Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Т. Батикян, С. А. Григорян, Об алгебраическом расширении $A(E)$, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 5, 649–653

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm452>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 06:03:42

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОМ РАСШИРЕНИИ $A(E)$

Б. Т. Батикян, С. А. Григорян

Алгебраическое расширение алгебры $A(E)$, где E – компакт в $\mathbb{C}$ с непустой связной внутренностью, приводит к банаховой алгебре B функций, голоморфных на некотором аналитическом множестве $K^\circ \subset \mathbb{C}^2$ с краем bK и непрерывных вплоть до bK . Изучаются особые точки спектра алгебры B и их дефекты. В случае, когда B – равномерная алгебра, оценивается глубина B в алгебре $C(bK)$. В частности, получены условия, обеспечивающие максимальность B на bK .

Библиография: 11 названий.

Пусть E – компактное подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с непустой и связной внутренностью E° , $A = A(E)$ – равномерная алгебра всех непрерывных на E и голоморфных в E° функций, и пусть $A[t]$ – алгебра всех полиномов над A . Рассмотрим унитарный полином

$$p = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$$

из $A[t]$ и обозначим через B алгебраическое расширение алгебры A , порожденное полиномом p , т.е. положим $B = A[t]/(p)$, где (p) – главный идеал в $A[t]$, образованный p . (Подробнее об алгебраическом расширении, называемом также расширением Аренса–Гофмана, коммутативной банаховой алгебры см. [1], [2].)

Мы будем предполагать, что дискриминант d полинома p есть ненулевой элемент алгебры A , и, не ограничивая общности, что коэффициенты p подчинены условию $\sum \|a_i\| \leq 1$.

Расширение B есть полупростая коммутативная банахова алгебра относительно нормы

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} f_k t^k \right\| = \sum_{k=0}^{n-1} \|f_k\|, \quad f_k \in A, \quad (1)$$

причем алгебра A изометрически и изоморфно вкладывается в B . Спектром (пространством максимальных идеалов) для алгебры B служит компакт

$$K = \{(z, \lambda) \in E \times \mathbb{C} : P(z, \lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1} a_1(z) + \dots + a_n(z) = 0\},$$

а естественное отображение $\pi : K \rightarrow E$ спектров алгебр B и A , вызванное вложением A в B , есть n -листное и, вообще говоря, разветвленное накрытие, голоморфное над E° . Известно также, что граница Шилова ∂B алгебры B совпадает с прообразом $\pi^{-1}(bE)$ топологической границы bE ($= \partial A$) компакта E .

Для удобства прообраз $\pi^{-1}(bE)$ мы будем обозначать через bK , а через K° – прообраз внутренности компакта E .

Функцию g называют *B -голоморфной* в точке $x \in K$, если имеется такая открытая окрестность $V \subset K$ точки x , что g равномерно на $\bar{V}$ приближается элементами алгебры B . Если x не является точкой ветвления накрытия π , т.е. $d(\pi(x)) \neq 0$, то эквивалентное определение заключается в существовании такой окрестности $\bar{V}$, гомеоморфной $\pi(\bar{V})$, что функция $\pi^{-1} \circ g$ принадлежит $A(\pi(\bar{V}))$.

Приведем применительно к рассматриваемой ситуации определения особой точки спектра полупростой коммутативной банаховой алгебры и дефекта такой точки, предложенные в нашей работе [3]. Пусть $x \in K$, $\mathcal{O}_B(x)$ – алгебра ростков всех B -голоморфных в окрестности x функций, $\mathcal{O}_B^c(x)$ (соответственно $\mathcal{O}_B^*(x)$) – алгебра ростков всех тех функций, которые непрерывны (соответственно ограничены) в окрестности x и B -голоморфны в ее проколотовой окрестности. Положим

$$m_B(x) = \dim \mathcal{O}_B^c(x) / \mathcal{O}_B(x)$$

(*кратность точки x*) и

$$r_B(x) = \dim \mathcal{O}_B^*(x) / \mathcal{O}_B^c(x)$$

(*порядок приводимости x*). Дефектом точки x называется число

$$\delta_B(x) = m_B(x) + r_B(x),$$

а точка x спектра алгебры B считается особой, если $\delta_B(x) > 0$.

