Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ийшенг Лай, Теоремы об общих точках совпадения и неподвижных точках для класса нелинейных гибридных отображений, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 3, 361–369

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4524>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 13:41:41

Теоремы об общих точках совпадения и неподвижных точках для класса нелинейных гибридных отображений

Ийшенг Лай

Вводятся понятия кратной квазисовместимости для однозначных и многозначных отображений. С помощью итерационной схемы доказываются несколько теорем об общих неподвижной точке и о точке совпадения для однозначных и многозначных отображений, удовлетворяющих условиям ϕ -типа. Предполагается, что условия не являются условиями сжимающего типа.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Существует больше количество работ, в которых рассматриваются вопросы теории общих неподвижных точек и точек совпадения для однозначных и многозначных отображений, см., например, [1]–[5]. Некоторые авторы (см. [1]–[5]) проводят свои исследования в предположении, что основное метрическое пространство является полным пространством и однозначные и многозначные отображения удовлетворяют условию сжимающего типа. В этом случае неподвижные точки и точки совпадения можно найти с помощью метода, развитого Надлером в [6] (также сравни [3]–[5]). Однако этот метод неприменим, если не предполагается, что отображения являются отображениями сжимающего типа, а этот случай до сих пор недостаточно изучен.

В настоящей статье, вводится понятие ψ -кратной квазисовместимости для однозначных и многозначных отображений и обобщается понятие совместимости [1], [2]. Предлагается итерационная схема поиска точки совпадения и общей неподвижной точки гибридного отображения, удовлетворяющей условию ϕ -типа. Эта методика позволяет получить несколько теорем о точке совпадения и общей неподвижной точке для класса гибридных отображений, не предполагая, что эти отображения удовлетворяют условиям сжимающего типа. В наших теоремах, заменяя условие полноты пространства некоторыми более слабыми условиями, мы также отказываемся от условия совместимости и условий непрерывности отображений в следствии 1.

Результаты, полученные в настоящей работе, могут использоваться для решения функциональных уравнений, в теории оптимизации, в теории хаотической динамики, в математической экономике, и т.д.

2. Предварительные сведения. Пусть (X, d) – метрическое пространство. Через $(CB(X), H)$ и $(CL(X), H)$ обозначим, соответственно, гиперпространства непустых замкнутых ограниченных подмножеств множества X и непустых замкнутых

Работа выполнена при поддержке Фонда помощи юным дарованиям университета Жейянг Гонгшанг.

подмножеств множества X , где H – Хаусдорфова метрика, порожаемая метрикой d , т.е.

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A) \right\}$$

для всех $A, B \in CB(X)$ (или $CL(X)$), где $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$.

Хорошо известно, что $(CB(X), H)$ и $(CL(X), H)$ – полные метрические пространства, если (X, d) – полное пространство. Конечно, $(CB(X), H)$ и $(CL(X), H)$ – метрические пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображения $f: X \rightarrow X$ и $T: X \rightarrow CL(X)$ называются *совместимыми*, если $d(fy_n, Tfx_n) \rightarrow 0$ при условии, что $\{x_n\}, \{y_n\}$ – последовательности в X такие, что $Tx_n \rightarrow M \in CL(X)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} fx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = t \in M$, где $y_n \in Tx_n$ при $n = 1, 2, \dots$.

Определение 1 несколько обобщает определения, данные Канеко и Чо [1], [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\psi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ – некоторая функция. Отображения $g, f: X \rightarrow X$ и $S, T: X \rightarrow CL(X)$ называются ψ -кратными квазисовместимыми, если выполняются следующие условия:

- (а) $gt, ft \in M$ при условии, что $\{x_n\}$ – последовательность в X такая, что $Sx_{2n-1}, Tx_{2n} \rightarrow M \in CL(X)$, $fx_{2n-1}, gx_{2n} \rightarrow t \in M$, и для целых $n = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} d(gx_{2n}, fx_{2n-1}) &\leq H(Sx_{2n-1}, Tx_{2n-2}) + \beta_{2n-1}, d(fx_{2n+1}, gx_{2n}) \\ &\leq H(Tx_{2n}, Sx_{2n-1}) + \beta_{2n}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $gx_{2n} \in Sx_{2n-1}$, $fx_{2n-1} \in Tx_{2n-2}$ и $\beta_n \rightarrow 0$;

- (б) при $t \in M$, определенных выше, из равенств $ft \neq t$ и $gt \neq t$ соответственно следует, что $H(M, St) > \psi(d(ft, t))$ и $H(M, Tt) > \psi(d(gt, t))$.

