок (15) можно найти

$$\begin{aligned} \|(\Delta \widehat{\mathcal{F}})_K\|_{l_2(G)} &\leq d_k \|T_1 - T_2\|_{L_2(G;\alpha)} \| (N_1\|_{L_2(G \times V)} + d_k \|T_2\|_{L_2(G;\alpha)} \|N_1 - N_2\|_{L_2(G \times V)}) \\ &\leq C_k(d_k, \|T_2\|, \|N_1\|) \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{\mathcal{H}}, \quad k = 1, \dots, M, \\ \|(\Delta \widehat{\mathcal{F}})_{M+1}\|_{l_2(G;\alpha)} &\leq \frac{d_{M+1}}{\sqrt{\alpha_m}} \|T_1 - T_2\|_{L_2(G;\alpha)} \| (N_1\|_{L_2(G \times V)}) \\ & \quad + \frac{d_{M+1}}{\sqrt{\alpha_m}} \|T_2\|_{L_2(G;\alpha)} \|N_1 - N_2\|_{L_2(G \times V)} \\ &\leq C_{M+1}(d_{M+1}, \|T_2\|, \|N_1\|) \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{\mathcal{H}}, \\ & \quad C_k(d_0, d_p, d_k, \|T_2\|, \|N_1\|), \quad k = 0, 1, \dots, M + 1. \end{aligned}$$

Из этих оценок следует, что

$$\|\widehat{\mathcal{F}}(\Phi_1(t); t) - \widehat{\mathcal{F}}(\Phi_2(t); t)\|_{\mathcal{H}} = \|\Delta \widehat{\mathcal{F}}\|_{\mathcal{H}} \leq \text{const}(\|N_1\|, \|T_2\|) \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{\mathcal{H}},$$

т.е. оператор $\widehat{\mathcal{F}}(\Phi(t); t)$ непрерывен по Φ .

Непрерывность оператора $\widehat{\mathcal{F}}(\Phi_1(t); t)$ по t следует из непрерывности по t функции источника $Q_0(x, v, t)$. С помощью леммы 6 нетрудно показать, что оператор $\widehat{\mathcal{F}}'_\Phi(\Phi_*)$

вида $\widehat{\mathcal{F}}'_\Phi(\Phi_*)\Delta\Phi = \text{col}\{(\widehat{\mathcal{F}}'_\Phi(\Phi_*)\Delta\Phi)_0, (\widehat{\mathcal{F}}'_\Phi(\Phi_*)\Delta\Phi)_1, \dots, (\widehat{\mathcal{F}}'_\Phi(\Phi_*)\Delta\Phi)_{M+1}\}$, где

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathcal{F}}'_\Phi(\Phi_*)\Delta\Phi)_0 &= -\widehat{D}_0(T_*)\Delta N - \widehat{D}_0(\Delta T)N_* + \sum_{p=s,f} \{\widehat{D}_p(T_*)\Delta N + \widehat{D}_p(\Delta T)N_*\}, \\ (\widehat{\mathcal{F}}'_\Phi(\Phi_*)\Delta\Phi)_k &= \widehat{D}_k(T_*)\Delta N + \widehat{D}_k(\Delta T)N_*, \quad k = 1, \dots, M, \\ (\widehat{\mathcal{F}}'_\Phi(\Phi_*)\Delta\Phi)_{M+1} &= (\alpha(x))^{-1} \{\widehat{D}_{M+1}(T_*)\Delta N + \widehat{D}_{M+1}(\Delta T)N_*\}, \end{aligned} \quad (49)$$

является производной Фреше оператора $\widehat{\mathcal{F}}(\Phi(t); t)$ в точке $\Phi_* \in \mathcal{H}$. При этом из (49) и леммы 6 следует, что оператор $\widehat{\mathcal{F}}'_\Phi(\Phi)$ ограничен в каждом шаре $S_R(\Phi_0)$ и справедлива оценка (47). Липшицева непрерывность производной $\widehat{\mathcal{F}}'_\Phi(\Phi_*)$ в $S_R(\Phi_0)$ устанавливается аналогично оценке (31) в лемме 8.

