Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Якимив, О числе A -отображений, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 1, 139–147

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4521>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:25:54

О числе A -отображений

А. Л. Якимив

Пусть $\mathfrak{S}_n$ – полугруппа отображений множества из n элементов в себя, A – некоторое фиксированное подмножество множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, $V_n(A)$ – множество отображений из $\mathfrak{S}_n$, размеры контуров которых принадлежат множеству A . Отображения из $V_n(A)$ принято называть A -отображениями. Рассмотрим случайное отображение σ_n , равномерно распределенное на $V_n(A)$. Пусть ν_n – число компонент, а λ_n – число циклических точек случайного отображения σ_n . В статье для определенного класса множеств A получена асимптотика числа элементов множества $V_n(A)$ и доказаны предельные теоремы для случайных величин ν_n и λ_n при $n \rightarrow \infty$.

Библиография: 27 названий.

1. Введение. Пусть $\mathfrak{S}_n$ – симметрическая полугруппа однозначных отображений множества X из n элементов в себя. Граф отображения $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ является ориентированным графом $\Gamma(X, \sigma)$, вершины которого $x, y \in X$ соединены дугой (x, y) , если $y = \sigma(x)$. Каждый граф $\Gamma(X, \sigma)$ состоит из связанных компонент, причем компонента состоит из одного контура и деревьев, корнями которых являются вершины контура, называемые циклическими элементами. Все дуги деревьев ориентированы в направлении к корням. Обозначим через $V_n = V_n(A)$ совокупность отображений $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, для которых размеры контуров соответствующих графов $\Gamma(X, \sigma)$ являются элементами заданной последовательности $A \subseteq \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Такие отображения называются A -отображениями. Более подробно об A -отображениях см. в книгах Сачкова [1]–[3].

Через $T_n = T_n(A)$ обозначим подмножество отображений $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, которые являются взаимно однозначными отображениями, т.е. некоторыми перестановками множества X . Пусть $\sigma_n = \sigma_n(A)$ – случайное отображение, равномерно распределенное на $V_n(A)$, а $\tau_n = \tau_n(A)$ – случайная подстановка, равномерно распределенная на $T_n(A)$. В ряде работ изучались асимптотические свойства числа циклов и некоторых других числовых характеристик случайной подстановки $\tau_n(A)$, а также числа элементов множества $T_n(A)$ при $n \rightarrow \infty$ в широком классе множеств A (см., например, статьи Бендера [4], Болотникова, Сачкова и Тараканова [5], Вольтце [6], Грушо [7], Ивченко и Медведева [8], Колчина [9], Колчина [10], Манставичюса [11], Минеева и Павлова [12], Павлова [13], Тимашева [14], автора [15], более подробная библиография содержится в книге [15]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00563).

Аналогичные задачи для случайных A -отображений $\sigma_n(A)$ с множеством A общего вида практически не решались, исключение здесь составляют статьи Сачкова [16], [17]. Тем не менее, отметим, что в случаях $A = \{1\}$ и $A = \mathbb{N}$ существует глубокая и продвинутая теория (см., например, книгу Павлова [18] и книги Колчина [19], [20]). Речь в этих книгах идет соответственно о случайных лесах и случайных отображениях. В качестве недавних исследований в этих направлениях отметим статьи Павлова [21], Севастьянова [22] и Чеплюковой [23].

Через $|Y|$ везде далее будем обозначать число элементов конечного множества Y . Пусть ν_n и λ_n – соответственно число компонент и число циклических точек случайного A -отображения σ_n . В настоящей статье для определенного класса множеств A изучено асимптотическое поведение случайных величин ν_n и λ_n (в слабом смысле) и $|V_n(A)|$ при $n \rightarrow \infty$. Более конкретно, относительно множества A мы предполагаем, что

$$p(n) \equiv \frac{|T_n(A)|}{n!} = n^{\varrho-1} L(n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где $\varrho \in (0, 1]$, а функция $L(n)$ – медленно меняется по Карамата на бесконечности [24], т.е.

$$\frac{L([xn])}{L(n)} \rightarrow 1$$

при $n \rightarrow \infty$ для всех положительных x . В качестве примеров множеств A , удовлетворяющих (1), можно привести различные арифметические прогрессии и их объединения, некоторые теоретико-числовые множества, а также реализации случайного множества A , где случайные величины $\xi_n = \chi\{n \in A\}$ независимы и одинаково распределены, причем $P\{\xi_n = 1\} = \varrho$ (подробнее о примерах множеств A см. статью [25]).

