Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Монахов, Т. В. Бородич, О разрешимости группы с холловыми добавлениями к нормализаторам силовских подгрупп, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 2, 227–233

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4522>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 09:52:52

О разрешимости группы с холловыми добавлениями к нормализаторам силовских подгрупп

В. С. Монахов, Т. В. Бородич

Устанавливается разрешимость конечной группы с холловыми добавлениями к нормализаторам силовских подгрупп.

Библиография: 16 названий.

Введение. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

В 1968 г. Ведерников доказал разрешимость группы, у которой порядки всех классов сопряженных силовских подгрупп суть степени простых чисел [1; теорема 5]. При доказательстве использовалась непростота таких групп, установленная Трофимовым в 1963 г. [2; теорема 6].

Натуральное число, которое является степенью некоторого простого числа, называют *примарным*. Поскольку порядок класса сопряженных подгрупп совпадает с индексом нормализатора любой подгруппы из этого класса, теорему Ведерникова можно сформулировать так: *если индексы нормализаторов силовских подгрупп в группе G примарны, то группа G разрешима*.

В такой формулировке эта теорема доказывалась в работах [3]–[5]. Более детальное изучение групп с примарными индексами нормализаторов силовских подгрупп проведено Го Веньбином в [6]. В перечисленных выше работах классификация конечных простых групп не использовалась.

В 2005 г. Го Веньбин и Шам [6] показали, что для разрешимости группы достаточно только примарности индексов нормализаторов силовских 2- и 3-подгрупп. Их доказательство основано на теореме Фисман [7], которая использует классификацию конечных простых групп.

Добавлением к подгруппе X в группе G называется подгруппа Y такая, что $G = XY$. Если $X \cap Y = 1$, то подгруппа Y называется *дополнением* к подгруппе X в группе G .

Добавление Y к подгруппе X в группе G называется:

- *примарным*, если порядок Y есть примарное число;
- *холловым*, если подгруппа Y холлова в группе G ;
- *разрешимым*, если подгруппа Y разрешима.

Если подгруппа H имеет примарный индекс в группе G , то силовская p -подгруппа группы G будет примарным холловым добавлением к подгруппе H , где p – простое

число, делящее индекс подгруппы H в группе G . Теперь эквивалентная формулировка теоремы Ведерникова выглядит так: *если в группе нормализаторы силовских подгрупп обладают примарными холловыми добавлениями, то группа разрешима.*

В настоящей заметке исследуются группы с ограничениями на холловы добавления к нормализаторам силовских подгрупп. Доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Если в группе G нормализаторы силовских подгрупп обладают разрешимыми холловыми добавлениями, то группа G разрешима.*

В простой группе $PSL(2, 11)$ подгруппа порядка 55 является холловым дополнением к нормализаторам силовских 2- и 3-подгрупп. Поэтому в теореме 1 ограничиться только нормализаторами силовских 2- и 3-подгрупп нельзя. Вместе с тем, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация такая, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{N}$. Если нормализаторы силовских 2- и 3-подгрупп имеют холловы добавления, принадлежащие $\mathfrak{F}$, то группа G разрешима. В частности, если в группе G нормализаторы силовских 2- и 3-подгрупп обладают нильпотентными холловыми добавлениями, то группа G разрешима.*

Здесь $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{S}$ – формации всех нильпотентных и разрешимых групп. Группа называется *дисперсивной*, если она обладает нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Класс всех дисперсивных групп обозначается через $\mathfrak{D}$.

Доказательства обеих теорем использует теорему Казарина [8] о неабелевых композиционных факторах группы, являющейся произведением своих разрешимых подгрупп.

1. Вспомогательные утверждения. Все обозначения и определения понятны из текста и соответствуют принятым в [9]–[11].

ЛЕММА 1 [12; лемма 4]. *Пусть A , B и N – подгруппы группы G , причем A холлова, а N нормальна. Если $G = AB$, то $N = (A \cap N)(B \cap N)$.*

Наследственный гомоморф – это класс $\mathfrak{F}$, обладающий двумя свойствами: если $G \in \mathfrak{F}$ и H – подгруппа группы G , то $H \in \mathfrak{F}$; если $G \in \mathfrak{F}$ и N – нормальная подгруппа группы G , то $G/N \in \mathfrak{F}$.