Леммы 9 и 10 говорят о том, что операторы $\widehat{\mathcal{A}}$ и $\widehat{\mathcal{F}}(\Phi(t); t)$ задачи Коши (39) удовлетворяют всем условиям теоремы 1 и справедлива

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия 1, 2, В. Тогда $\forall \Phi_0 \in D(\widehat{\mathcal{A}})$ существует единственное решение АЗК (39) (задачи (1)–(4)) на максимальном интервале $[0, t_M(\Phi_0))$ такое, что $\Phi(t) \in \mathcal{H}\{[0, t_M(\Phi_0))\}$. При этом, если $t_M(\Phi_0) < \infty$, то

$$\lim_{t \rightarrow t_M(\Phi_0) - 0} \|\Phi(t)\| = +\infty. \quad (50)$$

Из теоремы 4 вытекает, что если в условиях 1, 2, А глобальное решение задачи (1)–(4) существует $\forall \Phi_0 \in D(\widehat{\mathcal{A}})$ (см. п. 2), то в условиях 1, 2, В глобальное решение системы (1)–(4) уже может не существовать. При этом оно существует на $[0, t_M(\Phi))$ и не продолжимо. Такое решение называется *непродолжимым* в отличие от *локального*, которое существует на компакте $[0, h]$ и может быть продолжено на более широкий интервал.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 4 не исключает возможности того, что уход на бесконечность решения задачи (1)–(4) по норме $\|\cdot\|$ при $t \rightarrow t_M(\Phi_0) - 0$ может происходить за счет ухудшения дифференциальных свойств (по пространственным переменным), т.е. из-за потери гладкости решения. В то же время норма $\|\cdot\|$ самого решения может оставаться конечной (градиентная катастрофа). Можно показать, что для задачи (1)–(4) такой сценарий невозможен.

Действительно, пусть

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow [t_M(\Phi_0) - 0]} \|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Используя условия 1, 2, В, найдем, что для любых $t \in [0, t_M(\Phi_0))$ для оператора $\widehat{\mathcal{F}}(\Phi(t); t)$ справедлива оценка

$$\|\widehat{\mathcal{F}}(\Phi(t); t)\|_{\mathcal{H}} \leq C(R_1)\|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}} + q(t), \quad C(R) < \infty.$$

Из этой оценки с помощью формулы (37) находим, что для любых $t \in [0, t_M(\Phi_0))$ будет верна оценка $\|\widehat{\mathcal{A}}\Phi(t)\|_{\mathcal{H}} \leq R_2$, $\|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}} \leq R_3 < \infty$. Следовательно,

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow [t_M(\Phi_0) - 0]} \|\widehat{\mathcal{A}}\Phi(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow [t_M(\Phi_0) - 0]} \|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Таким образом, соотношение (50) имеет место лишь тогда, когда

$$\lim_{t \rightarrow [t_M(\Phi(0)) - 0)} \|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}} \leq +\infty.$$

Рассмотрим случай, когда глобальное решение задачи (1)–(4) в условиях 1, 2, В существует. Справедлива

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены условия 1, 2, В, $Q_0(x, v, t) \equiv 0$; кроме того, пусть полугруппа $\widehat{\mathcal{U}}_t(\widehat{\mathcal{A}})$, $t > 0$, порождаемая оператором $\widehat{\mathcal{A}}$ АЗК (39), является полугруппой отрицательного типа, т.е.

$$\|\widehat{\mathcal{U}}_t(\widehat{\mathcal{A}})\|_{B(\mathcal{H})} \leq \exp(-pt), \quad p > 0. \quad (51)$$

Тогда существует $R = \text{const} > 0$ такое, что если $\Phi_0 \in D(\widehat{\mathcal{A}}) \cap S_R(\Phi_0)$, то АЗК (39) (задача (1)–(4)) имеет единственное глобальное решение $\Phi(t) \in \mathcal{H}\{[0, \infty)\}$ и справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}} &\leq a(\|\Phi_0\|_{\mathcal{H}}, p) \exp(-pt) \{1 + b(\|\Phi_0\|_{\mathcal{H}}, p) \exp(-pt)\}^{-1}, \\ t &\geq 0, \quad a, b = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (52)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 10 оператор $\widehat{\mathcal{F}}(\Phi(t); t)$ удовлетворяет оценке (46). С учетом оценки (51) и $q(t) \equiv 0$, применяя следствие 3, находим, что АЗК (39) имеет глобальное решение $\Phi(t) \in \mathcal{H}\{[0, \infty)\}$ для любых $\Phi_0 \in D(\widehat{\mathcal{A}}) \cap S_R(\Phi_0)$, где $R > 0$ – достаточно малая постоянная. Это решение можно представить в виде

$$\Phi(t) = \widehat{\mathcal{U}}_t(\widehat{\mathcal{A}})\Phi_0 + \int_0^t d\tau \widehat{\mathcal{U}}_{t-\tau}(\widehat{\mathcal{A}}) \widehat{\mathcal{F}}(\Phi(t); \tau). \quad (53)$$