Примеры двух отображений, являющихся кратными квазисовместимыми, можно найти в [1], [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Предположим, что функция

$$\Phi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5): [0, +\infty)^5 \rightarrow [0, +\infty)$$

удовлетворяет следующим условиям ϕ_1 и ϕ_2 :

- (ϕ_1): $\Phi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$ является неубывающей непрерывной функцией по каждой переменной;
 (ϕ_2): пусть $\psi(t) = \Phi(t, t, t, at, bt)$, где $a, b \in \{0, 2\}$ и $a + b = 2$; ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \psi^n(t)$ сходится при каждом $t \in [0, +\infty)$, для которого $\psi^n(t)$ является n -й итерацией исходного значения t .

Тогда будем говорить, что $\Phi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$ удовлетворяет условию ϕ -типа.

ЛЕММА 1. Пусть функция $\Phi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$ удовлетворяет условию ϕ -типа; тогда

- (а) $\psi(t)$ – возрастающая функция;
 (б) $\psi(t) < t$ при всех $t \in (0, +\infty)$ и $\psi(0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что из условия (ϕ_1) следует, что $\psi(t)$ является возрастающей функцией. Если $\psi(t) \geq t$ при некотором $t \in (0, +\infty)$, то $\psi^n(t) \geq \psi^{n-1}(t) \geq \dots \geq \psi(t) \geq t$. Это противоречит условию (ϕ_2) и, следовательно, $\psi(t) < t$ при всех $t \in (0, +\infty)$. Аналогично получим равенство $\psi(0) = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $A, B \in CL(X)$ и $\beta > 0$. Тогда для любого $a \in A$ существует элемент $b \in B$ такой, что $d(a, b) \leq H(A, B) + \beta^+$, где

$$\beta^+ = \begin{cases} 0 & \text{при } H(A, B) > d(a, B) \text{ или } H(A, B) = 0, \\ \beta & \text{при } H(A, B) = d(a, B) > 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения Хаусдорфовой метрики следует, что $d(a, B) \leq \sup_{x \in A} d(x, B) \leq H(A, B)$. Поскольку существует такое $b' \in B$, что $d(a, b') < d(a, B) + \varepsilon$ для любого заданного $\varepsilon > 0$, также существует такое $b \in B$, что $d(a, b) < H(A, B)$, если $H(A, B) > d(a, B)$, и $d(a, b) < H(A, B) + \beta$ при условии, что $H(A, B) = d(a, B)$. Предположим, что $H(A, B) = 0$; тогда $A = B$ и, следовательно, $d(a, b) = H(A, B)$ при $b = a$. Лемма доказана.

3. Теоремы совпадения. В этом разделе приводятся некоторые теоремы о точке совпадения для нелинейных гибридных отображений, удовлетворяющих условию ϕ -типа.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (X, d) – метрическое пространство, $f, g: X \rightarrow X$ – непрерывные отображения и $S, T: X \rightarrow CL(X)$ – H -непрерывные отображения такие, что $T(X) \subset f(X)$, $S(X) \subset g(X)$. Предположим, что существует функция $\Phi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$, удовлетворяющая условию ϕ -типа такая, что

$$H(Sx, Ty) \leq \Phi(d(fx, gy), d(fx, Sx), d(gy, Ty), d(fx, Ty), d(gy, Sx)) \quad (2)$$

при всех $x, y \in X$. Если одно из множеств $S(X)$, $T(X)$, $f(X)$ и $g(X)$ является полным подпространством пространства X и пара (f, S) и (g, T) совместима, то существует последовательность $\{x_n\}$ в X такая, что

