Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Дымченко, Равенство емкости и модуля конденсатора в финслеровых пространствах, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 4, 594–602

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4512>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 15:30:56

Равенство емкости и модуля конденсатора в финслеровых пространствах

Ю. В. Дымченко

Равенство емкости и модуля имеет важное значение в геометрической теории функций. Оно позволяет связать теоретико-функциональные и геометрические свойства множеств. Частные случаи равенства доказывались Л. Альфорсом и А. Бёрлингом, Б. Фюгледе, В. Цимером, Дж. Хессе. Для случая евклидовой метрики равенство емкости и модуля было доказано В. А. Шлыком. При этом существенно был использован результат В. В. Асеева о полноте системы непрерывных допустимых функций.

Финслеровы пространства были введены как обобщение римановых многообразий на случай, когда метрика зависит не только от координат, но и от направления.

В данной работе доказывается равенство емкости и модуля конденсатора в финслеровых пространствах в самых общих предположениях. Этот результат позволит распространить многие результаты для лебеговских функциональных пространств на случай функциональных пространств с финслеровой метрикой.

Библиография: 9 названий.

Равенство емкости и модуля имеет важное значение в геометрической теории функций. Оно позволяет связать теоретико-функциональные и геометрические свойства множеств. Для некоторых частных случаев равенство было доказано Альфорсом и Бёрлингом в работе [1]. Затем этот результат был улучшен в работах Фюгледе [2] и Цимера [3]. Хессе [4] распространил этот результат на p -емкость и p -модуль для случая, когда пластины конденсатора не пересекаются с границей области. Для случая евклидовой метрики равенство емкости и модуля в самых общих предположениях было доказано Шлыком [5]. При этом существенно был использован результат Асеева [6] о полноте системы непрерывных допустимых функций.

Финслеровы пространства были введены как обобщение римановых многообразий на случай, когда метрика зависит не только от координат, но и от направления.

В данной работе доказывается равенство емкости и модуля конденсатора в финслеровых пространствах в самых общих предположениях. Этот результат позволит распространить многие результаты для лебеговских функциональных пространств на случай функциональных пространств с финслеровой метрикой.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-2008).

Пусть G – область в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, $d(x, y)$ – расстояние между двумя точками, $K \subset \overline{G}$ – замкнутое множество и

$$\Phi(x, \xi): (\overline{G} \setminus K) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$$

– функция, дважды непрерывно дифференцируемая по $\xi \in \mathbb{R}^n$ при любом $x \in \overline{G} \setminus K$, у которой частные производные по ξ до второго порядка включительно непрерывны на $(\overline{G} \setminus K) \times \mathbb{R}^n$ и которая удовлетворяет условиям:

- 1) для любого $a > 0$ выполнено $\Phi(x, a\xi) = a\Phi(x, \xi)$ и $\Phi(x, \xi) > 0$ при $\xi \neq 0$;
- 2) для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x, \xi)\xi_i\xi_j$ положительно определена, где

$$g_{ij}(x, \xi) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi^2(x, \xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

– непрерывные функции по x и ξ .

Функция $\Phi(x, \xi)$, удовлетворяющая этим условиям, задает структуру финслерова многообразия [7; гл. 1, § 1].

Пусть $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ – непрерывная выпуклая функция такая, что для любых $a, t > 0$ выполняется неравенство

$$\varphi(at) \leq a^p \varphi(t), \quad (1)$$

где p не зависит от a и t .

Если γ – направленная открытая локально спрямляемая кривая в G (т.е. у кривой выделены начало и конец, которые ей не принадлежат), то направленной открытой локально спрямляемой составной кривой будем называть множество $\gamma \setminus K$. Заметим, что множество $\gamma^{-1}(G \setminus K)$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^1$, поэтому $\gamma \setminus K$ состоит не более чем из счетного числа направленных открытых кривых. Определим интеграл по $\gamma \setminus K$ как сумму интегралов по всем составляющим кривым.

Обозначим

$$H(x, \eta) = \sup_{\xi} (\xi, \eta),$$

где супремум берется по всем ξ таким, что $\Phi(x, \xi) \leq 1$. Заметим, что функция $H(x, \eta)$ обладает такими же свойствами, что и $\Phi(x, \xi)$ (см. [7; гл. 1, § 4]).