2. Основные результаты. В настоящем разделе мы докажем следующие три теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено соотношение (1). Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$|V_n(A)| = (1 + o(1)) n^{n-(1-\varrho)/2} L(\sqrt{n}) I_{\varrho}, \quad (2)$$

где

$$I_{\varrho} = \int_0^{\infty} x^{\varrho} e^{-x^2/2} dx. \quad (3)$$

(Здесь и далее все функции $f(n)$, определенные при $n \in \mathbb{N}$, мы доопределяем при $t \geq 1$ равенством $f(t) = f([t])$).

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнено соотношение (1). Тогда при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно натуральных k , при которых $z = k/\sqrt{n}$ лежит в любом интервале вида $0 < z_0 \leq z \leq z_1 < \infty$,

$$\sqrt{n} P \left\{ \frac{\lambda_n}{\sqrt{n}} = z \right\} = (1 + o(1)) \frac{z^{\varrho} e^{-z^2/2}}{I_{\varrho}}, \quad (4)$$

где z_0 и z_1 – постоянные, а константа I_{ϱ} определена равенством (3).

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнено соотношение (1). Тогда при $n \rightarrow \infty$ распределение случайной величины

$$\nu'_n = \frac{\nu_n - l(\sqrt{n})}{\sqrt{(\varrho/2) \ln n}} \quad (5)$$

слабо сходится к стандартному нормальному закону, где

$$l(t) = \sum_{k \in A, k \leq t} \frac{1}{k}. \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу следствия 1 работы [26] асимптотику (2) можно переписать в виде

$$|V_n(A)| = (1 + o(1)) \frac{\exp(-\varrho\gamma) I_\varrho}{\Gamma(\varrho)} n^{n-(1-\varrho)/2} \exp\left(l(\sqrt{n}) - \frac{\varrho}{2} \ln n\right),$$

где γ – постоянная Эйлера, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера, а функция $l(\cdot)$ определена равенством (6).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть τ_n – случайное отображение, равномерно распределенное на $\mathfrak{S}_n$. Если выполнено (1), то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\tau_n \in V_n(A)\} = (1 + o(1)) n^{-(1-\varrho)/2} L(\sqrt{n}) I_\varrho. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Согласно формуле (0.11) из книги Сачкова [2; гл. 6] и формуле (1)

$$\begin{aligned} |V_n(A)| &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} n^{n-k} |T_k(A)| = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} n^{n-k} k! p(k) \\ &= n^n \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-k)!} n^{-k} k p(k) = n^n \sum_{k=1}^n \frac{(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^{k-1}} \cdot \frac{k p(k)}{n} \\ &= n^n \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{k p(k)}{n} = n^n \sum_{k=1}^n u_n(k), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$u_n(k) = \binom{n-1}{k-1} n^{-k} |T_k(A)| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{k p(k)}{n}. \quad (9)$$

Согласно [15; лемма 3.5.9] существуют такие последовательности $r(n), s(n) \in \mathbb{N}$, что $r(n) = o(\sqrt{n})$, $s(n)/\sqrt{n} \rightarrow \infty$, $r(n) \rightarrow \infty$ и

$$\frac{L(k)}{L(\sqrt{n})} \rightarrow 1 \quad (10)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $k \in [r(n), s(n)]$. Из (1), (8), (9) и (10) следует, что

$$\begin{aligned} J_1(n) &\equiv \sum_{k=1}^{r(n)} u_n(k) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{r(n)} k p(k) = O\left(\frac{(r(n))^{e+1} L(r(n))}{n}\right) = O\left(\frac{(r(n))^{e+1}}{n} L(\sqrt{n})\right) \\ &= O\left(\frac{(r(n))^{e+1}}{n \cdot n^{e/2-1/2}} p(\sqrt{n})\right) = p(\sqrt{n}) \cdot O\left(\left(\frac{r(n)}{\sqrt{n}}\right)^{e+1}\right) = o(p(\sqrt{n})) \end{aligned} \quad (11)$$

