Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Кириченко, И. В. Ускорев, Инварианты конформного преобразования почти-контактных метрических структур, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 6, 838–850

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4515>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:47:12

Инварианты конформного преобразования почти-контактных метрических структур

В. Ф. Кириченко, И. В. Ускорев

В явном виде вычислены так называемые структурные тензоры почти контактных метрических структур, играющие ключевую роль в геометрии почти контактных метрических структур. Выяснено, как преобразуются эти тензоры при конформных преобразованиях почти контактных метрических структур. С использованием этих результатов изучено поведение наиболее интересных классов почти контактных структур при конформных преобразованиях этих структур.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Почти контактные метрические структуры представляют собой один из наиболее содержательных примеров дифференциально-геометрических структур на многообразиях. Почти контактные метрические структуры, например, внутренним образом возникают на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий [1], а также на пространствах главных T^1 -расслоений над почти эрмитовыми многообразиями [2] и являются обобщением контактных метрических структур, естественно возникающих на нечетномерных многообразиях, снабженных контактной структурой, т.е. дифференциальной 1-формой максимального ранга [3]. Теория почти контактных метрических структур берет свое начало в 50-е гг. минувшего столетия и в настоящее время переживает бурное развитие. Особо интересными свойствами обладают так называемые квази-сасакиевы структуры, введенные в рассмотрение Блэром [4] и обобщающие сасакиевы и косимплектические структуры, являющиеся контактными аналогами келеровых структур в эрмитовой геометрии, а также структуры Кенмоцу [5]. Исследование этих структур проводится в самых разнообразных аспектах [6].

Особый интерес представляют конформно-инвариантные свойства этих многообразий. Под конформным преобразованием почти контактной метрической структуры (η, ξ, Φ, g) понимается переход к структуре $(\tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$, которая автоматически оказывается контактной метрической структурой. Здесь $\tilde{\xi} = e^\sigma \xi$, $\tilde{\eta} = e^{-\sigma} \eta$, $\tilde{\Phi} = \Phi$, $\tilde{g} = e^{-2\sigma} g$, где σ – гладкая функция на многообразии. Исследованием конформных преобразований почти контактных метрических структур занимались Чиней и Марреро [7], [8], Ольчак [9], Кириченко и Левковец [10], Кириченко и Баклашова [11], и многие другие.

2. Структурные тензоры и их поведение при конформных преобразованиях АС-структуры. Начнем с основных определений понятий, используемых при дальнейшем изложении материала статьи.

Пусть

- M – нечетномерное гладкое многообразие, $\dim M = 2n + 1$;
- $\mathfrak{X}(M)$ – модуль гладких векторных полей на M ;
- d – оператор внешнего дифференцирования;
- $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика на M ;
- $[\cdot, \cdot]$ – операция взятия скобок Ли;
- ∇ – риманова связность метрики g .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Контактной структурой*, на M называется дифференциальная 1-форма η на M такая, что в каждой точке многообразия

$$\eta \wedge \underbrace{d\eta \wedge \cdots \wedge d\eta}_{n \text{ раз}} \neq 0.$$

Многообразие с фиксированной на нем контактной структурой называется *контактным многообразием* [12].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Почти контактной метрической структурой* (АС-структурой) на многообразии M называется четверка (η, ξ, Φ, g) на этом многообразии, где η – дифференциальная 1-форма, ξ – векторное поле, называемое *характеристическим*, Φ – эндоморфизм модуля $\mathfrak{X}(M)$, называемый *структурным эндоморфизмом*, а $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика на M и выполняются следующие условия:

- 1) $\eta(\xi) = 1$;
- 2) $\eta \circ \Phi = 0$;
- 3) $\Phi(\xi) = 0$;
- 4) $\Phi^2 = -\text{id} + \eta \otimes \xi$;
- 5) $\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y)$.

Легко заметить, что если в условии 5) положить $Y = \xi$, то $\langle X, \xi \rangle = \eta(X)$.

Многообразие с фиксированной на нем почти контактной метрической структурой называется *почти контактными метрическим многообразием*.

Если задать почти контактную метрическую структуру на многообразии M , то естественным образом в модуле $\mathfrak{X}(M)$ возникает пара взаимно дополнительных проекторов: $\mathfrak{m} = \eta \otimes \xi$, $\mathfrak{l} = \text{id} - \eta \otimes \xi$. Очевидно, что $\mathfrak{m} + \mathfrak{l} = \text{id}$. Кроме того, легко показать, что $\mathfrak{l} = -\Phi^2$.

На почти контактном метрическом многообразии M также возникает пара распределений $\mathfrak{L} = \ker \eta = \text{Im } \Phi$, $\mathfrak{M} = \ker \Phi$ – *первое* и *второе фундаментальные распределения* соответственно, при этом для модуля $\mathfrak{X}(M)$ гладких векторных полей верно $\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{M}$, где $\dim \mathfrak{L} = 2n$, а $\dim \mathfrak{M} = 1$.

Учитывая вышесказанное, можно сделать вывод, что на распределении $\mathfrak{L} = \text{Im}(\mathfrak{l})$ пара $\{\Phi|_{\mathfrak{L}}, g|_{\mathfrak{L}}\}$ определяет почти эрмитову структуру, следовательно, $\mathfrak{L}$ можно рассматривать как распределение на M с эрмитовой метрикой $H(X, Y) = \langle X, Y \rangle + \sqrt{-1} \langle X, \Phi Y \rangle$, где $X, Y \in \mathfrak{L}$.