Определим *объем* согласно [7; гл. 1, § 8]. Пусть $\xi = \xi(x)$ – непрерывное векторное поле в $\overline{G} \setminus (K \cup \{\infty\})$, $g(x, \xi) = \det(g_{ij}(x, \xi))$, $d\sigma = \sqrt{g(x, \xi)} dx$ – элемент объема.

Длину кривой определим посредством элемента длины $ds_{\Phi} = \Phi(x, dx)$.

Составная кривая γ' соединяет множества A и B , если какое-либо параметрическое представление $x(t)$, $t_0 < t < t_1$, соответствующей кривой γ удовлетворяет условиям

$$\liminf_{t \rightarrow t_0} d_s(x(t), A) = 0, \quad \liminf_{t \rightarrow t_1} d_s(x(t), B) = 0,$$

где d_s – сферическое расстояние в $\mathbb{R}^n$.

Для простоты изложения в дальнейшем под словом “кривая” будем понимать направленную открытую локально спрямляемую составную кривую.

Пусть $E_0, E_1 \subset \overline{G}$ – замкнутые непересекающиеся множества в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $K \subset G$ – ограниченное замкнутое относительно $\mathbb{R}^n \setminus (E_0 \cup E_1)$ множество, не имеющее компонент с предельными точками на $E_0 \cup E_1$. Упорядоченную четверку множеств (E_0, E_1, K, G) назовем *конденсатором*.

Определим модуль конденсатора (E_0, E_1, K, G) с помощью равенства

$$M_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G) = \inf \int_G \varphi(\rho) d\sigma,$$

где инфимум берется по всем неотрицательным борелевским функциям ρ , равным нулю в некоторой окрестности каждой компоненты множества K , для которых выполняется неравенство

$$\int_{\gamma} \rho \Phi(x, dx) \geq 1$$

для любой кривой γ , соединяющей E_0 и E_1 в G . Такие функции будем называть *допустимыми* для $M_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G)$.

Вещественная функция $u(x)$, заданная в G , называется *допустимой для емкости конденсатора* (E_0, E_1, K, G) , если она непрерывна в G , локально липшицева в $G \setminus \{\infty\}$, для любых точек $x_0 \in E_0 \cap \overline{G}$, $x_1 \in E_1 \cap \overline{G}$ выполняется

$$\limsup_{G \ni x \rightarrow x_0} u(x) \leq 0, \quad \liminf_{G \ni x \rightarrow x_1} u(x) \geq 1$$

и $u(x)$ постоянна в некоторой окрестности любой компоненты множества K .

Емкость конденсатора (E_0, E_1, K, G) определим следующим образом:

$$C_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G) = \inf \int_G \varphi(H(x, \nabla u)) d\sigma,$$

где инфимум берется по допустимым функциям u .

Пусть $0 < \varepsilon < 1/2$, $S = \{\zeta \in \mathbb{R}^n : 1/2 \leq |\zeta| \leq 3/2\}$, D_k , $k = 1, 2, \dots$, – открытые множества, образующие исчерпание изнутри множества $G \setminus (K \cup \{\infty\} \cup E_0 \cup E_1)$, т.е.

$$\overline{D}_k \subset D_{k+1}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = G \setminus (K \cup \{\infty\} \cup E_0 \cup E_1).$$

Функции

$$\log \Phi(x, \zeta), \quad \log \sqrt{g(x, \xi(x))}$$

равномерно непрерывны соответственно в $\overline{D}_k \times S$, $\overline{D}_k$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует δ_k такое, что при $x', x'' \in D_k$ таких, что $|x' - x''| < \delta_k$, и $\zeta', \zeta'' \in S$ таких, что $|\zeta' - \zeta''| < \delta_k$, выполняются неравенства

$$(1 + \varepsilon)^{-1} < \frac{\Phi(x', \zeta')}{\Phi(x'', \zeta'')} < 1 + \varepsilon, \quad (1 + \varepsilon)^{-1} < \sqrt{\frac{g(x', \xi(x'))}{g(x'', \xi(x''))}} < 1 + \varepsilon.$$

Кроме того, можно считать, что $\delta_k \downarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Пусть $d_k = d(\partial D_k, \partial D_{k+1})$, $k \geq 1$. Для единообразия рассуждений положим $d_0 = \delta_0 = \infty$, $D_0 = D_{-1} = \emptyset$.