при $n \rightarrow \infty$. Из (9) следует, что

$$\begin{aligned} u_n(k) &= \exp\left(\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \ln\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right) \cdot \frac{kp(k)}{n} \\ &= \frac{kp(k)}{n} \cdot \exp\left(-\frac{1 + \dots + k-1}{n} + O(1)\frac{1 + \dots + (k-1)^2}{n^2}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $k \leq cn$, где c – произвольная фиксированная постоянная из интервала $(0, 1)$, откуда

$$u_n(k) = \frac{kp(k)}{n} \cdot \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n} + O\left(\frac{k^3}{n^2}\right)\right) = \frac{kp(k)}{n} \cdot \exp\left(-\frac{k^2}{2n} + O\left(\frac{k^3}{n^2}\right)\right). \quad (13)$$

В силу неравенства $\ln(1-x) \leq -x$, справедливого при $x \in (0, 1)$, мы из (12) получаем также, что при $k \leq n$

$$u_n(k) \leq \frac{kp(k)}{n} \cdot \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right) = \frac{kp(k)}{n} \cdot \exp\left(-\frac{k^2}{2n} + \frac{k}{2n}\right) \leq \sqrt{e} \cdot \frac{kp(k)}{n} \cdot \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right). \quad (14)$$

Из (14) следует, что

$$\begin{aligned} J_2(n) &\equiv \sum_{k=s(n)+1}^n u_n(k) \leq \frac{\sqrt{e}}{n} \sum_{k=s(n)+1}^n kp(k) \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right) \\ &= \frac{\sqrt{e}p(\sqrt{n})}{n} \sum_{k=s(n)+1}^n k \frac{p(k)}{p(\sqrt{n})} \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Согласно (1) и соотношению (2.1) из работы [27], существует $n_1 = n_1(\varepsilon)$ такое, что при $n \geq n_1$ и $k \geq s(n)$

$$\frac{p(k)}{p(\sqrt{n})} \leq \left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^{e-1+\varepsilon}. \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует, что при $n \geq n_1$

$$\begin{aligned} J_2(n) &\leq \frac{\sqrt{e}p(\sqrt{n})}{n} \sum_{k=s(n)+1}^n k \left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^{e-1+\varepsilon} \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right) \\ &= \frac{\sqrt{e}p(\sqrt{n})}{n^{(e-1+\varepsilon)/2}} \sum_{k=s(n)+1}^n k^{e+\varepsilon} \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right) = \frac{\sqrt{e}p(\sqrt{n})}{n^{(e+1+\varepsilon)/2}} \sum_{k=s(n)+1}^n k^{e+\varepsilon} \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right) \\ &= \frac{\sqrt{e}p(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \sum_{k=s(n)+1}^n \left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^{e+\varepsilon} \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right) \\ &= \sqrt{e}p(\sqrt{n}) \sum_{k=s(n)+1}^n \int_{k/\sqrt{n}}^{(k+1)/\sqrt{n}} x^{e+\varepsilon} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \sqrt{e}p(\sqrt{n}) \int_{s(n)/\sqrt{n}}^{\infty} x^{e+\varepsilon} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = o(p(\sqrt{n})) \end{aligned} \quad (17)$$

при $n \rightarrow \infty$, так как $s(n)/\sqrt{n} \rightarrow +\infty$. Согласно (1), (10) и (13), считая без ограничения общности, что $s(n) = o(n)$, имеем

$$\begin{aligned}
 J_2(n) &\equiv \sum_{k=r(n)+1}^{s(n)} u_n(k) = \frac{(1+o(1))}{n} \sum_{k=r(n)+1}^{s(n)} kp(k) \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right) \\
 &= \frac{(1+o(1))L(\sqrt{n})}{n} \sum_{k=r(n)+1}^{s(n)} k^\varrho \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right) \\
 &= \frac{(1+o(1))p(\sqrt{n})}{nn^{(\varrho-1)/2}} \sum_{k=r(n)+1}^{s(n)} k^\varrho \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right) \\
 &= (1+o(1))p(\sqrt{n}) \sum_{k=r(n)+1}^{s(n)} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^\varrho \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right). \tag{18}
 \end{aligned}$$

Положим

$$I(n) = \sum_{k=r(n)+1}^{s(n)} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^\varrho \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right). \tag{19}$$