Рассмотрим распределение $\mathfrak{L}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{L} \otimes \mathbb{C}$ на M и операторы $\sigma: \mathfrak{L}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{L}^{\mathbb{C}}$ и $\bar{\sigma}: \mathfrak{L}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{L}^{\mathbb{C}}$ заданные соответственно

$$\sigma = \frac{1}{2}(\text{id} - \sqrt{-1}\Phi^C), \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\text{id} + \sqrt{-1}\Phi^C),$$

где $\Phi^C = \Phi|_{\mathfrak{L}} \otimes \text{id}_{\mathbb{C}}$ – комплексификация оператора $\Phi|_{\mathfrak{L}}$, т.е.

$$\Phi^C \left(\sum_k z_k \otimes X_k \right) = \sum_k z_k \otimes \Phi(X_k).$$

Легко показать, что σ и $\bar{\sigma}$ – взаимно дополнительные проекторы.

Условимся для простоты обозначений Φ^C обозначать просто через Φ .

Пусть $D_{\Phi}^{\sqrt{-1}} = \text{Im}(\sigma)$ и $D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}} = \text{Im}(\bar{\sigma})$. Нетрудно заметить, что на $\mathfrak{L}^C$ выполняется тождество $\bar{\sigma} \circ \tau = \tau \circ \sigma$, где τ – оператор комплексного сопряжения, определенный в распределении $\mathfrak{L}^C$. Тогда, очевидно,

$$\mathfrak{L}^C = D_{\Phi}^{\sqrt{-1}} \oplus D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}}.$$

При точечной локализации приведенной конструкции в главном расслоении всех комплексных реперов можно выделить реперы, адаптированные AC -структуре. Опишем соответствующую конструкцию. Для этого зафиксируем точку $p \in M$ и пусть L_p – репер $\{p, e_1, \dots, e_n\}$, унитарный относительно метрики H , что означает

$$H(e_a, e_b) = \langle e_a, e_b \rangle + \sqrt{-1} \langle e_a, \Phi e_b \rangle = \langle e_a, e_b \rangle = \delta_{ab}.$$

Условимся, что индексы $i, j, k, l, \dots$ пробегает значения от 0 до $2n$, индексы $a, b, c, d, f, g, h, \dots$ – значения от 1 до n , $\hat{a} = a + n$. Символами $[\cdot]$ и $(\cdot)$ обозначим альтернацию и симметризацию объекта соответственно. Положим $\varepsilon_0 = \xi$, $\varepsilon_a = \sqrt{2}\sigma(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\sigma}(e_a)$. Тогда легко заметить, что

$$\Phi(\varepsilon_a) = \sqrt{-1}\varepsilon_a, \quad \Phi(\varepsilon_{\hat{a}}) = -\sqrt{-1}\varepsilon_a, \quad \Phi(\varepsilon_0) = 0. \quad (*)$$

Таким образом, получаем, что

$$\{p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}}\}$$

образуют репер модуля $\mathfrak{L}_p^C \oplus \mathfrak{M}_p^C$, где $\mathfrak{M} = \text{Im}(\mathfrak{m})$, который называется *адаптированным структуре репером* или *A-репером*. Совокупность всех таких реперов определяет G -структуру на M , структурной группой которой является группа Ли $U(n) \times \{e\}$ [12].

Пусть ρ – форма смещения, а θ – форма римановой связности ∇ на пространстве этой G -структуры. Тогда, как известно [13], структурные уравнения связности ∇ имеют вид

$$d\rho = -\theta \wedge \rho, \quad d\theta = -\frac{1}{2}[\theta, \theta] + R,$$

где R – форма кривизны связности. На пространстве присоединенной G -структуры форма связности θ задается дифференциальными 1-формами $\{\omega_j^i\}$, форма смещения ρ – дифференциальными 1-формами ω^i . Тогда первое из структурных уравнений примет вид

$$d\omega^i = -\omega_j^i \wedge \omega^j.$$

Согласно (*) элементы матрицы оператора Φ в A -репере имеют вид

$$\Phi_b^a = \sqrt{-1}\delta_b^a, \quad \Phi_{\hat{b}}^{\hat{a}} = -\sqrt{-1}\delta_{\hat{b}}^{\hat{a}}, \quad \Phi_k^0 = \Phi_0^k = 0.$$

Поскольку Φ – тензор типа $(1, 1)$, будет справедливо равенство

$$d\Phi_j^i - \Phi_k^i \omega_j^k + \Phi_j^k \omega_k^i = \Phi_{j,k}^i \omega^k,$$

где $\Phi_{j,k}^i$ – система функций на пространстве присоединенной G -структуры, служащая компонентами ковариантного дифференциала структурного эндоморфизма.

Далее, мы знаем [12], что для тензорных компонент римановой связности имеют место следующие соотношения на пространстве присоединенной G -структуры:

$$\begin{aligned} 1) \theta_b^a &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,k}^a \omega^k, & 2) \theta_0^a &= \sqrt{-1} \Phi_{0,k}^a \omega^k, & 3) \theta_a^0 &= -\sqrt{-1} \Phi_{a,k}^0 \omega^k, \\ 4) \theta_b^{\hat{a}} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,k}^{\hat{a}} \omega^k, & 5) \theta_0^{\hat{a}} &= -\sqrt{-1} \Phi_{0,k}^{\hat{a}} \omega^k, & 6) \theta_a^0 &= \sqrt{-1} \Phi_{a,k}^0 \omega^k, \\ 7) \Phi_{b,k}^a &= 0, & 8) \Phi_{b,k}^{\hat{a}} &= 0, & 9) \Phi_{0,k}^0 &= 0, \end{aligned}$$

при этом $\theta_j^i + \theta_i^j = 0$.