Например, всякая неизолированная точка bK является особой, так как согласно теореме 4.3 из [3] дефект такой точки бесконечен.

Пусть теперь $x \in K^\circ$. Понятно, что K° – одномерное аналитическое множество в $\mathbb{C}^2$, а пучок ростков $\{\mathcal{O}_B(x)\}_{x \in K^\circ}$ является структурным пучком для K° . Поскольку $\mathcal{O}_B^c(x)$ совпадает с целым замыканием локальной алгебры $\mathcal{O}_B(x)$, то из когерентности структурного пучка следует:

- 1) конечность дефекта $\delta_B(x)$ для всякого x из K° ;
- 2) эквивалентность приведенного выше определения особой точки обычному определению особой точки одномерного аналитического множества.

Отметим также, что если K° – алгебраическое множество, т.е. если коэффициенты полинома p сами являются полиномами от z , то дефект точки $x \in K^\circ$ равен введенному Серром числу δ_x (см. [4, с. 84]).

В том случае, когда аналитическое множество K° неприводимо, дефект точки эффективно описывается формулой Милнора

$$2\delta_B(x) = \mu(x) + r_B(x),$$

где $\mu(x)$ – число Милнора точки x , т.е. логарифмический вычет в x градиента голоморфной функции $P(z, \lambda)$ [5, с. 91]. Если точка x неприводима, то $2\delta_B(x) = \mu(x)$, если же $r_B(x) > 0$, то

$$2\delta_B(x) \geq (r_B(x) + 1)r_B(x).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Последнее неравенство означает, что при алгебраическом расширении алгебры аналитических функций кратность $m_B(x)$ и порядок приводимости $r_B(x)$ точки спектра расширения подчинены определенным соотношениям. В общем случае, как показывают теоремы 3.1 и 4.1 из [3], эти числа могут быть совершенно произвольными.

Заметим также, что множество $\text{Sing}(K^\circ)$ особых точек K° дискретно и содержится (вообще говоря, строго) во множестве $\pi^{-1}(N_d \cap E^\circ)$ точек ветвления накрытия $\pi|_{K^\circ}$, где N_d – множество нулей дискриминанта d .

Предполагая конечность множества $\text{Sing}(K^\circ)$, рассмотрим следующие равномерные алгебры: $\mathfrak{B}$ – всех B -голоморфных функций на K , а $\mathfrak{A}$ – всех ограниченных и B -голоморфных функций на

$$K^* = K \setminus \text{Sing}(K^\circ).$$

Очевидно, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ и, как нетрудно убедиться, $\partial\mathfrak{A} = \partial\mathfrak{B} = bK$.

ТЕОРЕМА 1. Если множество $\text{Sing}(K^\circ)$ содержит конечное число точек $x_1, \dots, x_m$, то

$$\dim \mathfrak{A}/\mathfrak{B} = \sum_{i=1}^m \delta_B(x_i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на компакте K пучок $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_B(x)\}_{x \in K}$ ростков B -голоморфных функций и пучок $\mathcal{O}' = \{\mathcal{O}'(x)\}_{x \in K}$, где $\mathcal{O}'(x) = \mathcal{O}_B(x)$, если $x \neq x_i$, и $\mathcal{O}'(x) = \mathcal{O}_B^*(x)$, если $x = x_i$. Понятно, что $\mathcal{O}$ есть подпучок $\mathcal{O}'$. Точная последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}'/\mathcal{O} \rightarrow 0$$

порождает точную последовательность

$$0 \rightarrow H^0(K, \mathcal{O}) \rightarrow H^0(K, \mathcal{O}') \rightarrow H^0(K, \mathcal{O}'/\mathcal{O}) \rightarrow H^1(K, \mathcal{O})$$

групп когомологий компакта K с коэффициентами в этих пучках. Нетрудно убедиться, что алгебры сечений $H^0(K, \mathcal{O})$ и $H^0(K, \mathcal{O}')$ совпадают соответственно с алгебрами $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$, а пучок $\mathcal{O}'/\mathcal{O}$ сосредоточен на конечном множестве $\text{Sing}(K^\circ)$ и

$$\dim H^0(K, \mathcal{O}'/\mathcal{O}) = \sum_{i=1}^m \delta_B(x_i).$$

Учитывая тривиальность группы $H^1(K, \mathcal{O})$ (см. [6, теорема 3.1]), получаем требуемое равенство.