Согласно (19) имеем

$$\begin{aligned}
 I(n) &- \int_{(r(n)+1)/\sqrt{n}}^{(s(n)+1)/\sqrt{n}} x^\varrho \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\
 &= \sum_{k=r(n)+1}^{s(n)} \int_{k/\sqrt{n}}^{(k+1)/\sqrt{n}} \left(\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^\varrho \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right) - x^\varrho \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right) dx \\
 &\leq \sum_{k=r(n)+1}^{s(n)} \int_{k/\sqrt{n}}^{(k+1)/\sqrt{n}} \left(\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^\varrho \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right) - \left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^\varrho \exp\left(-\frac{(k+1)^2}{2n}\right) \right) dx \\
 &= \sum_{k=r(n)+1}^{s(n)} \left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^\varrho \left(\exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right) - \exp\left(-\frac{(k+1)^2}{2n}\right) \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \\
 &\leq 2 \sum_{k=r(n)+1}^{s(n)} \left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^\varrho \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right) \frac{1}{n} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} I(n). \tag{20}
 \end{aligned}$$

Из первого равенства в (20) следует, что

$$\begin{aligned}
 I(n) &- \int_{(r(n)+1)/\sqrt{n}}^{(s(n)+1)/\sqrt{n}} x^\varrho \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\
 &\geq \sum_{k=r(n)+1}^{s(n)} \int_{k/\sqrt{n}}^{(k+1)/\sqrt{n}} \left(\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^\varrho \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right) - \left(\frac{k+1}{\sqrt{n}}\right)^\varrho \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right) \right) dx \\
 &= \sum_{k=r(n)+1}^{s(n)} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^\varrho - \left(\frac{k+1}{\sqrt{n}}\right)^\varrho \right) \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{k=r(n)+1}^{s(n)} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{k}{\sqrt{n}} \right)^{\varrho} \left(\left(1 + \frac{1}{k} \right)^{\varrho} - 1 \right) \exp \left(-\frac{k^2}{2n} \right) \\
&\geq -C \sum_{k=r(n)+1}^{s(n)} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{k}{\sqrt{n}} \right)^{\varrho} \exp \left(-\frac{k^2}{2n} \right) \frac{1}{k} \geq -\frac{C}{r(n)} I(n),
\end{aligned} \tag{21}$$

где C – некоторая положительная постоянная. Из (20) получаем, что

$$\begin{aligned}
I(n) &\leq \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)^{-1} \int_{(r(n)+1)/\sqrt{n}}^{(s(n)+1)/\sqrt{n}} x^{\varrho} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx \\
&\leq \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)^{-1} \int_0^{\infty} x^{\varrho} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx.
\end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к верхнему пределу по $n \rightarrow \infty$, убеждаемся в том, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} I(n) \leq \int_0^{\infty} x^{\varrho} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx. \tag{22}$$

Из (21) следует, что

$$I(n) \geq \left(1 + \frac{C}{r(n)} \right)^{-1} \int_{(r(n)+1)/\sqrt{n}}^{(s(n)+1)/\sqrt{n}} x^{\varrho} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx.$$

Переходя в последнем неравенстве к нижнему пределу при $n \rightarrow \infty$ и учитывая, что $r(n) = o(\sqrt{n})$, $s(n)/\sqrt{n} \rightarrow \infty$, получаем, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} I(n) \geq \int_0^{\infty} x^{\varrho} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx. \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует, что существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(n) = \int_0^{\infty} x^{\varrho} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx = I_{\varrho}. \tag{24}$$

Из (18) и (24) получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$J_3(n) \equiv \sum_{k=r(n)+1}^{s(n)} u_n(k) = (1 + o(1)) p(\sqrt{n}) I_{\varrho}. \tag{25}$$

Из (11), (15), (17) и (25) следует, что

$$J(n) \equiv \sum_{k=1}^n u_n(k) = (1 + o(1)) p(\sqrt{n}) I_{\varrho} \tag{26}$$