Согласно [12] тензор Нейенхейса структурного эндоморфизма Φ имеет вид

$$N_\Phi(X, Y) = \frac{1}{4} \{ \Phi^2[X, Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] \},$$

а его компоненты на пространстве присоединенной G -структуры имеют вид

$$\begin{aligned} 1) N_{ab}^0 &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{[a,b]}^0, & 2) N_{ab}^0 &= -N_{ba}^0 = -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{(\hat{a},b)}^0, \\ 3) N_{\hat{a}\hat{b}}^0 &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0, & 4) N_{b0}^a &= -N_{0b}^a = \frac{\sqrt{-1}}{4} \Phi_{b,0}^a - \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{0,\hat{b}}^a, \\ 5) N_{b\hat{c}}^a &= \sqrt{-1} \Phi_{[b,\hat{c}]}^a, & 6) N_{bc}^{\hat{a}} &= -\sqrt{-1} \Phi_{[b,c]}^{\hat{a}}, \\ 7) N_{b0}^{\hat{a}} &= -N_{0b}^{\hat{a}} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{0,b}^{\hat{a}} - \frac{\sqrt{-1}}{4} \Phi_{b,0}^{\hat{a}}. \end{aligned}$$

Остальные компоненты этого тензора тождественно равны нулю.

С учетом выражений для тензорных компонент формы римановой связности первая группа структурных уравнений римановой связности на пространстве присоединенной G -структуры примет вид

$$\begin{aligned} 1) d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B_c^a \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + B_b^a \omega \wedge \omega^b + B^{ab} \omega \wedge \omega_b, \\ 2) d\omega^a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + B_a^b \omega \wedge \omega_b + B_{ab} \omega \wedge \omega^b, \\ 3) d\omega &= C_{bc} \omega^b \wedge \omega^c + C^{ab} \omega_b \wedge \omega_c + C_c^b \omega^c \wedge \omega_b + C_b \omega \wedge \omega^b + C^b \omega \wedge \omega_b, \end{aligned}$$

где $\omega = \omega^0 = \pi^*(\eta)$, π – естественная проекция пространства присоединенной G -структуры на многообразие M , при этом

$$\begin{aligned} B_c^a &= -\frac{1}{2} \sqrt{-1} \Phi_{b,c}^a, & B^{abc} &= \frac{1}{2} \sqrt{-1} \Phi_{[\hat{b},\hat{c}]}^a, & B_b^a &= \sqrt{-1} \Phi_{0,b}^a, \\ B_{ab}^c &= \frac{1}{2} \sqrt{-1} \Phi_{b,\hat{c}}^c, & B_{abc} &= -\frac{1}{2} \sqrt{-1} \Phi_{[b,c]}^{\hat{a}}, & B_b^a &= -\sqrt{-1} \Phi_{0,\hat{b}}^a, \\ B^{ab} &= \sqrt{-1} \left(\Phi_{0,\hat{b}}^a - \frac{1}{2} \Phi_{\hat{b},0}^a \right), & B_{ab} &= -\sqrt{-1} \left(\Phi_{0,b}^{\hat{a}} - \frac{1}{2} \Phi_{b,0}^{\hat{a}} \right), \\ C_b^a &= -\sqrt{-1} (\Phi_{\hat{a},b}^0 + \Phi_{b,\hat{a}}^0), & C^{ab} &= \sqrt{-1} \Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0, & C_{ab} &= -\sqrt{-1} \Phi_{[a,b]}^0, \\ C^a &= -\sqrt{-1} \Phi_{a,0}^0, & C_a &= \sqrt{-1} \Phi_{a,0}^0. \end{aligned}$$

Нетрудно увидеть, что $C_b^a = B_b^a - B_b^a$.

Введем следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [12]. *Фундаментальной формой* AC -структуры называется тензор Ω : $\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle$, где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [6]. *Конформным преобразованием* AC -структуры $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ на многообразии M называется переход от S к AC -структуре $\tilde{S} = (\tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$, где $\tilde{\xi} = e^\sigma \xi$, $\tilde{\eta} = e^{-\sigma} \eta$, $\tilde{\Phi} = \Phi$, $\tilde{g} = e^{-2\sigma} g$, σ – произвольная гладкая функция на M , называемая *определяющей функцией преобразования*.

Введем обозначение $\sigma^\# = \text{grad } \sigma$, а также

$$C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,\hat{c}}^a, \quad C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,c}^{\hat{a}}, \quad F^{ab} = \sqrt{-1} \Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0, \quad F_{ab} = -\sqrt{-1} \Phi_{a,b}^0$$

и рассмотрим такие семейства функций на пространстве присоединенной G -структуры:

- $B = \{B_{jk}^i\}$, где $B_{bc}^a = B_c^{ab}$, $B_{bc}^{\hat{a}} = B_{ab}^c$, все прочие компоненты семейства B нулевые;
- $C = \{C_{jk}^i\}$, где $C_{bc}^a = C^{abc}$, $C_{bc}^{\hat{a}} = C_{abc}$, все прочие компоненты семейства C нулевые;
- $D = \{D_j^i\}$, где $D_b^a = B^{ab}$, $D_b^{\hat{a}} = B_{ab}$, все прочие компоненты семейства D нулевые;
- $E = \{E_j^i\}$, где $E_b^a = B_b^a$, $E_b^{\hat{a}} = B_a^b$, все прочие компоненты семейства E нулевые;
- $F = \{F_j^i\}$, где $F_b^a = F^{ab}$, $F_b^{\hat{a}} = F_{ab}$, все прочие компоненты семейства F нулевые;
- $G = \{G^i\}$, где $G^a = C^a$, $G^{\hat{a}} = C_a$, $G^0 = 0$.

