Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Богданов, Локализация положительного предельного множества почти периодической дискретной системы, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 2, 313–317

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4516>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:44:06

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Локализация положительного предельного множества почти периодической дискретной системы

А. Ю. Богданов

1. Введение. Движения многих динамических систем, являющихся математическими моделями непрерывных эволюционных процессов различной природы, описываются нормальными системами дифференциальных уравнений с периодической правой частью. При этом при дискретизации непрерывного периодического процесса, что связано с численным решением соответствующих уравнений на ЭВМ, получаются последовательности, вообще говоря, не периодические, а почти периодические. Если правая часть системы ДУ является почти периодической вектор-функцией, то свойство почти периодичности сохраняется и при дискретизации. Основу качественного анализа таких систем составляют свойства функции, почти периодической в смысле Бора, Бор-топология функции $f(t, x)$, почти периодической по t , и соответствующие дискретные аналоги этих понятий. Основы теории непрерывных почти периодических функций были заложены датским математиком Бором [1]. Основные теоремы о почти периодических функциях изложены (кроме книги Бора) в монографии [2]. Для дискретных почти периодических функций (последовательностей) некоторые основные результаты изложены в [3]. Заметим, что дискретные почти периодические системы представляют и самостоятельный интерес, причем новые результаты, касающиеся качественного поведения решений этих систем, регулярно появляются в печати [4]–[6]. Все это позволяет утверждать, что для исследования качественной динамики дискретных почти периодических систем целесообразно развивать специальные методы.

2. Инвариантность положительного предельного множества решения почти периодической системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [3]. Дискретная функция $f(n) = f_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *почти периодической* по n , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что любой отрезок $[k, k + N(\varepsilon)]$, $k \in \mathbb{Z}$, содержит по меньшей мере одно целое число p , для которого $\|f(n + p) - f(n)\| < \varepsilon$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Число p называется ε -*периодом*.

Смысл понятия дискретной почти периодической функции хорошо виден из того факта, что если $F(t)$ – непрерывная на $\mathbb{R}$ периодическая вектор-функция, то для любого δ последовательность $f(n) = F(n\delta)$ является дискретной почти периодической функцией.

Пусть $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$ – некоторое открытое множество, $C(\mathbb{Z} \times \Gamma, \mathbb{R}^m)$ есть множество непрерывных по x равномерно по n функций $f(n, x): \mathbb{Z} \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-97010-поволжье).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $f(n, x) \in C(\mathbb{Z} \times \Gamma, \mathbb{R}^m)$ называется *равномерной почти периодической* по n , если для любого $\varepsilon > 0$ и каждого компактного множества $D \subset \Gamma$ существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon, D)$, что любой отрезок $[k, k + N]$, $k \in \mathbb{Z}$, содержит по меньшей мере одно целое число p , для которого

$$\|f(n + p, x) - f(n, x)\| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in D.$$

Пусть $B(\mathbb{Z} \times \Gamma, \mathbb{R}^m)$ – подмножество множества $C(\mathbb{Z} \times \Gamma, \mathbb{R}^m)$, состоящее из всех непрерывных по x почти периодических по n функций $f(n, x)$. Превратим $B(\mathbb{Z} \times \Gamma, \mathbb{R}^m)$ в метрическое пространство. Пусть $\{D_n\} \subset \Gamma$ – последовательность компактов такая, что

$$\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n, \quad D_n \subset D_{n+1}.$$

Для каждого $n \geq 1$ введем квазиметрику на $B(\mathbb{Z} \times \Gamma, \mathbb{R}^m)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{n,\infty} &= \sup\{\|f(n, x) - g(n, x)\| : n \in \mathbb{Z}, x \in D_n\} \\ b_n(f, g) &= \frac{\|f - g\|_{n,\infty}}{1 + \|f - g\|_{n,\infty}}. \end{aligned}$$

Назовем *метрикой типа Бора* выражение

$$\rho_B(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n(f, g),$$

где $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ является любым сходящимся рядом с положительными членами, например, $c_n = 2^{-n}$. Так как $D_n \subset D_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, то метрическое пространство $B(\mathbb{Z} \times \Gamma, \mathbb{R}^m)$ полно по отношению к расстоянию, определенному выше. Пространство $B(\mathbb{Z} \times \Gamma, \mathbb{R}^m)$ с введенной метрикой будем называть *Бор-пространством* почти периодических дискретных функций.

ЛЕММА 1. Пусть $f(n, x) \in B(\mathbb{Z} \times \Gamma, \mathbb{R}^m)$, тогда $f(n, x)$ ограничена и равномерно непрерывна на любом множестве $\mathbb{Z} \times D$, где $D \subset \Gamma$ – компакт.