ЛЕММА 1. *Существует функция $\alpha_\varepsilon(x) \in C^\infty(G \setminus (K \cup \{\infty\} \cup E_0 \cup E_1))$, удовлетворяющая условиям*

- 1) $0 < \alpha_\varepsilon(x) < 1$, $\alpha_\varepsilon(x) < d(x, \partial G \cup E_0 \cup E_1)$, $|\nabla \alpha_\varepsilon(x)| < \varepsilon$, если $x \in G \setminus (K \cup \{\infty\} \cup E_0 \cup E_1)$;
- 2) $\alpha_\varepsilon(x) < \min(d_k, \delta_{k+1})$, $|\nabla \alpha_\varepsilon(x)| < \delta_{k+1}$, если $x \in D_k \setminus D_{k-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$a_k = \min\{1, d_k, \delta_{k+1}\}, \quad b_k = \min\{1, \delta_{k+1}, \varepsilon\}.$$

Существует $\beta_k(x) \in C^\infty(G)$ такая, что $\beta_k \geq 0$ в G , $\beta_k > 0$ в $D_k \setminus D_{k-1}$ и $\beta_k = 0$ на $(G \setminus D_{k+1}) \cup D_{k-2}$. Умножая на константу, можно считать, что

$$\begin{aligned} \beta_k &< \frac{1}{3} \min\{a_{k-1}, a_k, a_{k+1}\}, & |\nabla \beta_k| &< \frac{1}{3} \min\{b_{k-1}, b_k, b_{k+1}\}, \\ 3\beta_k &< d(x, \partial G \cup E_0 \cup E_1), & \text{если } x &\in D_{k+1} \setminus D_{k-2}. \end{aligned}$$

Тогда функция $\alpha_\varepsilon(x) = \sum_k \beta_k(x)$ удовлетворяет условиям леммы.

ЛЕММА 2. Если $M_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G) < \infty$, то

$$M_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G) = \inf \int_G \varphi(\rho) d\sigma,$$

где инфимум берется по допустимым функциям, непрерывным в $G \setminus (K \cup \{\infty\}) \cup E_0 \cup E_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задано $0 < \varepsilon < 1/2$. Рассмотрим функцию

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{m(B(0, 1))} \int_{B(0, 1)} \rho(x + \alpha_\varepsilon(x)y) dy,$$

где $m(B(0, 1))$ — n -мерная мера Лебега единичного шара. Она непрерывна в $G \setminus (K \cup \{\infty\}) \cup E_0 \cup E_1$. Если кривая γ соединяет E_0 и E_1 в G , то

$$\begin{aligned} \int_\gamma \rho_\varepsilon(x) \Phi(x, dx) &= \frac{1}{m(B(0, 1))} \int_\gamma \int_{B(0, 1)} \rho(x + \alpha_\varepsilon(x)y) dy \Phi(x, dx) \\ &= \frac{1}{m(B(0, 1))} \int_{B(0, 1)} dy \int_\gamma \rho(x + \alpha_\varepsilon(x)y) \Phi(x, dx). \end{aligned}$$

Рассмотрим внутренний интеграл. Пусть $z(x) = x + \alpha_\varepsilon(x)y$, ds — элемент длины кривой γ в евклидовой метрике.

$$\int_\gamma \rho(z(x)) \Phi(x, dx) = \int_\gamma \rho(z(x)) \Phi\left(x, \frac{dx}{ds}\right) ds = \int_{z(\gamma)} \rho(z) \Phi\left(z, \frac{dz}{ds}\right) \frac{\Phi(x, dx/ds)}{\Phi(z, dz/ds)} ds.$$

Пусть $x \in \gamma \setminus (E_0 \cup E_1 \cup K \cup \{\infty\})$, в которой существует касательная. Тогда существует k такое, что $x \in D_k$. Отсюда

$$z(x) \in D_{k+1}, \quad |z(x) - x| \leq \delta_{k+1}, \quad \left| \frac{dx}{ds} \right| = 1, \quad \left| \frac{dz}{ds} - \frac{dx}{ds} \right| < \delta_{k+1}.$$