Согласно [12] эти системы функций определяют тензоры соответствующих типов на многообразии M , которые называются *первым, вторым, ..., шестым структурными тензорами* AC -структуры соответственно.

При конформном преобразовании AC -структуры с определяющей функцией σ оператор ∇ переходит в $\tilde{\nabla}$, при этом

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \nabla_X(\Phi)Y + T(X, \Phi Y) - \Phi T(X, Y),$$

где

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \langle X, Y \rangle \sigma^\# - d\sigma(X)Y - d\sigma(Y)X, \\ T(X, \Phi Y) &= \langle X, \Phi Y \rangle \sigma^\# - d\sigma(X)(\Phi Y) - d\sigma(\Phi Y)X. \end{aligned}$$

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(\Phi)Y &= \nabla_X(\Phi)Y + \langle X, \Phi Y \rangle \sigma^\# - d\sigma(X)(\Phi Y) \\ &\quad - d\sigma(\Phi Y)X - \Phi \langle X, Y \rangle \sigma^\# + \Phi d\sigma(X)Y + \Phi d\sigma(Y)X \\ &= \nabla_X(\Phi)Y + \langle X, \Phi Y \rangle \sigma^\# - \langle X, Y \rangle \Phi(\sigma^\#) - d\sigma(\Phi Y)X + d\sigma(Y)(\Phi X). \end{aligned}$$

Итак,

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \nabla_X(\Phi)Y + \langle X, \Phi Y \rangle \sigma^\# - \langle X, Y \rangle \Phi(\sigma^\#) - d\sigma(\Phi Y)X + d\sigma(Y)(\Phi X). \quad (**)$$

Рассмотрим структурный тензор B . При конформном преобразовании AC -структуры с определяющей функцией σ структурный тензор B переходит в структурный тензор $\tilde{B}$. Согласно [12] выражение структурного тензора B имеет вид

$$B(X, Y) = -\frac{1}{8} \{ \Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) - \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X) + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) \}.$$

В частности, справедливо

$$\tilde{B}(X, Y) = -\frac{1}{8} \{ \Phi \circ \tilde{\nabla}_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi \circ \tilde{\nabla}_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) - \Phi^2 \circ \tilde{\nabla}_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X) + \Phi^2 \circ \tilde{\nabla}_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) \}.$$

Получим выражения для каждого из слагаемых тензора $\tilde{B}(X, Y)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) &= \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \langle \Phi^2 Y, \Phi^3 X \rangle \sigma^\# \\ &\quad - \langle \Phi^2 Y, \Phi^2 X \rangle \Phi(\sigma^\#) - d\sigma(\Phi^3 X)(\Phi^2 Y) + d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^3 Y) \\ &= \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) - \langle \Phi Y, X \rangle \sigma^\# \\ &\quad + \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi(\sigma^\#) + d\sigma(\Phi X)(\Phi^2 Y) - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi Y), \\ \tilde{\nabla}_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) &= \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \langle \Phi Y, \Phi^2 X \rangle \sigma^\# \\ &\quad - \langle \Phi Y, \Phi X \rangle \Phi(\sigma^\#) - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi Y) + d\sigma(\Phi X)(\Phi^2 Y) \\ &= \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) - \langle \Phi Y, X \rangle \sigma^\# \\ &\quad + \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi(\sigma^\#) - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi Y) + d\sigma(\Phi X)(\Phi^2 Y), \\ \tilde{\nabla}_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X) &= \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X) + \langle \Phi^2 Y, \Phi^2 X \rangle \sigma^\# \\ &\quad - \langle \Phi^2 Y, \Phi X \rangle \Phi(\sigma^\#) - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) + d\sigma(\Phi X)(\Phi^3 Y) \\ &= \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X) - \langle \Phi^2 Y, X \rangle \sigma^\# \\ &\quad - \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\#) - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) - d\sigma(\Phi X)(\Phi Y), \\ \tilde{\nabla}_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) &= \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \langle \Phi Y, \Phi^3 X \rangle \sigma^\# \\ &\quad - \langle \Phi Y, \Phi^2 X \rangle \Phi(\sigma^\#) - d\sigma(\Phi^3 X)(\Phi Y) + d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) \\ &= \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \langle \Phi^2 Y, X \rangle \sigma^\# \\ &\quad + \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\#) + d\sigma(\Phi X)(\Phi Y) + d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y). \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в формулу для $\tilde{B}(X, Y)$:

$$\begin{aligned} \tilde{B}(X, Y) &= -\frac{1}{8} \{ \Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) - \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\#) + \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\#) \\ &\quad + d\sigma(\Phi X)(\Phi^3 Y) - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) + \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) \\ &\quad - \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\#) + \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\#) - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) \\ &\quad + d\sigma(\Phi X)(\Phi^3 Y) - \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X) + \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\#) \\ &\quad + \langle \Phi Y, X \rangle \Phi^3(\sigma^\#) + d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^4 Y) + d\sigma(\Phi X)(\Phi^3 Y) \\ &\quad + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\#) + \langle \Phi Y, X \rangle \Phi^3(\sigma^\#) \\ &\quad + d\sigma(\Phi X)(\Phi^3 Y) + d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^4 Y) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= B(X, Y) - \frac{1}{8} \{ -\langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\sharp) + \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) - d\sigma(\Phi X)(\Phi Y) \\
&\quad - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) - \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\sharp) + \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) \\
&\quad - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) - d\sigma(\Phi X)(\Phi Y) + \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) \\
&\quad - \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\sharp) - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) - d\sigma(\Phi X)(\Phi Y) \\
&\quad + \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) - \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\sharp) - d\sigma(\Phi X)(\Phi Y) \\
&\quad - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) \} \\
&= B(X, Y) - \frac{1}{2} \{ \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) - \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\sharp) \\
&\quad - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) - d\sigma(\Phi X)(\Phi Y) \}.
\end{aligned}$$