- (a) при любом n $fx_{2n-1} \in Tx_{2n-2}$, $gx_{2n} \in Sx_{2n-1}$;
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} gx_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} fx_{2n-1} = z$ для некоторого $z \in X$;
- (c) $fz \in Sz$, $gz \in Tz$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_0 – произвольная точка пространства X . Так как $T(X) \subseteq f(X)$, существует точка $x_1 \in X$ такая, что $fx_1 \in Tx_0$. Из леммы 2 следует, что существует $u_1 \in Sx_1$ такая, что

$$d(u_1, fx_1) \leq H(Sx_1, Tx_0) + \beta_1^+,$$

где $\beta_1 = 1$. Кроме того, поскольку $S(X) \subseteq g(X)$, существует точка x_2 в X такая, что $u_1 = gx_2$ и

$$d(gx_2, fx_1) \leq H(Sx_1, Tx_0) + \beta_1^+.$$

Аналогичным образом мы можем построить последовательность $\{x_n\}$ в X такую, что для любого $n \geq 1$,

$$b_n = d(gx_{2n}, fx_{2n-1}) \leq H(Sx_{2n-1}, Tx_{2n-2}) + \beta_{2n-1}^+, \quad (3)$$

$$a_n = d(fx_{2n+1}, gx_{2n}) \leq H(Tx_{2n}, Sx_{2n-1}) + \beta_{2n}^+, \quad (4)$$

где

$$gx_{2n} \in Sx_{2n-1}, \quad fx_{2n-1} \in Tx_{2n-2}, \quad (5)$$

$$\beta_{2n-1}^+ = \begin{cases} 0 & \text{при } H(Sx_{2n-1}, Tx_{2n-2}) > d(Sx_{2n-1}, fx_{2n-1}) \\ & \text{или } H(Sx_{2n-1}, Tx_{2n-2}) = 0, \\ \beta_{2n-1} & \text{при } H(Sx_{2n-1}, Tx_{2n-2}) = d(Sx_{2n-1}, fx_{2n-1}) > 0, \quad n \geq 2, \end{cases} \quad (6)$$

$$\beta_{2n-1} = \begin{cases} \min \left\{ \eta_{2n-1}, \frac{1}{2n-1}, |\psi(a_{n-1}) - \psi(b_{n-1})| \right\} & \text{при } a_{n-1} \neq b_{n-1}, \\ \min \left\{ \eta_{2n-1}, \frac{1}{2n-1} \right\} & \text{при } a_{n-1} = b_{n-1}, \end{cases} \quad (7)$$

$$\eta_{2n-1} = \frac{1}{2} \min \{ t - \psi(t) : t \in [H(Sx_{2n-1}, Tx_{2n-2}), H(Sx_{2n-1}, Tx_{2n-2}) + 1] \}, \quad (8)$$

$$\beta_{2n}^+ = \begin{cases} 0 & \text{при } H(Tx_{2n}, Sx_{2n-1}) > d(Tx_{2n}, gx_{2n}) \\ & \text{или } H(Tx_{2n}, Sx_{2n-1}) = 0, \\ \beta_{2n} & \text{при } H(Tx_{2n}, Sx_{2n-1}) = d(Tx_{2n}, gx_{2n}) > 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\beta_{2n} = \begin{cases} \min \left\{ \eta_{2n}, \frac{1}{2n}, |\psi(b_n) - \psi(a_{n-1})| \right\} & \text{при } b_n \neq a_{n-1}, \\ \min \left\{ \eta_{2n}, \frac{1}{2n} \right\} & \text{при } b_n = a_{n-1}, \end{cases} \quad (10)$$

$$\eta_{2n} = \frac{1}{2} \min \{ t - \psi(t) : t \in [H(Tx_{2n}, Sx_{2n-1}), H(Tx_{2n}, Sx_{2n-1}) + 1] \}. \quad (11)$$