Следовательно, дробь под интегралом не меньше $(1 + \varepsilon)^{-1}$. Таким образом, мы получили, что для любой кривой γ , соединяющей E_0 и E_1 в G ,

$$\int_\gamma \rho_\varepsilon(x) \Phi(x, dx) \geq (1 + \varepsilon)^{-1},$$

т.е. функция $(1 + \varepsilon)\rho_\varepsilon(x)$ допустима для $M_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G)$, потому что $z(\gamma)$ также соединяет E_0 и E_1 в G . Имеем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \int_G \varphi(\rho_\varepsilon(x)) d\sigma &= \int_G \varphi\left(\frac{1}{m(B(0, 1))} \int_{B(0, 1)} \rho(x + \alpha_\varepsilon(x)y) dy\right) d\sigma_x \\ &\leq \frac{1}{m(B(0, 1))} \int_G d\sigma_x \int_{B(0, 1)} \varphi(\rho(x + \alpha_\varepsilon(x)y)) dy \\ &= \frac{1}{m(B(0, 1))} \int_{B(0, 1)} dy \int_G \varphi(\rho(x + \alpha_\varepsilon(x)y)) d\sigma_x. \end{aligned}$$

Преобразуем внутренний интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{z(G \setminus (E_0 \cup E_1))} \varphi(\rho(z)) \frac{d\sigma_x}{d\sigma_z} d\sigma_z &\leq \int_{z(G \setminus (E_0 \cup E_1))} \varphi(\rho(z)) \frac{\sqrt{g(x, \xi(x))}}{(1 - \varepsilon)^n \sqrt{g(z(x), \xi(z(x)))}} d\sigma_z \\ &\leq \frac{1 + \varepsilon}{(1 - \varepsilon)^n} \int_{z(G \setminus (E_0 \cup E_1))} \varphi(\rho(z)) d\sigma_z \\ &\leq \frac{1 + \varepsilon}{(1 - \varepsilon)^n} (M_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_G \varphi((1 + \varepsilon)\rho_\varepsilon(x)) d\sigma \leq (1 + \varepsilon)^p \int_G \varphi(\rho_\varepsilon(x)) d\sigma \leq \frac{(1 + \varepsilon)^{p+1}}{(1 - \varepsilon)^n} (M_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G) + \varepsilon),$$

где p – константа из (1). В силу произвольности ε лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место неравенство*

$$C_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G) \geq M_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v(x)$ – допустимая функция для емкости такая, что

$$\int_G \varphi(H(x, \nabla v)) d\sigma \leq C_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G) + \varepsilon.$$

Рассмотрим функцию $\rho(x) = H(x, \nabla v)$. Она является борелевской, так как $H(x, \eta)$ непрерывна по своим аргументам. Для любой кривой γ , соединяющей E_0 и E_1 в G ,

$$\int_\gamma H(x, \nabla v) \Phi(x, dx) \geq \left| \int_\gamma \nabla v dx \right| = 1.$$

Таким образом, ρ допустима для модуля конденсатора. Поэтому

$$M_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G) \leq \int_G \varphi(\rho) d\sigma = \int_G \varphi(H(x, \nabla v)) d\sigma \leq C_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε теорема доказана.

ЛЕММА 3. *Для любой неотрицательной функции ρ в $G \setminus (K \cup \{\infty\} \cup E_0 \cup E_1)$ такой, что $\int_G \varphi(\rho) d\sigma < \infty$, существует положительная в $\overline{G} \setminus (K \cup \{\infty\} \cup E_0 \cup E_1)$ функция $\tilde{\rho} \geq \rho$ такая, что $\int_G \varphi(\tilde{\rho}) d\sigma$ будет сколь угодно близко к $\int_G \varphi(\rho) d\sigma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$ и $f(x)$ – положительная в $\mathbb{R}^n$ функция такая, что $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx < \varepsilon$. Тогда функция $f_1(x) = (g(x, \xi))^{-1/(2p)} \varphi^{-1}(f(x))$, определенная на $\overline{G} \setminus K$, удовлетворяет условию $\int_{G \setminus K} \varphi(f_1(x)) d\sigma < \varepsilon$. Положим $\tilde{\rho} = \max(\rho, f_1)$.