Итак, мы получили, что

$$\begin{aligned}
\tilde{B}(X, Y) &= B(X, Y) - \frac{1}{2} \{ \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) - \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\sharp) \\
&\quad - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) - d\sigma(\Phi X)(\Phi Y) \}.
\end{aligned}$$

Посчитаем аналогично предыдущему, как изменится тензор C при конформном преобразовании AC -структуры с определяющей функцией σ :

$$\begin{aligned}
C(X, Y) &= -\frac{1}{8} \{ -\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) \\
&\quad + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X) + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) \}, \\
\tilde{C}(X, Y) &= -\frac{1}{8} \{ -\Phi \circ \tilde{\nabla}_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi \circ \tilde{\nabla}_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) \\
&\quad + \Phi^2 \circ \tilde{\nabla}_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X) + \Phi^2 \circ \tilde{\nabla}_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) \} \\
&= -\frac{1}{8} \{ -\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\sharp) - \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) \\
&\quad - d\sigma(\Phi X)(\Phi^3 Y) + d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) + \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) \\
&\quad - \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\sharp) + \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) \\
&\quad + d\sigma(\Phi X)(\Phi^3 Y) + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X) - \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) \\
&\quad - \langle \Phi Y, X \rangle \Phi^3(\sigma^\sharp) - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^4 Y) - d\sigma(\Phi X)(\Phi^3 Y) \\
&\quad + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) + \langle \Phi Y, X \rangle \Phi^3(\sigma^\sharp) \\
&\quad + d\sigma(\Phi X)(\Phi^3 Y) + d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^4 Y) \} \\
&= C(X, Y) - \frac{1}{8} \{ \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\sharp) - \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) + d\sigma(\Phi X)(\Phi Y) \\
&\quad + d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) - \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\sharp) + \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) \\
&\quad - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) - d\sigma(\Phi X)(\Phi Y) - \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) \\
&\quad + \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\sharp) + d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) + d\sigma(\Phi X)(\Phi Y) \\
&\quad + \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) - \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\sharp) - d\sigma(\Phi X)(\Phi Y) \\
&\quad - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) \} \\
&= C(X, Y).
\end{aligned}$$

Таким образом, структурный тензор C – инвариант относительно конформного преобразования AC -структуры с определяющей функцией σ , т.е. $\tilde{C} = C$.

Подсчитав, как изменятся остальные структурные тензоры D , E , F и G при конформном преобразовании AC -структуры с определяющей функцией σ аналогичным выше способом, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{B}(X, Y) = B(X, Y) - \frac{1}{2} \{ \langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) - \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\sharp) \\ \quad - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) - d\sigma(\Phi X)(\Phi Y) \}, \\ \tilde{C}(X, Y) = C(X, Y), \\ \tilde{D}(X) = e^\sigma D(X), \\ \tilde{E}(X) = e^\sigma (E(X) + d\sigma(\xi)(\Phi^2 X)), \\ \tilde{F}(X) = e^\sigma F(X), \\ \tilde{G} = e^{2\sigma} (G - \Phi^2(\sigma^\sharp)). \end{array} \right. \quad (***)$$

Итак, тензор C является абсолютным инвариантом, а тензоры D и F – относительными инвариантами относительно конформного преобразования AC -структуры.

Выясним при каких условиях тензоры B , E и G будут являться инвариантами.

Тензор G будет относительным инвариантом тогда и только тогда, когда

$$\Phi^2(\sigma^\sharp) = 0,$$

что равносильно условию $\sigma^\sharp \in \mathfrak{M}$.

Тензор E будет относительным инвариантом тогда и только тогда, когда

$$d\sigma(\xi)(\Phi X) = 0,$$

что равносильно $\langle \sigma^\sharp, \xi \rangle = 0$, или по другому $\sigma^\sharp \perp \xi$, а значит, $\sigma^\sharp \in \mathfrak{L}$.

Тензор B будет абсолютным инвариантом в том и только том случае, когда будет справедливо тождество

$$\langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) - \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\sharp) - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) - d\sigma(\Phi X)(\Phi Y) = 0.$$

ТЕОРЕМА 1. *Тензор B – абсолютный инвариант при конформном преобразовании AC -структуры тогда и только тогда, когда $\sigma^\sharp \in \mathfrak{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тензор B – абсолютный инвариант тогда и только тогда, когда $\tilde{B} = B$, что равносильно условию

$$\langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) - \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\sharp) - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) - d\sigma(\Phi X)(\Phi Y) = 0$$

или, что то же самое, условию

$$\langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) - \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\sharp) = d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) + d\sigma(\Phi X)(\Phi Y). \quad (1)$$

Поменяем ролями X и Y , заметив, что

$$\langle \Phi^2 Y, X \rangle = \langle Y, \Phi^2 X \rangle, \quad \langle \Phi Y, X \rangle = -\langle Y, \Phi X \rangle.$$

Тогда

$$\langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) + \langle \Phi Y, X \rangle \Phi(\sigma^\sharp) = d\sigma(\Phi^2 Y)(\Phi^2 X) + d\sigma(\Phi Y)(\Phi X). \quad (2)$$

Сложим почленно (1) и (2):

$$2\langle \Phi^2 Y, X \rangle \Phi^2(\sigma^\sharp) = d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) + d\sigma(\Phi^2 Y)(\Phi^2 X) + d\sigma(\Phi X)(\Phi Y) + d\sigma(\Phi Y)(\Phi X). \quad (3)$$

Положим $Y = X$. Тогда (3) примет вид

$$-\|\Phi X\|^2 \Phi^2(\sigma^\sharp) = d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 X) + d\sigma(\Phi X)(\Phi X).$$

Пусть $X \in \mathfrak{L}$: $\|X\| = 1$. Тогда

$$-\Phi^2(\sigma^\sharp) = d\sigma(X)X + d\sigma(\Phi X)(\Phi X). \quad (4)$$

Полученное равенство означает, что $-\Phi^2(\sigma^\sharp) \in L(X, \Phi X)$.

