Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Лукашов, Дополнения к принципу гармонической меры Р. Неванлинны, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 4, 632–633

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4514>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 18:05:47

Дополнения к принципу гармонической меры Р. Неванлинны

А. Л. Лукашов

Хорошо известен (см., например, [1], [2]) принцип гармонической меры, который при ряде условий утверждает, что гармоническая мера образа части границы области не меньше гармонической меры прообраза.

Цель данной заметки – привести два утверждения, которые дают “обратные” оценки. Всюду в дальнейшем ω обозначает гармоническую меру соответствующей части границы области относительно данной точки области.

ТЕОРЕМА 1. Пусть D и G – области в $\bar{\mathbb{C}}$, ограниченные конечным числом жордановых дуг. Если $w(z)$ – мероморфная в D , непрерывная в $\bar{D}$ функция, производная которой не обращается в нуль в D , $w(D) \supset G$ и $w(\partial D) = \partial G$, то для любого множества $\alpha_z \subset \partial D$, состоящего из конечного числа дуг, и для любого $w_0 \in G$ выполнено

$$\omega(w_0, \alpha_w, G) \leq \sum_k \omega(z_k(w_0), \alpha_z, D),$$

где суммирование ведется по всевозможным решениям z_k уравнения $w(z) = w_0$ и $\alpha_w = w(\alpha_z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w_0 \in G$. Тогда уравнение

$$f(z) = w_0 \tag{1}$$

имеет лишь конечное число решений в D . В самом деле, в противном случае для предельной точки z_0 решений уравнения (1) имеем $z_0 \in \partial D$ и $f(z_0) = w_0$, что противоречит условию $f(\partial D) = \partial G$. Докажем, что число решений уравнения (1) одно и то же для всех $w_0 \in G$. Соединим две произвольные точки w_1 и w_2 области G кривой, лежащей в G . Для каждой точки w этой кривой можно найти такую ее окрестность V , которая является образом дизъюнктного объединения окрестностей U_j решений уравнения $f(z) = w$ при отображении f , причем f взаимно однозначно на каждом из U_j (в силу того, что $f'(z)$ не обращается в нуль). В силу компактности кривой можно выбрать конечное число таких окрестностей V , покрывающих эту кривую. Так как при переходе от одной окрестности к другой листность отображения не изменяется, то число решений уравнений $f(z) = w_1$ и $f(z) = w_2$ одно и то же. Поэтому функция

$$h(w) = \sum_k \omega(z_k(w), \alpha_z, D) - \omega(w, \alpha_w, G)$$

является однозначной гармонической в G . Оценим ее предельные значения на ∂G . Пусть $\tilde{w} \in \alpha_w$. Тогда найдется по крайней мере одно значение $z \in \alpha_z$ такое, что $w(z) = \tilde{w}$. Следовательно,

$$\lim_{\substack{w \rightarrow \tilde{w} \\ w \in G}} h(w) \geq 0. \tag{2}$$

Если $\tilde{w} \in \partial G \setminus \alpha_w$, то $\omega(\tilde{w}, \alpha_w, G) = 0$ и неравенство (2) также имеет место. Из (2) по принципу минимума для гармонических функций следует требуемое.

ТЕОРЕМА 2. Пусть области D и G ограничены конечным числом замкнутых жордановых кривых, область D имеет на своей границе открытую аналитическую дугу γ , область G имеет на своей границе такую же дугу Γ , причем $f(\gamma) = \Gamma$ и $f(\partial D) \subset \partial G$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00167).

для рациональной функции $f(z)$. Тогда для любой точки $w_0 \in f(D) \cap G$ справедливо неравенство

$$\omega(w_0, \Gamma, G) \leq \sum_k \omega(z_k(w_0), \gamma, D),$$

причем суммирование ведется по всевозможным решениям z_k уравнения $f(z) = w_0$ (с учетом их кратностей).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $w_0 = \infty$. Тогда функция $f(z)$ удовлетворяет условиям следствия 2 из [3] и для всех $z \in \gamma$ справедливо неравенство

$$|f'(z)| \frac{\partial g_G(f(z), \infty)}{\partial n} \leq \sum_k \frac{\partial g_D(z, z_k(\infty))}{\partial n}, \quad (3)$$

где $\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к соответствующей граничной дуге, g – функция Грина соответствующей области.

Учитывая представление гармонической меры [1], имеем

$$\omega(\infty, \Gamma, G) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial g_G(\zeta, \infty)}{\partial n} |d\zeta|.$$

Так как $f(\gamma) = \Gamma$, то γ можно разбить на конечное число дуг γ_j таких, что на каждой из дуг γ_j функция $f(z)$ осуществляет взаимно однозначное отображение на Γ или ее часть, следовательно, с учетом (3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial g_G(\zeta, \infty)}{\partial n} |d\zeta| &\leq \sum_j \frac{1}{2\pi} \int_{f(\gamma_j)} \frac{\partial g_G(\zeta, \infty)}{\partial n} |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \sum_j \int_{\gamma_j} \frac{\partial g_G(f(\xi), \infty)}{\partial n} |f'(\xi)| |d\xi| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_j \sum_k \int_{\gamma_j} \frac{\partial g_D(\xi, z_k(\infty))}{\partial n} |d\xi| = \sum_k \omega(z_k(\infty), \gamma, D). \end{aligned}$$

Общий случай утверждения теоремы 2 следует теперь из инвариантности гармонической меры относительно дробно-линейных отображений.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение теоремы 2 справедливо и в случае, когда области D и G ограничены конечным числом жордановых дуг и имеют пустую внешность.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus E$, $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$, где E и F – системы нескольких отрезков действительной оси, утверждение теоремы 2 было анонсировано автором в [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Приведем пример, показывающий точность неравенства (3). Пусть $f(z) = z^2$, $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$, $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus [0, 1]$, $\gamma = \Gamma = [0, 1]$. Тогда $\omega(\infty, \Gamma, G) = 1$, $\omega(\infty, \gamma, D) = 1/2$.

Автор благодарен член-корреспонденту РАН В. Н. Дубинину за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Неванлинна, *Однозначные аналитические функции*, ГИТТЛ, М.–Л., 1941.
 [2] С. Стоилов, *Теория функций комплексного переменного*, т. 2, ИЛ, М., 1962.
 [3] В. Н. Дубинин, С. И. Калмыков, *Матем. сб.*, **198**:12 (2007), 37–46. [4] A. L. Lukashov, *Inequalities for Derivatives of Rational Functions and Harmonic Measures*, http://www.sabanciuniv.edu/mdbf/analysis2007/documents/abstract_Lukashov_.pdf.

А. Л. Лукашов
 Саратовский государственный
 университет им. Н. Г. Чернышевского

Поступило
 17.02.2008