С помощью оценок (46) и (51) из представления (53) находим

$$\|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}} = \exp(-pt) \|\Phi_0\|_{\mathcal{H}} + \int_0^t d\tau \exp[-p(t-\tau)] k_1 \|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Можно показать, что $\|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \psi(t)$, где $\psi(t)$ – решение интегрального уравнения

$$\psi(t) = \exp(-pt) \|\Phi_0\|_{\mathcal{H}} + k_1 \int_0^t d\tau \exp[-p(t-\tau)] \psi^2(\tau). \quad (54)$$

Легко убедиться, что решением уравнения (54) является функция

$$\psi(t) = a(\|\Phi_0\|_{\mathcal{H}}, p) \exp(-pt) + \{1 + b(\|\Phi_0\|_{\mathcal{H}}, p) \exp(-pt)\}^{-1},$$

где

$$a(\|\Phi_0\|_{\mathcal{H}}, p) = \frac{p \|\Phi_0\|_{\mathcal{H}}}{p + k_1 \|\Phi_0\|_{\mathcal{H}}}, \quad b(\|\Phi_0\|_{\mathcal{H}}, p) = \frac{k_1 \|\Phi_0\|_{\mathcal{H}}}{p + \|\Phi_0\|_{\mathcal{H}}}.$$

Итак, для всех Φ_0 таких, что $\|\Phi_0\|_{\mathcal{H}} \leq R \leq p/k_1$, справедлива оценка (52).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. Кейз, П. Цвайфель, *Линейная теория переноса*, Мир, М., 1972.
- [2] В. С. Владимиров, “Математические задачи односкоростной теории переноса частиц”, Тр. МИАН СССР, **61**, Изд-во АН СССР, М., 1961, 3–158.
- [3] Ю. И. Ершов, С. Б. Шихов, *Математические основы теории переноса*, т. 1: *Основы теории*; т. 2: *Приложения к физике реакторов*, Энергоатомиздат, М., 1985.
- [4] С. Б. Шихов, *Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ*, Атомиздат, М., 1973.
- [5] А. В. Крянев, С. Б. Шихов, *Вопросы математической теории реакторов. Нелинейный анализ*, Энергоиздат, М., 1983.
- [6] Р. С. Макин, *Нелинейные задачи теории переноса (газокинетическая теория)*, УлГТУ, ДИТУД, Ульяновск, 2006.
- [7] Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов, *Современные проблемы нелинейной динамики*, Едиториал УРСС, М., 2002.
- [8] Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс, *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей*, Современная математика, ИКИ, М.–Ижевск, 2002.
- [9] Я. Б. Песин, “Эргодическая теория гладких динамических систем. Гл. 7. Общая теория гладких гиперболических динамических систем”, *Динамические системы – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **2**, ВИНТИ, М., 1985, 123–173.
- [10] М. А. Красносельский, *Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа*, ГИФМЛ, М., 1962.
- [11] М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, П. Е. Соболевский, “О дифференциальных уравнениях с неограниченными операторами в банаховых пространствах”, *Докл. АН СССР*, **111**:1 (1956), 19–22.
- [12] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [13] Е. Ф. Сабаев, *Системы сравнения для нелинейных дифференциальных уравнений и их приложения в динамике реакторов*, Атомиздат, М., 1980.
- [14] А. Н. Филатов, Л. В. Шарова, *Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний*, Наука, М., 1976.
- [15] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.
- [16] Ю. А. Кузнецов, В. В. Пашков, “Об одной нелинейной интегро-дифференциальной системе уравнений кинетики реакторов”, *Дифференц. уравнения*, **16**:12 (1980), 2230–2246.

Р. С. Макин

Филиал Ульяновского государственного университета

в г. Димитровграде

E-mail: rmak@sai-net.ru

Поступило

06.02.2008