Выберем $Y \in \mathfrak{L}$: $\|Y\| = 1$, $L(X, \Phi X) \cap L(Y, \Phi Y) = \{0\}$, при этом $\dim M > 3$. Тогда

$$-\Phi^2(\sigma^\sharp) = d\sigma(Y)Y + d\sigma(\Phi Y)(\Phi Y). \quad (5)$$

Сравнивая (4) и (5), в силу линейной независимости векторов $\{X, \Phi X, Y, \Phi Y\}$ получаем, в частности, что $d\sigma(X) = 0$, т.е. $\langle \sigma^\sharp, X \rangle = 0$, $X \in \mathfrak{L}$, а это значит, что $\sigma^\sharp = \text{grad } \sigma \in \mathfrak{M}$.

Обратно, если $\sigma^\sharp \in \mathfrak{M}$, то в силу (1), очевидно, $\tilde{B} = B$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть M – AC -многообразие размерности свыше 3. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) B – абсолютный инвариант конформного преобразования AC -структуры с определяющей функцией σ ;
- 2) G – относительный инвариант конформного преобразования AC -структуры с определяющей функцией σ ;
- 3) $\sigma^\sharp \in \mathfrak{M}$.

3. AC -многообразия косимплектического типа. Для дальнейших рассуждений напомним следующие сведения (см. [6], [12]).

AC -структура называется *нормальной*, если тензор Нейенхейса N_Φ ее структурного эндоморфизма удовлетворяет тождеству $N_\Phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$.

В работе [14] показано, что AC -структура нормальна тогда и только тогда, когда справедливо тождество

$$\nabla_X(\Phi)(\Phi Y) = \nabla_{\Phi X}(\Phi)(\Phi^2 Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (6)$$

AC -структура называется *контактной метрической структурой*, или *почти сасакиевой*, если $d\eta = 2\Omega$. Нормальная контактная метрическая структура называется *сасакиевой структурой*. Хорошо известно [12], [6], что AC -структура является сасакиевой тогда и только тогда, когда справедливо тождество

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle X, Y \rangle \xi - \eta(Y)X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (7)$$

AC -структура называется *почти косимплектической*, если $d\eta = 0$ и $d\Omega = 0$. Нормальная почти косимплектическая структура называется *косимплектической*

структурой. Хорошо известно [12], [6], что AC -структура косимплектична тогда и только тогда, когда справедливо тождество

$$\nabla_X(\Phi)Y = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (8)$$

Квазисасакиевой структурой называется нормальная почти контактная метрическая структура с замкнутой фундаментальной формой.

AC -структура называется *структурой Кенмоцу*, если справедливо тождество

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y \rangle \xi - \eta(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (9)$$

Отметим интересный факт. Пусть $\sigma^\sharp \in \mathfrak{M}$. Выясним, как при этом условии выглядит $\tilde{\nabla}$. Мы знаем, что

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(\Phi)Y &= \nabla_X(\Phi)Y + \langle X, \Phi Y \rangle \sigma^\sharp - \langle X, Y \rangle \Phi(\sigma^\sharp) - d\sigma(\Phi Y)X + d\sigma(Y)(\Phi X) \\ &= \nabla_X(\Phi)Y + \langle X, \Phi Y \rangle \sigma^\sharp + d\sigma(Y)(\Phi X). \end{aligned}$$

Если положить $\sigma^\sharp = -\xi$ (а значит, $d\sigma = -\eta$), получим

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \nabla_X(\Phi)Y - \langle X, \Phi Y \rangle \xi - \eta(Y)(\Phi X) = \nabla_X(\Phi)Y + \langle \Phi X, Y \rangle \xi - \eta(Y)(\Phi X).$$

Полученное тождество при условии, что $\nabla_X(\Phi)Y = 0$ является условием, при котором преобразованная AC -структура является структурой Кенмоцу.

Введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. AC -структурой косимплектического типа назовем AC -структуру с замкнутой контактной формой.

Примерами таких структур являются почти косимплектические структуры, а также структуры Кенмоцу. В самом деле, первое утверждение непосредственно следует из определения почти косимплектических структур, а второе из известного тождества [12], [6]

$$\nabla_X(\eta)Y = \langle X, Y \rangle \xi - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

С учетом первой группы структурных уравнений G -структуры и соотношения $\omega = \omega_0 = \pi^*\eta$ мы видим, что AC -структура будет структурой косимплектического типа тогда и только тогда, когда $C_{ab} = C^{ab} = 0$, $C_b^a = 0$, $C_a^a = C^a_a = 0$ или

$$\Phi_{[a,b]}^0 = \Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0 = 0, \quad \Phi_{\hat{a},b}^0 = \Phi_{a,b}^0 = 0, \quad \Phi_{a,0}^0 = \Phi_{\hat{a},0}^0 = 0.$$

Откуда следует, что $F^{ab} = F_{ab} = 0$, а также $G = 0$.

Пусть $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ – AC -структура косимплектического типа на многообразии M .