Прежде чем перейти к следующей теореме, отметим, что спектр $S(\mathfrak{B})$ алгебры $\mathfrak{B}$ совпадает с K [7] и что согласно теореме 1 естественная проекция спектров $\rho: S(\mathfrak{A}) \rightarrow K$ биективна над K^* .

ТЕОРЕМА 2. Если

- 1) множество точек пика алгебры A совпадает с bE ,
- 2) дискриминант d не обращается в нуль на bE ,
- 3) аналитическое множество K° неприводимо,

то алгебра $\mathfrak{A}$ есть максимальная подалгебра алгебры $C(bK)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим предварительно, что из условия 2) теоремы следует эквивалентность нормы (1) $\sup$ -норме на K [8], а тогда условие 3) обеспечит, как легко видеть, совпадение алгебр B и $\mathfrak{B}$.

Пусть $\mathfrak{D}$ – некоторая равномерная алгебра на bK , содержащая $\mathfrak{A}$, и $\sigma: S(\mathfrak{D}) \rightarrow S(\mathfrak{A})$ – соответствующая проекция спектров. Положим $\tau = \sigma \circ \rho$ и обозначим через F образ отображения τ в K . Ясно, что $bK \subset F$.

Предположим, что bF содержит регулярную точку x из $K^\circ \cap K^*$. Тогда найдутся такие замкнутая окрестность $\bar{V}$ точки x и функция $g \in b_{\bar{V}}$, что $\bar{V} \cap bK = \emptyset$, а g биголоморфно отображает $\bar{V}$ на замкнутый диск. В частности, $\tau^{-1}(\bar{V})$ есть $\mathfrak{D}$ -выпуклый компакт в $S(\mathfrak{D})$, а функция $h = \tau \circ g$ принадлежит $\mathfrak{D}_{\tau^{-1}(\bar{V})}$. Так как $x \in bF$, то

$$g(x) \in bg(F \cap \bar{V}) \subset h(\partial \mathfrak{D}_{\tau^{-1}(\bar{V})}).$$

Но согласно локальному принципу Росси

$$\partial \mathfrak{D}_{\tau^{-1}(\bar{V})} \subset \tau^{-1}(b\bar{V}),$$

т.е. $g(x) \in g(b\bar{V})$, что невозможно.

Таким образом,

$$bF \subset bK \cup \text{Sing}(K^\circ).$$

Но тогда в силу неприводимости K° либо

$$F \subset bK \cup \text{Sing}(K^\circ),$$

либо $K^* \subset F$. Далее, из условия 1) следует, что каждая точка bK есть точка пика для $\mathfrak{B}$, и, значит, отображение τ инъективно над bK .

а) Пусть $F \subset bK \cup \text{Sing}(K^\circ)$. Так как $bK \subset F$, то по теореме Шилова об идемпотентах $S(\mathfrak{D}) = bK$. Но тогда согласно теореме 3 из [9] $\mathfrak{D}$ содержит алгебру $C(bE)$. В частности, максимальные множества антисимметрии алгебры $\mathfrak{D}$ должны содержаться в слоях

$$(\tau \circ \pi)^{-1}(z), \quad z \in bE.$$

Поскольку все эти слои конечны, согласно теореме Шилова–Бишопа $\mathfrak{D} = C(bK)$.

б) Пусть $F = K$. Заметим, что функция $\tau \circ \pi$ принадлежит алгебре $\mathfrak{D}$, а слои