ЛЕММА 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственный гомоморф и N – нормальная подгруппа группы G . Предположим, что нормализатор каждой силовской p -подгруппы группы G обладает холловым добавлением, принадлежащим $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- 1) *нормализатор каждой силовской p -подгруппы из N обладает холловым в N добавлением, принадлежащим $\mathfrak{F}$;*
- 2) *нормализатор каждой силовской p -подгруппы из G/N обладает холловым в G/N добавлением, принадлежащим $\mathfrak{F}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть G_p – силовская p -подгруппа группы G . Тогда $N_p = G_p \cap N$ – силовская p -подгруппа в N . По условию $G = N_G(G_p)K$, где K – холлово добавление к $N_G(G_p)$, принадлежащее $\mathfrak{F}$. По лемме 1

$$N = (N \cap N_G(G_p))(N \cap K).$$

Подгруппа $N \cap K$ является холловой в K . Так как K принадлежит наследственному классу $\mathfrak{F}$, то $(N \cap K) \in \mathfrak{F}$. Кроме того, $N_p = G_p \cap N$ – нормальная подгруппа в $N \cap N_G(G_p)$, поэтому $N \cap N_G(G_p) \subseteq N_N(N_p)$ и

$$N = N_N(N_p)(N \cap K).$$

2) Пусть $G_p N/N$ – силовская p -подгруппа в группе G/N . Так как $G = N_G(G_p)K$ и $N_G(G_p)N/N = N_{G/N}(G_p N/N)$, то

$$G/N = (N_{G/N}(G_p N/N))(KN/N).$$

Поскольку $\mathfrak{F}$ – гомоморф, холлова подгруппа $KN/N \simeq K/K \cap N$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Лемма 2 доказана.

Будем говорить, что подгруппа H *недобавляема* в группе G , если для любой подгруппы K группы G из условия $G = HK$ следует, что $K = G$. Через E_{p^n} , Z_n , D_n , A_n будем обозначать соответственно элементарную абелеву группу порядка p^n , циклическую, диэдральную группы порядка n , знакопеременную группу степени n . Под факторизацией группы будем понимать представление этой группы в виде произведения двух своих собственных подгрупп.

ЛЕММА 3. *Группа $G = SL(2, 2^n)$ обладает следующими свойствами:*

- 1) $N_G(G_2) = [E_{2^n}]Z_{2^n-1}$ имеет циклическое дополнение порядка $2^n + 1$ и диэдральное добавление порядка $2(2^n + 1)$;
- 2) если 3 делит $2^n - 1$, то подгруппа $N_G(G_3)$ *недобавляема* в G ;
- 3) если 3 делит $2^n + 1$, то подгруппа $N_G(G_3) = D_{2(2^n+1)}$ имеет добавление, изоморфное $N_G(G_2) = [E_{2^n}]Z_{2^n-1}$;
- 4) нормализатор силовской 3-подгруппы не имеет дополнения в группе G .

Других факторизаций группы $G = SL(2, 2^n)$ с участием в качестве сомножителей нормализаторов силовских 2- и 3-подгрупп нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 0.8 [13] группа $G = SL(2, 2^n)$ допускает только следующие факторизации:

$$G = N_G(G_2)D_{2(2^n+1)} = N_G(G_2)Z_{2^n+1}, \quad \text{где } N_G(G_2) = [E_{2^n}]Z_{2^n-1}.$$

Таким образом, справедливо утверждение 1).

Если 3 делит $2^n - 1$, то 3 не делит $2^n + 1$ и силовская 3-подгруппа содержится в $N_G(G_2)$. Поэтому подгруппа $N_G(G_3)$ не добавляема в G и справедливо утверждение 2).

Пусть 3 не делит $2^n - 1$. Тогда 3 делит $2^n + 1$ и силовская 3-подгруппа содержится в $D_{2(2^n+1)}$. Поэтому $G = SL(2, 2^n) = N_G(G_3)N_G(G_2)$ и справедливо утверждение 3). В частности, нормализатор силовской 3-подгруппы не имеет дополнения в группе G , т.е. справедливо утверждение 4).