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место равенство*

$$C_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G) = M_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично приведенным в [5], [8; § 2.4], [9]. В силу предыдущей теоремы можно считать, что $M_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G) < \infty$. Пусть дано $\varepsilon > 0$ и ρ – непрерывная и положительная в $\overline{G} \setminus (K \cup \{\infty\} \cup E_0 \cup E_1)$ допустимая функция для модуля конденсатора такая, что

$$\int_G \varphi(\rho) d\sigma \leq M_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G) + \varepsilon.$$

Такая функция существует в силу леммы 3. Пусть K_k – исчерпание снаружи множества K , E_{ik} , $k = 1, 2, \dots$, – открытые множества, исчерпывающие E_i снаружи, такие, что

$$\begin{aligned} (K_k \cup \{\infty\}) \cap \partial E_{ik} &= \emptyset, & (K_k \cup \{\infty\}) \cap (E_{i, 2k-1} \setminus E_{i, 2k}) &= \emptyset, \\ & & i = 0, 1, \quad k = 1, 2, \dots, \\ E_{01} \cap E_{11} &= \emptyset, \end{aligned}$$

а Δ_k – исчерпание G изнутри открытыми множествами такое, что

$$(K_k \cup \{\infty\}) \cap \partial \Delta_k = \emptyset, \quad k = 1, 2, \dots$$

Обозначим $W_{ik} = \overline{E}_{ik} \setminus E_{i, k+1}$, $i = 0, 1$, $W_k = W_{0k} \cup W_{1k}$, $G_k = E_{0k} \cup E_{1k}$, d_{2k-1} – расстояние между $\partial G_{2k-1} \cap \overline{G}$ и $\partial G_{2k} \cap \overline{G}$ в метрике ds_Φ , $k = 1, 2, \dots$, $W_0 = G \setminus (E_{01} \cup E_{11})$. Считаем, что границы множеств, образующих эти исчерпания, имеют лебегову меру нуль и являются ограниченными.

Возьмем последовательность $\varepsilon_m \downarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ такую, что $\varepsilon_1 \leq 1$ и

$$2^p \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m < \varepsilon, \quad \varepsilon_{2m-1} < d_{2m-1} \inf_{W_{2m-1} \cap G} \rho, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где p – константа из (1).

Пусть k_l , $l = 1, 2, \dots$, – возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\int_{B_l} \varphi(\rho) d\sigma < \varepsilon_l^{p+1}, \quad \text{где } B_l = (G \setminus \Delta_{k_l}) \cap W_l.$$

Обозначим $B = \bigcup_l B_l$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\rho_1 = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_m}\right) \rho, & x \in B_m, \quad m = 1, 2, \dots, \\ \rho, & x \in (G \setminus B). \end{cases}$$

Для этой функции выполняются неравенства $\rho_1 \geq \rho$,

$$\int_B \varphi(\rho_1) d\sigma = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{B_m} \varphi(\rho_1) d\sigma \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_m}\right)^p \int_{B_m} \varphi(\rho) d\sigma \leq 2^p \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m < \varepsilon,$$

как следует из (2). Отсюда

$$\begin{aligned} \int_G \varphi(\rho_1) d\sigma &= \int_{G \setminus B} \varphi(\rho_1) d\sigma + \int_B \varphi(\rho_1) d\sigma \\ &\leq \int_G \varphi(\rho) d\sigma + \varepsilon \leq M_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G) + 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (3)$$

Докажем, что существует такое k , что для любой кривой γ , соединяющей ∂E_{0k} и ∂E_{1k} в G , выполнено

$$\int_{\gamma \setminus K_k} \rho_1 \Phi(x, dx) \geq 1 - \varepsilon.$$

Если это не так, то для любого k существует кривая γ_k , соединяющая ∂E_{0k} и ∂E_{1k} в G , такая, что

$$\int_{\gamma_k \setminus K_k} \rho_1 \Phi(x, dx) < 1 - \varepsilon.$$

Переобозначим $\gamma_k \setminus K_k$ через γ'_k .

Если для $k \geq 2m - 1$ существует кривая $\gamma'_k \subset \gamma_k$, соединяющая ∂G_{2m} и ∂G_{2m-1} в $W_{2m-1} \cap B$, то

$$\begin{aligned} d_{2m-1} \inf_{W_{2m-1} \cap G} \rho &\leq \int_{\gamma'_k} \rho \Phi(x, dx) = \frac{1}{1 + 1/\varepsilon_{2m-1}} \int_{\gamma'_k} \rho_1 \Phi(x, dx) \\ &\leq \varepsilon_{2m-1} \int_{\gamma'_k} \rho_1 \Phi(x, dx) \leq \varepsilon_{2m-1} (1 - \varepsilon), \end{aligned}$$

что противоречит (2). Значит, кривая γ_k имеет общие точки с $(G \cap W_{2m-1}) \setminus B$.