при $n \rightarrow \infty$. Утверждение теоремы 1 является следствием соотношений (1), (8) и (26). Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $k, n \rightarrow \infty$ так, что

$$z = \frac{k}{\sqrt{n}} \in [z_0, z_1],$$

где $0 < z_0 < z_1 < \infty$. Тогда согласно формуле (0.11) из гл. 6 книги [2] и формулам (8) и (9)

$$\mathbf{P}\{\nu_n = k\} = \frac{\binom{n-1}{k-1} n^{n-k} |T_k(A)|}{|V_n(A)|} = \frac{u_n(k)}{\sum_{m=1}^n u_n(m)}.$$

Отсюда, учитывая асимптотические формулы (13) и (26), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\nu_n = k\} &= \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_n}{\sqrt{n}} = z\right\} = (1 + o(1)) \frac{kp(k) \exp(-k^2/2n)}{np(\sqrt{n})I_\varrho} \\ &= (1 + o(1)) \frac{k}{n} \cdot \left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^{\varrho-1} \cdot \frac{\exp(-z^2/2)}{I_\varrho} = (1 + o(1)) \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot z^\varrho \cdot \frac{\exp(-z^2/2)}{I_\varrho} \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $k \in [z_0\sqrt{n}, z_1\sqrt{n}]$ в силу (1) и теоремы о равномерной сходимости для медленно меняющихся функций [24], откуда следует (4). Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Мы имеем для произвольных фиксированных действительных x, ε и $M, 0 < \varepsilon < M < \infty$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_n - l(\sqrt{n})}{\sqrt{(\varrho/2) \ln n}} \leq x\right\} &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_n - l(\sqrt{n})}{\sqrt{(\varrho/2) \ln n}} \leq x \mid \lambda_n = k\right\} \\ &\leq \mathbf{P}\{\lambda_n \leq \varepsilon\sqrt{n}\} + \mathbf{P}\{\lambda_n \geq M\sqrt{n}\} \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{N}, k/\sqrt{n} \in (\varepsilon, M)} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_n - l(\sqrt{n})}{\sqrt{(\varrho/2) \ln n}} \leq x \mid \lambda_n = k\right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Так как при условии $\lambda_n = k$ эти k циклических точек образуют случайную A -подстановку, равномерно распределенную на $T_k(A)$, и

$$l(\sqrt{n}) = l(k) + O(1), \quad \frac{\ln n}{2} = \ln k + O(1)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $k \in (\varepsilon\sqrt{n}, M\sqrt{n})$, в силу предельной теоремы 1 из работы [26]

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\nu_n - l(\sqrt{n})}{\sqrt{(\varrho/2) \ln n}} \leq x \mid \lambda_n = k\right\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\xi_k - l(k)}{\sqrt{\varrho \ln k}} \leq x + o(1)\right\} \rightarrow \Phi(x) \quad (28)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $k \in (\varepsilon\sqrt{n}, M\sqrt{n})$, где $\Phi(x)$ – функция стандартного нормального распределения, а ξ_k – число циклов случайной подстановки, равномерно распределенной на $T_k(A)$. Из (27) и (28) получаем, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_n - l(\sqrt{n})}{\sqrt{(\varrho/2) \ln n}} \leq x\right\} \leq \mathbf{P}\{\lambda \leq \varepsilon\} + \mathbf{P}\{\lambda \geq M\} + \Phi(x)\mathbf{P}\{\lambda \in (\varepsilon, M)\},$$

где λ – предельная случайная величина для $\lambda_n/\sqrt{n}$ (в слабом смысле). Устремляя в правой части полученного неравенства ε к нулю, а M – к бесконечности, убеждаемся в том, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \frac{\nu_n - l(\sqrt{n})}{\sqrt{(\varrho/2) \ln n}} \leq x \right\} \leq \Phi(x). \quad (29)$$

Совершенно аналогично получаем, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \frac{\nu_n - l(\sqrt{n})}{\sqrt{(\varrho/2) \ln n}} \leq x \right\} \geq \Phi(x) \mathbb{P}\{\lambda \in (\varepsilon, M)\},$$

откуда следует, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \frac{\nu_n - l(\sqrt{n})}{\sqrt{(\varrho/2) \ln n}} \leq x \right\} \geq \Phi(x). \quad (30)$$