ЛЕММА 4. *Группа $G = PSL(2, p^n)$, $p > 2$, обладает только следующими факторизациями с участием в качестве сомножителей нормализатора силовской 2-подгруппы:*

- 1) при $p^n + 1 = 2^k$ подгруппа $N_G(G_2) = D_{2^k}$ имеет дополнение, изоморфное $[E_{p^n}]Z_{(p^n-1)/2}$;
- 2) при $p = 11$ подгруппа $N_G(G_2) = [E_4]Z_3$ имеет дополнение, изоморфное $[Z_{11}]Z_5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = PSL(2, p^n)$. В теореме 0.8 [13] перечислены все факторизации группы G . В пункте А этой теоремы указаны факторизации группы G при $p = 2$, они рассмотрены в лемме 3. В пункте Б теоремы 0.8 [13] для $p > 2$ указана факторизация: $G = N_G(G_p)D_{p^n+1}$ тогда и только тогда, когда $(1/2)(p^n - 1)$ – нечетное число. Так как силовская p -подгруппа в группе G самоцентризуема, то такая факторизация с участием в качестве сомножителей нормализатора силовской 2-подгруппы возможна только при $N_G(G_2) = D_{p^n+1}$. Отсюда следует, что $p^n + 1 = 2^k$, и получается факторизация, указанная в 1).

В пункте В теоремы 0.8 [13] для $p > 2$, $p^n \geq 61$, отмечается, что группа G не имеет никаких других факторизаций, кроме указанной в пункте Б. В пункте Г теоремы 0.8 [13] для $p > 2$, $p^n \leq 59$, перечислены дополнительные факторизации. Из них с участием в качестве сомножителей нормализатора силовской 2-подгруппы имеется только одна, она указана в 2).

ЛЕММА 5. *Группа $G = PSL(2, p^n)$, $p > 2$, обладает только следующими факторизациями с участием в качестве сомножителей нормализатора силовской 3-подгруппы:*

- 1) *при $p = 3$, $n = 2k + 1$ подгруппа $N_G(G_3) = [E_{3^n}]Z_{(3^n-1)/2}$ имеет дополнение, изоморфное D_{3^n+1} ;*
- 2) *при $p > 3$ 12 делит $p^n + 1$, подгруппа $N_G(G_3) = D_{p^n+1}$ имеет дополнение, изоморфное $N_G(G_p) = [E_{p^n}]Z_{(p^n-1)/2}$;*
- 3) *при $p = 9$ подгруппа $N_G(G_3) = [E_9]Z_4$ имеет добавление, изоморфное A_5 ;*
- 4) *при $p = 11$ подгруппа $N_G(G_3) = D_{12}$ имеет дополнение, изоморфное $[Z_{11}]Z_5$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = 3$, $p^n \geq 61$ из пунктов Б и В теоремы 0.8 [13] следует, что имеется только одна факторизация, указанная в 1).

Пусть $p > 3$, $p^n \geq 61$. Так как силовская p -подгруппа в группе G самоцентризуема, то 3 не делит $|N_G(G_p)|$. Теперь из пунктов Б и В теоремы 0.8 [13] следует, что имеется только одна факторизация, указанная в 2).

В пункте С теоремы 0.8 [13] указаны все факторизации группы G при $p^n \leq 59$. Получаем еще две факторизации, указанные в 3) и в 4).

ЛЕММА 6. *В группе $PSL(3, q)$, $q < 9$, нормализатор силовской 3-подгруппы не обладает добавлением, отличным от всей группы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все факторизации группы $PSL(3, q)$ известны, они указаны в теореме 1 [14]. Из этой теоремы следует, что группа $PSL(3, q)$, $q < 9$, факторизациями с участием в качестве сомножителей нормализатора силовской 3-подгруппы не обладает.

ЛЕММА 7. *Группа $PSU(3, 8^2)$ не факторизуема.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все факторизации группы $PSU(3, q^2)$ известны, они указаны в теореме 2 [14]. При $q \neq 3$ и $q \neq 5$ группа $PSU(3, q^2)$ не факторизуема.

ЛЕММА 8. *В группах $PSp(4, 3)$ и $PSL(4, 2)$ нормализаторы силовских 2-подгрупп не обладают разрешимыми добавлениями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. допустим, что группа

$$G \in \{PSp(4, 3), PSL(4, 2)\}$$

обладает факторизацией $G = N_G(G_2)B_1$, где B_1 – разрешимая подгруппа. Пусть A и B – максимальные разрешимые подгруппы группы G , $N_G(G_2) \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$. Ясно, что $G = AB$ и применима лемма 2.5 [15]. По утверждению 5) этой леммы для группы $G = PSp(4, 3)$ имеем $\{|A|, |B|\} = \{2^5 5, 2^4 3^4\}$. По утверждению 6) этой леммы для группы $G = PSL(4, 2)$ имеем $\{|A|, |B|\} = \{2^3 3 \cdot 7, 2^2 3 \cdot 5\}$. В обоих случаях порядок подгруппы A не делится на 2^6 . Но в группах $PSp(4, 3)$ и $PSL(4, 2)$ силовские 2-подгруппы имеют порядок 2^6 . Получили противоречие. Поэтому допущение неверно и в группах $PSp(4, 3)$ и $PSL(4, 2)$ нормализаторы силовских 2-подгрупп не обладают разрешимыми добавлениями.