ЛЕММА 2. Пусть $f(n, x) \in B(\mathbb{Z} \times \Gamma, \mathbb{R}^m)$. Тогда из любой последовательности $\{n_k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{n_{k_j}\}$ такую, что последовательность функций $\{f_j(n, x) = f(n + n_{k_j}, x)\}$ равномерно компактна на $\mathbb{Z} \times D$, где $D \subset \Gamma$ – компакт.

Леммы 1 и 2 являются дискретными аналогами соответствующих непрерывных результатов из [7], [8] и могут быть доказаны аналогичным образом.

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$x(n + 1) = f(n, x(n)), \quad f(n, 0) \equiv 0, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^m$, $f \in B(\mathbb{Z} \times \Gamma, \mathbb{R}^m)$. Для любой точки $(n_0, x_0) \in \mathbb{Z} \times \Gamma$ существует единственное движение $x(n, n_0, x_0)$, $n \geq n_0$, системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x_0 = x(n_0, n_0, x_0)$. Из определения $f(n, x)$ и леммы 1 следует, что $f(n, x)$ ограничена и равномерно непрерывна на любом множестве $\mathbb{Z} \times D$, где D – компакт в Γ .

Пусть $n_k \rightarrow +\infty$ – произвольная последовательность целых чисел. По лемме 2 существует подпоследовательность $n_{k_j} \rightarrow +\infty$, для которой последовательность $\{f_j(n, x) = f(n + n_{k_j}, x)\}$ сходится к некоторой функции $f^*(n, x)$ равномерно по совокупности переменных (n, x) на любом множестве $\mathbb{Z} \times D$, где $D \subset \Gamma$ – компакт. То есть $f(n + n_{k_j}, x) \rightarrow f^*(n, x)$ в $B(\mathbb{Z} \times \Gamma, \mathbb{R}^m)$ и функция $f^*(n, x)$ равномерно непрерывна по x на каждом множестве $\mathbb{Z} \times D$ и почти периодична по n равномерно по x на этом множестве.

Систему разностных уравнений

$$x(n + 1) = f^*(n, x(n)) \quad (2)$$

будем называть *предельной* к системе (1). Отличительной особенностью системы (1) и ее предельных систем (2) от подобного построения в работе [9] для неавтономной дискретной системы является то, что в семействе предельных систем содержится также и исходная система. Покажем это. Возьмем произвольные последовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$ и $m_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$. По определению 2 для компакта $D \subset \Gamma$ существуют последовательности $N_k = N(\varepsilon_k, D)$, $n_k \in [m_k, m_k + N_k]$, такие, что

$$\|f(n + n_k, x) - f(n, x)\| < \varepsilon_k \quad \forall (n, x) \in \mathbb{Z} \times D.$$

Отсюда, переходя к пределу при $k \rightarrow +\infty$, получаем, что при $n_k \rightarrow +\infty$ имеет место соотношение $f(n_k + n, x) \rightarrow f(n, x)$ в $B(\mathbb{Z} \times \Gamma, \mathbb{R}^m)$. Взаимосвязь решений систем (1) и (2) определяется следующей леммой.

ЛЕММА 3 [9]. Пусть функция $f^*(n, x) \in B(\mathbb{Z} \times \Gamma, \mathbb{R}^m)$ есть предельная к $f(n, x)$ относительно последовательности $n_k \rightarrow +\infty$, $x_0^{(k)} \rightarrow x_0$. Тогда последовательность решений системы (1) $x_k(n) = x(n + n_k, n_0 + n_k, x_0^{(k)})$ сходится к решению $y(n) = y(n, n_0, x_0)$ предельной системы (2) равномерно по $n \in [-N, N]$ при любом $N \in \mathbb{N}$.

Предельные точки и положительное предельное множество движений системы (1) определяются стандартным образом. Важнейшим свойством положительного предельного множества $\Omega^+(n_0, x_0)$ движения $x(n, n_0, x_0)$ почти-периодической системы (1) является свойство его инвариантности.