Полученные таким образом β_{2n-1} и β_{2n} оказываются положительными в силу леммы 1. Из соотношений (2) и (4) следует, что

$$\begin{aligned} a_n &= d(fx_{2n+1}, gx_{2n}) \\ &\leq H(Tx_{2n}, Sx_{2n-1}) + \beta_{2n}^+ \\ &\leq \Phi(d(gx_{2n}, fx_{2n-1}), d(fx_{2n-1}, Sx_{2n-1}), \\ &\quad d(gx_{2n}, Tx_{2n}), d(fx_{2n-1}, Tx_{2n}), d(gx_{2n}, Sx_{2n-1})) + \beta_{2n}^+ \\ &\leq \Phi(d(gx_{2n}, fx_{2n-1}), d(fx_{2n-1}, gx_{2n}), \\ &\quad d(fx_{2n+1}, gx_{2n}), d(fx_{2n+1}, gx_{2n}) + d(fx_{2n-1}, gx_{2n}), 0) + \beta_{2n}^+, \end{aligned}$$

что эквивалентно

$$a_n \leq H(Tx_{2n}, Sx_{2n-1}) + \beta_{2n}^+ \leq \Phi(b_n, b_n, a_n, a_n + b_n, 0) + \beta_{2n}^+. \quad (12)$$

Действуя аналогично, получим

$$b_n \leq H(Sx_{2n-1}, Tx_{2n-2}) + \beta_{2n-1}^+ \leq \Phi(a_{n-1}, b_n, a_{n-1}, 0, a_{n-1} + b_n) + \beta_{2n-1}^+ \quad (13)$$

в силу (2) и (3). Проверим, что

$$a_n \leq b_n \leq a_{n-1}, \quad n \geq 2, \quad (14)$$

где $a_n = b_n$ (соответственно $b_n = a_{n-1}$) тогда и только тогда, когда $a_n = b_n = 0$ (соответственно $b_n = a_{n-1} = 0$).

Действительно, если существует n такое, что $a_n > b_n$, то из (12) и условий (ϕ_1) и (ϕ_2) немедленно следует, что

$$a_n \leq \Phi(a_n, a_n, a_n, 2a_n, 0) + \beta_{2n}^+ = \psi(a_n) + \beta_{2n}^+, \quad (15)$$

откуда, наряду с леммой 1, следует, что $\beta_{2n}^+ = \beta_{2n} > 0$. Следовательно, мы имеем

$$\begin{aligned} 0 < H(Tx_{2n}, Sx_{2n-1}) &= d(Tx_{2n}, gx_{2n}) \\ &\leq a_n \leq H(Tx_{2n}, Sx_{2n-1}) + \beta_{2n}^+ \leq H(Tx_{2n}, Sx_{2n-1}) + 1 \end{aligned}$$

в силу (4), (5) и (9)–(11). Таким образом, $\eta_{2n} \leq (1/2)(a_n - \psi(a_n))$ в силу (11). Отсюда, и снова в соответствии с (9), (10), (15) и леммой 1, следует, что

$$\begin{aligned} a_n &\leq \psi(a_n) + \beta_{2n}^+ = \psi(a_n) + \beta_{2n} \\ &\leq \psi(a_n) + \eta_{2n} \leq \psi(a_n) + \frac{1}{2}(a_n - \psi(a_n)) \leq \frac{1}{2}(a_n + \psi(a_n)) < a_n, \end{aligned} \quad (16)$$

что приводит к противоречию. Таким образом, $a_n \leq b_n$. Если $a_n = b_n > 0$, то, действуя аналогично, легко видеть, что соотношение (16) все еще выполняется, т.е. $a_n = b_n$ тогда и только тогда, когда $a_n = b_n = 0$. Действуя аналогично, получим $b_n \leq a_{n-1}$ и, следовательно, $b_n = a_{n-1}$ тогда и только тогда, когда $b_n = a_{n-1} = 0$. Таким образом, неравенства (14) доказаны.