ЛЕММА 9. *В группе M_{11} нормализатор силовской 2-подгруппы не обладает добавлением, отличным от всей группы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из теоремы 1.1 [16], в которой перечислены все факторизации группы M_{11} .

ЛЕММА 10. *Если в простой группе G нормализаторы силовских 2-подгрупп и 3-подгрупп имеют разрешимые добавления, то справедливо одно из следующих утверждений:*

- 1) $G \simeq SL(2, 2^n)$, 3 делит $2^n + 1$,

$$G = N_G(G_2)Z_{2^n+1} = N_G(G_2)N_G(G_3), \\ N_G(G_2) = [E_{2^n}]Z_{2^n-1}, \quad N_G(G_3) = D_{2(2^n+1)};$$

- 2) $G \simeq PSL(2, 11)$,

$$G = N_G(G_2)([Z_{11}]Z_5) = N_G(G_3)([Z_{11}]Z_5), \\ N_G(G_2) = [E_{2^2}]Z_3 = A_4, \quad N_G(G_3) = [Z_3]E_4 = D_{12}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку группа G является произведением разрешимой подгруппы $N_G(G_2)$ и разрешимого добавления, применима теорема Казарина [8]. По этой теореме группа G принадлежит следующему списку простых групп:

$$PSL(2, q), \quad q > 3, \quad PSL(3, q), \quad q < 9, \quad PSL(4, 2), \quad M_{11}, \quad PSp_4(3), \quad PSU(3, 8).$$

Из этого списка группы $PSL(3, q)$, $q < 9$, $PSL(4, 2)$, M_{11} , $PSp_4(3)$, $PSU(3, 8)$ исключаются ввиду лемм 6–9.

Для группы $PSL(2, q)$, $q = 2^n$, из леммы 3 получаем утверждение 1).

Пусть $G \simeq PSL(2, q)$, q – нечетное. Если $p = 3$, $n = 2k + 1$, то согласно утверждению 1) леммы 5 подгруппа $N_G(G_3) = [E_{3^n}]Z_{(3^n-1)/2}$ имеет дополнение, изоморфное D_{3^n+1} . Так как $(3^n - 1)/2$ – нечетное число, то 2 делит $3^n + 1$ и $N_G(G_2) \subseteq D_{3^n+1}$. Это возможно лишь когда $3^n + 1 = 2^m$. Но при нечетном n последнее равенство выполняется лишь тогда, когда $n = 1$, противоречие с простотой группы G . Поэтому $p \neq 3$. Теперь, применяя леммы 4, 5, получаем утверждение 2). Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1. Предположим, что G – не простая группа, и пусть K – ее нормальная нетривиальная подгруппа. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп. Тогда по лемме 2 подгруппа K и фактор-группа G/K удовлетворяют условию теоремы 1, и по индукции они разрешимы. Поэтому сама группа G разрешима.

Пусть G – простая группа. По лемме 10 получаем, что $G \simeq PSL(2, 11)$, либо $G \simeq SL(2, 2^n)$. Но в группе $PSL(2, 11)$ нормализатор силовской 5-подгруппы не имеет разрешимого добавления, а в группе $SL(2, 2^n)$ для простого числа r , делящего $2^n - 1$, нормализатор силовской r -подгруппы не имеет разрешимого холлова добавления. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Предположим, что G – не простая группа, и пусть K – ее нормальная нетривиальная подгруппа. Тогда по лемме 2 подгруппа K и фактор-группа G/K удовлетворяют условию теоремы 2 и по индукции они разрешимы. Поэтому сама группа G разрешима.