Пусть $x_0(m, k)$ (соответственно $x_1(m, k)$) – точки некоторой связной части кривой γ_k в $(G \cap W_{0, 2m-1}) \setminus B$ (соответственно в $(G \cap W_{1, 2m-1}) \setminus B$).

Выберем последовательность k_j так, чтобы точки $x_i(1, k_j)$ сходились к некоторой точке $x_{i1} \in G \cap W_{i1}$ при $j \rightarrow \infty$, $i = 0, 1$, и некоторые точки кривых γ_k на границах множеств K_k сходились к точкам множества K . Обозначим последовательность γ_{k_j} через γ_{1k} . Так как ρ непрерывна в $G \setminus (K \cup \{\infty\} \cup E_0 \cup E_1)$, можно найти открытый шар v_{i1} с центром в точке x_{i1} такой, что для любого отрезка l в этом шаре выполняется $\int_l \rho \Phi(x, dx) < \varepsilon/2^6$. Можно считать, что все γ_{1k} пересекают v_{i1} .

Аналогично найдем подпоследовательность γ_{2k} последовательности γ_{1k} , открытые шары v_{i2} с центрами в точках $x_{i2} \in G \cap W_{i2}$ такие, что для любого отрезка l в шарах выполняется $\int_l \rho \Phi(x, dx) < \varepsilon/2^7$ и каждая γ_{2k} пересекает эти шары, $k = 1, 2, \dots$, $i = 0, 1$. Продолжим этот процесс до бесконечности. Рассмотрим диагональную последовательность γ_{kk} .

Для любого натурального k изменим кривую γ_{kk} следующим образом. Заменим какую-либо связную часть кривой γ_{kk} , содержащуюся в v_{im} , двумя радиусами шара v_{im} , идущими в некоторые две точки $\gamma_{kk} \cap \partial v_{im}$. Проводим эти действия для

любого $i = 0, 1$ и $m = 1, 2, \dots$. Обозначим полученную кривую через τ_k . Для кривой τ_k имеем

$$\int_{\tau_k} \rho \Phi(x, dx) < 1 - \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Пусть Γ_0 – семейство спрямляемых кривых, соединяющих x_{01} и x_{11} в $G \setminus (E_0 \cup E_1)$, и Γ_{ij} – семейство спрямляемых кривых в $G \setminus (E_0 \cup E_1)$, соединяющих x_{ij} и $x_{i,j+1}$, $i = 0, 1$, $j \geq 1$. Имеем

$$\begin{aligned} & \inf_{C \in \Gamma_0} \int_C \rho \Phi(x, dx) + \sum_{j=1}^{k-1} \inf_{C \in \Gamma_{0j}} \int_C \rho \Phi(x, dx) + \sum_{j=1}^{k-1} \inf_{C \in \Gamma_{1j}} \int_C \rho \Phi(x, dx) \\ & \leq \int_{\tau_k} \rho \Phi(x, dx) \leq 1 - \frac{3\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

для любого $k \geq 1$. Выберем $C_0 \in \Gamma_0$, $C_{0j} \in \Gamma_{0j}$, $C_{1j} \in \Gamma_{1j}$, $j \geq 1$, такие, что

$$\begin{aligned} \int_{C_0} \rho \Phi(x, dx) & < \inf_{C \in \Gamma_0} \int_C \rho \Phi(x, dx) + \frac{\varepsilon}{8}, \\ \int_{C_{ij}} \rho \Phi(x, dx) & < \inf_{C \in \Gamma_{ij}} \int_C \rho \Phi(x, dx) + \frac{\varepsilon}{2^{j+3}}, \quad j \geq 1, \quad i = 0, 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим кривую

$$\tilde{\gamma} = \dots + C_{02} + C_{01} + C_0 + C_{11} + C_{12} + \dots.$$

Она соединяет множества E_0 и E_1 в G и удовлетворяет условию

$$\int_{\tilde{\gamma}} \rho \Phi(x, dx) = \int_{C_0} \rho \Phi(x, dx) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{C_{0j} \cup C_{1j}} \rho \Phi(x, dx) < 1 - \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+2}} < 1,$$