Поскольку η – замкнутая 1-форма, она локально точная, а значит, для любого $p \in \mathfrak{M}$ найдутся U_p и $\sigma \in C^\infty(U_p)$ такие, что $d\sigma = \eta$ (что равносильно $\sigma^\sharp = \xi$).

Произведем локально конформное преобразование AC -структуры с определяющей функцией σ , которое назовем каноническим. В силу $(**)$ при таком преобразовании справедливо тождество

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \nabla_X(\Phi)Y + \langle X, \Phi Y \rangle \xi + \eta(Y)(\Phi X) = \nabla_X(\Phi)Y - \langle \Phi X, Y \rangle \xi + \eta(Y)(\Phi X). \quad (10)$$

Сравнивая (8) и (9) с учетом (10) получаем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 2. *АС-структура косимплектического типа является косимплектической тогда и только тогда, когда при каноническом конформном преобразовании она переходит в структуру Кенмоцу.*

ТЕОРЕМА 3. *АС-структура косимплектического типа является структурой Кенмоцу тогда и только тогда, когда при каноническом конформном преобразовании она переходит в косимплектическую структуру.*

ТЕОРЕМА 4. *Структура Кенмоцу имеет следующий набор структурных тензоров:*

$$B = C = D = F = G = 0, \quad E = -\Phi^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – структура Кенмоцу, $\tilde{S}$ – отвечающая ей по каноническому конформному преобразованию косимплектическая структура. Из (8) вытекает, что все шесть структурных тензоров косимплектической структуры равны нулю. Из (***) вытекает, что структурные тензоры структуры S (с учетом того, что для канонического конформного преобразования $d\sigma = \eta$, $\sigma^\sharp = \xi$) равны нулю, за исключением тензора E , для которого выполнено тождество $E(X) + d\sigma(\xi)(\Phi^2 X) = 0$, что, очевидно, равносильно тому, что $E = -\Phi^2$.

ТЕОРЕМА 5. *АС-структура косимплектического типа при конформном преобразовании переходит в АС-структуру косимплектического типа тогда и только тогда, когда $\sigma^\sharp \in \mathfrak{M}$, где σ – определяющая функция конформного преобразования.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $d\eta = 0$. Кроме того, $\tilde{\eta} = e^{-\sigma}\eta$. Значит,

$$d\tilde{\eta} = -e^{-\sigma}d\sigma \wedge \eta + e^{-\sigma}d\eta = -e^{-\sigma}d\sigma \wedge \eta.$$

Тогда

$$d\tilde{\eta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d\sigma \wedge \eta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d\sigma \parallel \eta \quad \Leftrightarrow \quad \sigma^\sharp \parallel \xi \quad \Leftrightarrow \quad \sigma^\sharp \in \mathfrak{M}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *АС-структура косимплектического типа при каноническом конформном преобразовании переходит в АС-структуру косимплектического типа.*

В частности, с учетом теоремы 2 мы снова убеждаемся, что структура Кенмоцу является АС-структурой косимплектического типа.

4. Нормальные АС-многообразия. Пусть $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ – некоторая нормальная АС-структура, под действием конформного преобразования с определяющей функцией σ переходящая в АС-структуру $\tilde{S} = (\tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$. Согласно (*)

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y - \nabla_X(\Phi)Y = \langle X, \Phi Y \rangle \sigma^\sharp - \langle X, Y \rangle \Phi(\sigma^\sharp) - d\sigma(\Phi Y)X + d\sigma(Y)\Phi X. \quad (11)$$

В силу (6) структура $\tilde{S}$ будет нормальной тогда и только тогда, когда

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)(\Phi Y) = \tilde{\nabla}_{\Phi X}(\Phi)(\Phi^2 Y).$$

С учетом (11) будем иметь

$$\begin{aligned} & \langle X, \Phi^2 Y \rangle \sigma^\sharp - \langle X, \Phi Y \rangle (\Phi(\sigma^\sharp)) - d\sigma(\Phi^2 Y)X + d\sigma(\Phi Y)(\Phi X) \\ &= \langle \Phi X, \Phi^3 Y \rangle \sigma^\sharp - \langle \Phi X, \Phi^2 Y \rangle (\Phi(\sigma^\sharp)) - d\sigma(\Phi^3 Y)(\Phi X) + d\sigma(\Phi^2 Y)(\Phi^2 X). \end{aligned}$$

После очевидных сокращений получаем $-d\sigma(\Phi^2 Y)X = d\sigma(\Phi^2 Y)(\Phi^2 X)$, откуда $d\sigma(\Phi^2 Y)(\Phi^2 + \text{id}) = 0$, а значит, $d\sigma(\Phi^2 Y)\mathfrak{m}X = 0$.

В частности, положив $X = \xi$, получим, что $d\sigma(\Phi^2 Y) = 0$, а значит, $d\sigma \circ \Phi^2 = 0$, т.е. $d\sigma \circ \text{id} = 0$, откуда $d\sigma \circ (\text{id} - \eta \otimes \xi) = 0$, т.е. $d\sigma = d\sigma(\xi)\eta$, что означает $d\sigma \parallel \eta$, т.е. $\sigma^\# \in \mathfrak{M}$.