Утверждение теоремы 3 следует из неравенств (29) и (30). Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Н. Сачков, *Комбинаторные методы дискретной математики*, Наука, М., 1977.
- [2] В. Н. Сачков, *Вероятностные методы в комбинаторном анализе*, Наука, М., 1978.
- [3] В. Н. Сачков, *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*, МЦНМО, М., 2004.
- [4] E. A. Bender, “Asymptotic methods in enumeration”, *SIAM Rev.*, **16**:4 (1974), 485–515.
- [5] Ю. В. Болотников, В. Н. Сачков, В. Е. Тараканов, “Асимптотическая нормальность некоторых величин, связанных с цикловой структурой случайных подстановок”, *Матем. сб.*, **99**:1 (1976), 121–133.
- [6] Л. М. Волюнец, “Пример нестандартной асимптотики числа подстановок с ограничениями на длины циклов”, *Вероятностные процессы и их приложения*, МИЭМ, М., 1989, 85–90.
- [7] A. A. Grusho, “Properties of random permutations with constraints on the maximum cycle length”, *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics* (Petrozavodsk, 1992), Progr. Pure Appl. Discrete Math., **1**, VSP, Utrecht, 1993, 60–63.
- [8] Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев, “О случайных подстановках”, *Труды по дискретной математике*, Т. 5, Физматлит, М., 2002, 73–92.
- [9] А. В. Колчин, “Уравнения, содержащие неизвестную подстановку”, *Дискрет. матем.*, **6**:1 (1994), 100–115.
- [10] V. F. Kolchin, “The number of permutations with cycle lengths from a fixed set”, *Random Graphs*, Vol. 2 (Poznań, Poland, 1989), Wiley-Intersci. Publ., Wiley, New York, 1992, 139–149.
- [11] E. Manstavičius, “On random permutations without cycles of some lengths”, *Period. Math. Hungar.*, **42**:1–2 (2001), 37–44.
- [12] М. П. Минеев, А. И. Павлов, “Об уравнении в подстановках”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей. К 85-летию со дня рождения академика Ивана Матвеевича Виноградова, Тр. МИАН, **142**, Наука, М., 1976, 182–194.
- [13] А. И. Павлов, “О двух классах подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов”, *Матем. заметки*, **62**:6 (1997), 881–891.
- [14] А. Н. Тимашёв, “Предельные теоремы в схемах размещений частиц по различным ячейкам с ограничениями на заполнения ячеек”, *ТВП*, **49**:4 (2004), 712–725.
- [15] А. Л. Якимив, *Вероятностные приложения Тауберовых теорем*, Физматлит, М., 2005.

- [16] В. Н. Сачков, “Отображения конечного множества с ограничениями на контур и высоту”, *ТВП*, **17**:4 (1972), 679–694.
- [17] В. Н. Сачков, “Случайные отображения ограниченной высоты”, *ТВП*, **18**:1 (1973), 122–132.
- [18] Ю. Л. Павлов, *Случайные леса*, КНЦ РАН, Петрозаводск, 1996.
- [19] В. Ф. Колчин, *Случайные отображения*, Теория вероятностей и математическая статистика, Наука, М., 1984.
- [20] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, Теория вероятностей и математическая статистика, Физматлит, М., 2000.
- [21] Ю. Л. Павлов, “Предельные теоремы для объемов деревьев непомеченного графа случайного отображения”, *Дискрет. матем.*, **16**:3 (2004), 63–75.
- [22] Б. А. Севастьянов, “Сходимость по распределению случайных отображений конечных множеств к ветвящимся процессам”, *Дискрет. матем.*, **17**:1 (2005), 18–21.
- [23] И. А. Чеплюкова, “Один случай предельного распределения числа циклических вершин в случайном отображении”, *Дискрет. матем.*, **16**:3 (2004), 76–84.
- [24] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985.
- [25] А. Л. Якимив, “Распределение длины m -го максимального цикла случайной A -подстановки”, *Дискрет. матем.*, **17**:4 (2005), 40–58.
- [26] А. Л. Якимив, “Предельная теорема для общего числа циклов случайной A -подстановки”, *ТВП*, **52**:1 (2007), 69–83.
- [27] В. С. Владимиров, Б. И. Завьялов, “Тауберовы теоремы в квантовой теории поля”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат.*, **15**, ВИНТИ, М., 1980, 95–130.

А. Л. Якимив

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: arsen@mi.ras.ru

Поступило

28.01.2008

Исправленный вариант

26.11.2008