что противоречит допустимости функции ρ . Следовательно, существует k такое, что для любой кривой γ , соединяющей ∂E_{0k} и ∂E_{1k} в G , выполнена оценка

$$\int_{\gamma \setminus K_k} \rho_1 \Phi(x, dx) \geq 1 - \varepsilon.$$

Обозначим

$$\rho' = \begin{cases} \frac{\rho_1}{1 - \varepsilon}, & x \in G \setminus (E_{0k} \cup E_{1k} \cup K_k), \\ 0, & x \in E_{0k} \cup E_{1k} \cup K_k. \end{cases}$$

Введем функцию

$$v(x) = \inf \int_{\gamma(x)} \rho' \Phi(x, dx),$$

где инфимум берется по всем кривым $\gamma(x)$, соединяющим точку x с E_0 . Тогда $v(x) = 0$ на E_0 , а по доказанному $v(x) \geq 1$ на E_1 . Очевидно, что $\nabla v = 0$ в некоторой окрестности $E_0 \cup E_1 \cup K$. Пусть

$$x \in G \setminus \left(K \cup \{\infty\} \cup E_0 \cup E_1 \cup \bigcup_k (\partial \Delta_k \cup \partial E_{0k} \cup \partial E_{1k} \cup \partial K_k) \right),$$

$B(x, t_0)$ – шар с центром в точке x радиуса t_0 , лежащий в этом множестве, $x' = x + t\theta$, $|\theta| = 1$, $\theta \in \mathbb{R}^n$, $0 < t < t_0$. Имеем

$$\begin{aligned} v(x + t\theta) - v(x) &\leq \int_x^{x+t\theta} \rho' \Phi(y, dy) \leq \max_{B(x,t)} \rho' \int_x^{x+t\theta} \Phi(y, dy) \\ &= \max_{B(x,t)} \rho' \int_0^t \Phi(x + s\theta, \theta) ds = t \max_{B(x,t)} \rho' \Phi(x + s_0\theta, \theta), \quad 0 \leq s_0 \leq t. \end{aligned}$$

Разделив на t и устремляя t к нулю, получим, что $(\nabla v, \theta) \leq \rho' \Phi(x, \theta)$ почти всюду. Поделим на $\Phi(x, \theta)$ и возьмем супремум по θ , имеем $H(x, \nabla v) \leq \rho'$.

Функция v допустима для емкости конденсатора. Имеем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} C_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G) &\leq \int_G \varphi(H(x, \nabla v)) d\sigma \leq \int_G \varphi(\rho') d\sigma \leq \int_G \varphi\left(\frac{\rho_1}{1-\varepsilon}\right) d\sigma \\ &\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^p} \int_G \varphi(\rho_1) d\sigma \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^p} (M_{\varphi, \Phi, \xi}(E_0, E_1, K, G) + 2\varepsilon) \end{aligned}$$

в силу (3). Устремляя ε к нулю и используя теорему 1, получим утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Ahlfors, A Beurling, “Conformal invariants and functions-theoretic null-sets”, *Acta Math.*, **83**:1 (1950), 101–129.
- [2] B. Fuglede, “Extremal length and functional completion”, *Acta Math.*, **98**:3 (1957), 171–219.
- [3] W. P. Ziemer, “Extremal length and p -capacity”, *Michigan Math. J.*, **16**:1 (1969), 43–51.
- [4] J. Hesse, “A p -extremal length and p -capacity equality”, *Ark. Mat.*, **13**:1 (1975), 131–144.
- [5] В. А. Шлык, “О равенстве p -емкости и p -модуля”, *Сиб. матем. журн.*, **34**:6 (1993), 216–221.
- [6] В. В. Асеев, “Об одном свойстве модуля”, *Докл. АН СССР*, **200**:3 (1971), 513–514.
- [7] Х. Рунд, *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств*, Наука, М., 1981.
- [8] M. Ohtsuka, *Extremal Length and Precise Functions*, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., **19**, Gakkōtoshō, Tokyo, 2003.
- [9] Ю. В. Дымченко, “Равенство емкости и модуля конденсатора на поверхности”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 17, Зап. научн. сем. ПОМИ, **276**, ПОМИ, СПб., 2001, 112–133.

Ю. В. Дымченко

Дальневосточный государственный университет

E-mail: dymch@mail.ru

Поступило

05.02.2008

Исправленный вариант

24.06.2008