Пусть G – простая группа. Так как формация $\mathfrak{F}$ состоит из разрешимых групп, то применима лемма 10. По этой лемме группа

$$G \in \{PSL(2, 11), SL(2, 2^n)\}.$$

Если $G = PSL(2, 11)$, то разрешимые добавления к нормализаторам силовских 2- и 3-подгрупп совпадают и изоморфны группе $[Z_{11}]Z_5$. Поэтому $[Z_{11}]Z_5 \in \mathfrak{F}$. Так как $[Z_{11}]Z_5 \in \mathfrak{D}$ и по условию теоремы $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{N}$, то подгруппа $[Z_{11}]Z_5$ должна быть нильпотентной. Но в группе $PSL(2, 11)$ нет нильпотентной подгруппы порядка 55, противоречие. Если $G = SL(2, 2^n)$, то разрешимое добавление к нормализатору силовской 3-подгруппы изоморфно группе $[E_{2^n}]Z_{2^n-1}$. Поэтому $[E_{2^n}]Z_{2^n-1} \in \mathfrak{F}$. Так как $[E_{2^n}]Z_{2^n-1} \in \mathfrak{D}$ и по условию теоремы $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{N}$, то подгруппа $[E_{2^n}]Z_{2^n-1}$ должна быть нильпотентной. Но в группе $SL(2, 2^n)$ нет нильпотентной подгруппы порядка $2^n(2^n - 1)$, противоречие. Первое утверждение теоремы 2 доказано. Второе утверждение является частным случаем первого при $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$. Теорема 2 доказана.

Определения φ -дисперсивной группы и дисперсивной по Оре группы можно найти в [9; с. 153], [10; с. 251]. Класс всех дисперсивных по Оре групп обозначим через $\mathfrak{D}_1$. Хорошо известно, что сверхразрешимая группа дисперсивна по Оре.

Класс $\mathfrak{D}$ содержит каждую φ -дисперсивную группу для любого упорядочения φ множества всех простых чисел. Класс $\mathfrak{D}_1$ является собственным подклассом класса $\mathfrak{D}$.

ПРИМЕР 1. В условиях теоремы 2 класс $\mathfrak{D}$ нельзя заменить на класс $\mathfrak{D}_1$. Примером служит простая группа $SL(2, 8)$.

ПРИМЕР 2. Группа со сверхразрешимыми добавлениями к нормализаторам силовских 2- и 3-подгрупп также может быть простой. Примером служит группа $PSL(2, 11)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Ведерников, “О признаках разрешимости и сверхразрешимости конечных групп”, *Сиб. матем. журн.*, **8** (1967), 1236–1244.
- [2] П. И. Трофимов, “О признаках простоты и разрешимости конечных групп”, *Сиб. матем. журн.*, **3** (1962), 876–881.
- [3] D. C. Buchthal, “On factorized groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **183** (1973), 423–430.
- [4] J. P. Zhang, “Sylow numbers of finite groups”, *J. Algebra*, **176**:1 (1995), 111–123.
- [5] Г. Вэньбинь, “Конечные группы с заданными индексами нормализаторов силовских подгрупп”, *Сиб. матем. журн.*, **37**:2 (1996), 295–300.

- [6] Wenbin Guo, K.P. Shum, “A note on finite groups whose normalizers of Sylow 2-, 3-subgroups are prime power indices”, *J. Appl. Algebra Discrete Struct.*, **3**:1 (2005), 1–9.
- [7] E. Fisman, “On the product of two finite solvable groups”, *J. Algebra*, **80**:2 (1983), 517–536.
- [8] L.S. Kazarin, “On groups which are the product of two solvable subgroups”, *Comm. Algebra*, **14**:6 (1986), 1001–1066.
- [9] В. С. Монахов, *Введение в теорию конечных групп и их классов*, Вышэйшая школа, Минск, 2006.
- [10] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.
- [11] B. Huppert, *Endliche Gruppen. I*, Grundlehren Math. Wiss., **134**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1967.
- [12] В. С. Монахов, “Конечные группы с холловыми добавлениями к примитивным подгруппам”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:2 (2007), 359–368.
- [13] В. С. Монахов, “Произведение конечных групп, близких к нильпотентным”, *Конечные группы*, Наука и техника, Минск, 1975, 70–100.
- [14] M. Blaum, “Factorizations of the simple groups $PSL(3, q)$ and $PSU(3, q^2)$ ”, *Arch. Math. (Basel)*, **40**:1 (1983), 8–13.
- [15] B. Amberg, L.S. Kazarin, “On finite products of soluble groups”, *Israel J. Math.*, **106**:1 (1998), 93–108.
- [16] M. Giudici, “Factorisations of sporadic simple groups”, *J. Algebra*, **304**:1 (2006), 311–323.

В. С. Монахов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

E-mail: monakhov@gsu.by

Поступило

01.02.2008

Т. В. Бородич

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

E-mail: TimurBorodich@gsu.by