Обратно, если $\sigma^\# \in \mathfrak{M}$, то существует $t \in C^\infty(M)$ такое, что $\sigma^\# = t\xi$. Подставив это соотношение в формулу (11), получим, что

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y - \nabla_X(\Phi)Y = \langle X, \Phi Y \rangle t\xi + (t\eta)(Y)(\Phi X) = t(\langle X, \Phi Y \rangle \xi + \eta(Y)(\Phi X)),$$

откуда условие (6) нормальности преобразованной структуры $\tilde{S}$ выполняется очевидным образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(\Phi)\Phi Y - \tilde{\nabla}_{\Phi X}(\Phi)\Phi^2 Y \\ = t(-\langle \Phi X, \Phi Y \rangle \xi + \eta(\Phi Y)\Phi X + \langle \Phi^2 X, \Phi^2 Y \rangle \xi - \eta(\Phi^2 Y)\Phi^2 X) \equiv 0. \end{aligned}$$

Таким образом доказана

ТЕОРЕМА 6. *Нормальная АС-структура при конформном преобразовании переходит в нормальную АС-структуру тогда и только тогда, когда $\sigma^\# \in \mathfrak{M}$, где σ – определяющая функция конформного преобразования.*

СЛЕДСТВИЕ 3. *Нормальная АС-структура косимплектического типа при каноническом конформном преобразовании переходит в нормальную АС-структуру косимплектического типа.*

СЛЕДСТВИЕ 4. *Структура Кенмоцу является нормальной АС-структурой косимплектического типа.*

СЛЕДСТВИЕ 5. *Пусть f – конформное преобразование АС-структуры S , первый структурный тензор которой является абсолютным инвариантом преобразования f . Тогда, если S – структура косимплектического типа (соответственно нормальная структура), то ее образ $\tilde{S}$ – АС-структура косимплектического типа (соответственно нормальная АС-структура).*

СЛЕДСТВИЕ 6. *Пусть f – конформное преобразование АС-структуры S , второй структурный тензор которой является относительным инвариантом преобразования f . Тогда, если S – структура косимплектического типа (соответственно нормальная структура), то ее образ $\tilde{S}$ – АС-структура косимплектического типа (соответственно нормальная АС-структура).*

СЛЕДСТВИЕ 7. *Нетривиальное конформное преобразование косимплектической структуры S является нормальной структурой $\tilde{S}$ тогда и только тогда, когда существует $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ такая, что*

$$\nabla_X(\Phi)Y = f(\langle \Phi X, Y \rangle - \eta(Y)\Phi X).$$

Это утверждение из других соображений было получено в [11]. Заметим, что при $f = 1$ АС-структура $\tilde{S}$ является структурой Кенмоцу. В противоположность этому справедлива

ТЕОРЕМА 7. *Нетривиальное конформное преобразование сасакиевой структуры не может быть нормальной АС-структурой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: S \rightarrow \tilde{S}$ – нетривиальное конформное преобразование сасакиевой структуры с определяющей функцией σ . Пусть $\tilde{S}$ – нормальная АС-структура. Поскольку сасакиева структура нормальна по определению, из теоремы 6 вытекает, то $d\sigma = \lambda\eta$, для некоторой функции $\lambda \in C^\infty(M)$. Продифференцируем это равенство внешним образом:

$$0 = d\lambda \wedge \eta + \lambda d\eta = d\lambda \wedge \eta + 2\lambda\Omega.$$

Следовательно, $\Omega = -d\lambda/(2\lambda) \wedge \eta$. Отсюда вытекает, что $\Omega \wedge \Omega = 0$, что противоречит тому, что в силу контактности сасакиевой структуры и условия $\dim M > 3$ $\Omega \wedge \Omega \wedge \eta \neq 0$. Следовательно, предположение неверно, и $\tilde{S}$ не является нормальной структурой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Sasaki, *Almost Contact Manifolds*, Lect. Notes, **1–3**, Math. Inst. Tôhoku Univ., Tôhoku, 1965–1968.
- [2] S. Kobayashi, “Principal fibre bundle with 1-dimensional toroidal group”, *Tôhoku Math. J. (2)*, **8** (1956), 29–45.
- [3] D. E. Blair, *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*, Lect. Notes in Math., **509**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976.
- [4] D. E. Blair, “The theory of quasi-Sasakian manifolds”, *J. Differential Geometry*, **1** (1967), 331–345.
- [5] K. Kenmotsu, “A class of almost contact Riemannian manifolds”, *Tôhoku Math. J. (2)*, **24** (1972), 93–103.
- [6] D. E. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Progr. Math., **203**, Birkhäuser Boston inc., Boston, MA, 2002.
- [7] D. Chinea, J. C. Marrero, “Conformal changes of almost contact metric structures”, *Riv. Mat. Univ. Parma. (5)*, **1** (1992), 19–31.
- [8] D. Chinea, J. C. Morrero, “Conformal changes of almost cosymplectic manifolds”, *Rend. Mat. Appl. (7)*, **12:4** (1992), 849–867.
- [9] Z. Olszak, “Locally conformal almost cosymplectic manifolds”, *Colloq. Math.*, **57:1** (1989), 73–87.
- [10] В. Ф. Кириченко, В. А. Левковец, “О геометрии L -многообразий”, *Матем. заметки*, **79:6** (2006), 854–869.
- [11] В. Ф. Кириченко, Н. С. Баклашова, “Геометрия контактной формы Ли и контактный аналог теоремы Икуты”, *Матем. заметки*, **82:3** (2007), 347–360.
- [12] В. Ф. Кириченко, *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*, Типография МПГУ, М., 2003.
- [13] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. 2, Наука, М., 1981.
- [14] В. Ф. Кириченко, А. Р. Рустанов, “Дифференциальная геометрия квазисасакиевых многообразий”, *Матем. сб.*, **193:8** (2002), 71–100.

В. Ф. Кириченко

Московский педагогический государственный университет

Поступило

24.01.2008

И. В. Ускорев

Московский педагогический государственный университет

E-mail: uskorev@mail.ru