ТЕОРЕМА 1. Пусть движение $x(n, n_0, x_0)$ системы (1) ограничено

$$\|x(n, n_0, x_0)\| \leq H_1 < +\infty \quad \forall n \geq n_0.$$

Тогда положительное предельное множество $\Omega^+(n_0, x_0)$ этого движения инвариантно по отношению к семейству предельных систем (2), а именно, для каждой точки $p \in \Omega^+(n_0, x_0)$ существует предельная система $x(n + 1) = f^*(n, x(n))$, решение которой $y(n, 0, p) \in \Omega^+(n_0, x_0)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n_k \rightarrow +\infty$ есть последовательность, для которой $x_k = x(n_k, n_0, x_0) \rightarrow p$ при $k \rightarrow +\infty$. Из компактности системы (1) следует, что существует подпоследовательность $n_{k_j} \rightarrow +\infty$ и функция $f^*(n, x) \in B(\mathbb{Z} \times \Gamma, \mathbb{R}^m)$ такие, что последовательность $\{f_{j_j}(n, x) = f(n + n_{k_j}, x)\}$ сходится при $j \rightarrow +\infty$ к $f^*(n, x)$. Из решения $x(n, n_0, x_0)$ составляем последовательность решений $x(n, n_{k_j}, x_{k_j}) = x(n + n_{k_j}, n_0, x_0)$. Согласно лемме 3 эта последовательность при $j \rightarrow +\infty$ сходится к решению $y(n, 0, p)$ предельной системы $x(n + 1) = f^*(n, x(n))$ равномерно по $n \in [-N, N]$ для любого $N \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что решение $y(n, 0, p)$ определено и ограничено для всех $n \in \mathbb{Z}$, причем каждая точка $y(n, 0, p)$ при фиксированном $n \in \mathbb{Z}$ является предельной для последовательности $x_j = x(n + n_{k_j}, n_0, x_0)$. Следовательно, $y(n, 0, p) \in \Omega^+(n_0, x_0)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Теорема доказана.

3. Синтез прямого метода Ляпунова и метода предельных уравнений. Предположим, что для системы (1) существует непрерывная по x , почти периодическая по n функция Ляпунова $V(n, x): \mathbb{Z} \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, $V(n, 0) \equiv 0$, первая разность которой в силу системы (1) является неположительной, $\Delta V_{(1)}(n, x) = V(n + 1, f(n, x)) - V(n, x) \leq 0$ для всех $(n, x) \in \mathbb{Z} \times \Gamma$.

Семейство сдвигов $\{V_k(n, x) = V(k + n, x)\}$ оказывается компактным в пространстве $B_1(\mathbb{Z} \times \Gamma, \mathbb{R})$. Поэтому для функции $V(n, x)$ можно определить семейство предельных функций $\{V^*(n, x)\}$, т.е. таких функций, для каждой из которых найдется последовательность $n_k \rightarrow +\infty$ такая, что для $\{V_{n_k}(n, x) = V(n + n_k, x)\}$ имеем $\rho_{B_1}(V_{n_k}(n, x), V^*(n, x)) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Так как $V(n, x)$ — почти периодическая по n функция, то можно показать, что среди предельных к ней функций $V^*(n, x)$, найдется функция, тождественно совпадающая с $V(n, x)$, т.е. существует последовательность $m_k \rightarrow +\infty$ такая, что $V(m_k + n, x) \rightarrow V(n, x)$ в $B_1(\mathbb{Z} \times \Gamma, \mathbb{R})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Система $x(n+1) = f^*(n, x)$ и $V^*(n, x)$ образуют предельную пару, если они являются предельными для одной и той же последовательности $n_k \rightarrow +\infty$.

Пусть (f^*, V^*) есть некоторая предельная пара. Обозначим через H^+ множество, образуемое всеми движениями системы $x(n+1) = f^*(n, x)$, содержащимися в множестве $\{\Delta V^*(n, x) = 0\}$, т.е. максимальное инвариантное относительно системы $x(n+1) = f^*(n, x)$ подмножество множества $\{\Delta V^*(n, x) = 0\}$. Через H_*^+ обозначим объединение множеств H^+ по всем предельным парам (f^*, V^*) .

ТЕОРЕМА 2 (О локализации положительного предельного множества). Пусть для системы (1) существует функция Ляпунова $V(n, x) \in B_1(\mathbb{Z} \times \Gamma, \mathbb{R})$, удовлетворяющая условию $\dot{V}_{(1)}(n, x) \leq 0$. Тогда для каждого движения $x(n, n_0, x_0)$, ограниченного компактом $D \subset \Gamma$ при $n \geq n_0$, положительное предельное множество $\Omega^+(n_0, x_0) \subset H_*^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \in \Omega^+(n_0, x_0)$ и существует последовательность $n_k \rightarrow +\infty$ такая, что $x_k = x(n_k, n_0, x_0) \rightarrow p$ при $k \rightarrow +\infty$. Определим подпоследовательность $n_{k_j} \rightarrow +\infty$, для которой $f(n_{k_j} + n, x) \rightarrow V^*(n, x)$ в $B_1(\mathbb{Z} \times \Gamma, \mathbb{R})$. Как и в теореме 1, последовательность функций $x(n_{k_j} + n, n_0, x_0)$ будет сходиться к решению $y(n, 0, p)$ системы $x(n+1) = f^*(n, x(n))$ равномерно по $n \in [-N, N]$ для любого $N \in \mathbb{N}$. Функция $V[n] = V(n, x(n, n_0, x_0))$ в силу условия $\Delta V(n, x) \leq 0$ есть монотонно убывающая функция времени, и в силу почти периодичности она ограничена на множестве $\mathbb{Z} \times \Gamma$. Поэтому существует предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(n, x(n, n_0, x_0)) = c_0$, из которого при каждом $n \in \mathbb{Z}$ имеем

$$V(n + n_{k_j}, x(n + n_{k_j}, n_0, x_0)) \rightarrow V^*(n, y(n, 0, p)) = c_0 \quad \text{при } j \rightarrow +\infty.$$