$$(\tau \circ \pi)^{-1}(z), \quad z \in bE$$

содержат не более n точек. Согласно теореме Сеничкина (см. [10, теорема 4]) для любого $z \in E^\circ$ слой $(\tau \circ \pi)^{-1}(z)$ также содержит не более n точек. В частности, отображение σ биективно над K^* , и элементы алгебры $\mathfrak{D}$ можно рассматривать как ограниченные непрерывные функции на K^* . Если $x \in K^* \cap K^\circ$, то найдется такая окрестность $\bar{V}$ точки x , которая биголоморфна диску, а $\mathfrak{A}_{\bar{V}}$ изоморфна диск-алгебре. Так как $S(\mathfrak{D}) = \bar{V}$ и $\partial \mathfrak{D}_{\bar{V}} = b\bar{V}$, то по теореме Вермера о максимальнойности $\mathfrak{A}_{\bar{V}} = \mathfrak{D}_{\bar{V}}$. Если, наконец, $x \in bK^\circ$, то выберем такой открытый диск Δ с центром в $\pi(x)$, что $\bar{\Delta} \cap E$ гомеоморфно $\pi^{-1}(\bar{\Delta} \cap E)$, и обозначим через U ту связную компоненту $\Delta \cap E^\circ$, замыкание которой содержит $\pi(x)$. Положим $\bar{V} = \pi^{-1}(\bar{U})$ и заметим, что $\mathfrak{A}_{\bar{V}}$ изоморфна алгебре $A(\bar{U})$, поскольку $A(\bar{U}) = A_{\bar{U}}$. Но в силу условия 1) алгебра $A(\bar{U})$ максимальна

на $b\bar{U}$ (см., например, [10]), что так же, как и выше, приводит к равенству $\mathfrak{D}_{\bar{V}} = \mathfrak{A}_{\bar{V}}$. Итак, в случае б) $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}$, и теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 позволяют описать тип алгебраического расширения алгебры $A(E)$. Напомним, что *типом* $t(B)$ равномерной алгебры B называется верхняя грань длин цепочек равномерных алгебр, соединяющих B с $C(bK)$. Максимальная алгебра суть алгебра типа 1, а тип подалгебры конечной коразмерности k максимальной алгебры равен $k + 1$ (см. [11]).

СЛЕДСТВИЕ. *В условиях теоремы 2 равномерная алгебра B является алгеброй конечного типа на bK , причем*

$$t(B) = \sum_{x \in \text{Sing}(K^\circ)} \delta_B(x) + 1.$$

В частности, если K° – неособое аналитическое множество, то B максимальна в $C(bK)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если условие 2) теоремы заменить более слабым предположением конечности множества $\text{Sing}(K^\circ)$, то повторяя доказательство, мы установим максимальность на bK алгебры $\mathfrak{A}^*$ всех тех непрерывных ограниченных функций на K^* , которые B -голоморфны на $K^\circ \setminus \text{Sing}(K^\circ)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Arens R., Hoffman K. Algebraic extensions of normed algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1956. V. 7. P. 203–210.
- [2] Lindberg J. A. Algebraic extensions of commutative Banach algebras // Pacific J. Math. 1964. V. 14. P. 559–583.
- [3] Batikyan B. T., Grigorian S. A. Singular points of spectra of uniform algebras // J. Cont. Math. An. 1998. V. 33. № 1. P. 1–16.
- [4] Серр Ж. Алгебраические группы и поля классов. М.: Мир, 1968.
- [5] Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971.
- [6] Rickart C. E. Analytic functions of an infinite numbers of complex variables // Duke Math. J. 1969. V. 36. P. 581–597.
- [7] Rickart C. E. The maximal ideal space of functions locally approximable in a function algebra // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. V. 17. P. 1320–1326.
- [8] Heuer G. A., Lindberg J. A. Algebraic extensions of continuous function algebra // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. V. 14. P. 337–342.
- [9] Батикян Б. Т., Григорян С. А. О равномерных алгебрах, содержащих $A(K)$ // Изв. АН АрмССР. Матем. 1989. Т. 24. № 6. С. 547–556.
- [10] Сеничкин В. Н. Субгармонические функции и аналитическая структура в пространстве максимальных идеалов равномерной алгебры // Матем. сб. 1979. Т. 108. № 1. С. 115–133.
- [11] Батикян Б. Т., Григорян С. А. О функциональных алгебрах конечного типа // УМН. 1974. Т. 29. № 6. С. 155–166.

(Б. Т. Батикян) Институт математики АН Армении, г. Ереван
(С. А. Григорян) Казанский государственный университет
E-mail: bag@instmath.sci.am, Suren.Grigorian@ksu.ru

Поступило
09.02.1999
Исправленный вариант
12.02.2002