Поэтому $\Delta V^*(n, x)$ вдоль решения $y(n, 0, p)$ равна нулю: $\Delta V^*(n, y(n, 0, p)) \equiv 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}^+$. Теорема доказана.

Доказанная теорема является важным частным случаем соответствующей теоремы автора для общей неавтономной дискретной системы [9] и является развитием подхода Миллера [10] для непрерывных систем, где предполагалась оценка $\Delta V(n, x) \leq -W(x) \leq 0$, множество H^+ определялось как максимальное инвариантное относительно семейства предельных систем подмножество множества $\{W(x) = 0\}$. Это существенно сужает область применения прямого дискретного аналога теоремы Миллера как в теоретическом плане, так и при решении конкретных задач. Кроме того, теорема 2 обобщает теорему Халаная [3; с. 32].

ТЕОРЕМА 3. Предположим, что

- 1) для системы (1) существует определенно положительная функция Ляпунова $V(n, x)$, $\Delta V_{(1)}(n, x) \leq 0$;
- 2) для любой предельной пары (f^*, V^*) множество $\{\Delta V^*(n, x) = 0\}$ не содержит движений системы $x(n+1) = f^*(n, x(n))$, кроме нулевого $x \equiv 0$.

Тогда состояние $x = 0$ системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно показать, что любая почти периодическая функция допускает бесконечно малый высший предел. Отсюда следует равномерная устойчивость $x = 0$ [3]. Из условия теоремы следует, что H_*^+ состоит из тривиального движения $x \equiv 0$. Следовательно, для каждого движения системы (1) будет иметь место соотношение $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n, n_0, x_0) = 0$. Аналогично [9] можно показать, что это свойство выполняется равномерно по (n_0, x_0) , т.е. имеет место равномерная асимптотическая устойчивость. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Если выполнено условие 1) теоремы 3, а также

- 2') множество $\{\Delta V(n, x) = 0\}$ не содержит движений системы (1), кроме $x \equiv 0$.

Тогда состояние $x = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво равномерно по x_0 (эквивасимптотически устойчиво).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию 1) функция $V[n] = V(n, x(n, n_0, x_0)) \rightarrow c_0$ при $n \rightarrow +\infty$. Пусть $n_k \rightarrow +\infty$ есть последовательность, которой определяется предельная пара (f, V) . Составим последовательность функций $x_k(n) = x(n + n_k, n_0, x_0)$. По лемме 3 эта последовательность сходится к решению $y(n, 0, p)$ системы $x(n + 1) = f(n, x(n))$. При этом $y(n, 0, p) \in \{\Delta V(n, x) = 0\}$. Итак, вдоль каждого решения системы (1) $x(n, n_0, x_0)$ функция $V(n, x(n, n_0, x_0)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Это влечет асимптотическую устойчивость нулевого движения системы (1), равномерную по x_0 . Теорема доказана.

Теоремы 3 и 4 позволяют конвертировать фундаментальный результат теоремы 2 в результаты, имеющие значительную практическую ценность.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Бор, *Почти периодические функции*, Гостехиздат, М., 1934. [2] Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции*, Гостехиздат, М., 1953. [3] А. Халанай, Б. Векслер, *Качественная теория импульсных систем*, Мир, М., 1971. [4] О. В. Кириченко, *Сиб. матем. журн.*, **39**:1 (1998), 45–48. [5] С. М. Добровольский, А. В. Рогозин, *Сиб. матем. журн.*, **46**:1 (2005), 98–105. [6] А. О. Игнатьев, *Дифференц. уравнения*, **40**:1 (2004), 98–103. [7] G. R. Sell, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127**:2 (1967), 241–262; *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127**:2 (1967), 263–283. [8] Б. М. Левитан, В. В. Жиков, *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения*, Изд-во МГУ, М., 1978. [9] А. Ю. Богданов, *Комбинаторные и вычислительные методы в математике*, Сб. научн. тр. Сиб. отдел. РАН, Омск, 1999, 82–94. [10] R. K. Miller, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **115** (1965), 400–416.

А. Ю. Богданов

Ульяновский государственный университет

E-mail: BogdanovAYu@ulsu.ru

Поступило

30.01.2008