Теперь покажем, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ сходятся. Очевидно, это утверждение следует из (14), если существует целое число $n \geq 2$ такое, что $a_{n-1} = 0$ или $b_n = 0$. Теперь предположим, что $a_{n-1}, b_n \neq 0$ при всех $n \geq 2$. Тогда $a_{n-1} > b_n$ в силу (14), и таким образом, $\beta_{2n} \leq \psi(a_{n-1}) - \psi(b_n)$ в силу (10), откуда в соответствии с (9), (10), (12) и (14) следует, что

$$b_{n+1} \leq a_n \leq \psi(b_n) + \beta_{2n}^+ \leq \psi(b_n) + \beta_{2n} \leq \psi(b_n) + \psi(a_{n-1}) - \psi(b_n) = \psi(a_{n-1}). \quad (17)$$

Следовательно,

$$b_{n+1} \leq a_n \leq \psi(a_{n-1}) \leq \psi(\psi(a_{n-2})) = \psi^2(a_{n-2}) \leq \dots \leq \psi^{n-1}(a_1). \quad (18)$$

Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \psi^n(a_1)$ сходится по условию (ϕ_2) . Таким образом, ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ также сходятся, т.е. ряды $\sum_{n=1}^{\infty} d(gx_{2n}, fx_{2n-1})$ и $\sum_{n=0}^{\infty} d(gx_{2n}, fx_{2n+1})$ – сходящиеся.

Из (12), (13) легко получить, что

$$H(Sx_{2n-1}, Tx_{2n-2}) \leq \psi(a_{n-1}), H(Tx_{2n}, Sx_{2n-1}) \leq \psi(b_n). \quad (19)$$

Отсюда следует, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} H(Sx_{2n-1}, Tx_{2n-2})$ и $\sum_{n=1}^{\infty} H(Tx_{2n}, Sx_{2n-1})$ также сходятся. Таким образом, видно, что $\{fx_{2n-1}\}$ и $\{gx_{2n}\}$ – две последовательности Коши соответственно в $f(X)$ и $g(X)$, а $\{Sx_{2n-1}\}$ и $\{Tx_{2n}\}$ – также две последовательности Коши соответственно в $S(X)$ и $T(X)$.

Предположим, что $f(X)$ – полное подпространство пространства X ; тогда $\{fx_{2n-1}\}$ имеет предел в $f(X)$, скажем, z , и в силу сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} d(gx_{2n}, fx_{2n-1})$ легко видеть, что $z = \lim_{n \rightarrow \infty} fx_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} gx_{2n}$. Так как $T(X) \subset f(X)$, отсюда

следует, что $\{Tx_{2n}\} \rightarrow M$ при некотором $M \in CL(X)$ и поэтому $\{Sx_{2n-1}\} \rightarrow M$ в силу того, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} H(Tx_{2n}, Sx_{2n-1})$ сходится. Таким образом,

$$\begin{aligned} d(z, M) &\leq d(z, fx_{2n-1}) + d(fx_{2n-1}, M) \\ &\leq d(z, fx_{2n-1}) + H(Tx_{2n-2}, M) \rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Из того, что M – замкнутое множество, $z \in M$, и f и S совместимы, следует, что $d(fgx_{2n}, Sfx_{2n-1}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Это, наряду с тем, что отображение f непрерывно и отображение S H -непрерывно, приводит к тому, что

$$\begin{aligned} d(fz, Sz) &\leq d(fz, fgx_{2n}) + d(fgx_{2n}, Sz) \\ &\leq d(fz, fgx_{2n}) + d(fgx_{2n}, Sfx_{2n-1}) + H(Sfx_{2n-1}, Sz) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, т.е. $fz \in Sz$, так как Sz замкнуто. Аналогично можно показать, что $gz \in Tz$. Если одно из $T(X)$, $S(X)$ и $g(X)$ является полным подпространством пространства X , то поскольку $T(X) \subset f(X)$ и $S(X) \subset g(X)$, мы видим, что данный случай является частным случаем рассмотренного выше. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть Y – произвольное непустое множество и (X, d) – метрическое пространство. Отображения $f: Y \rightarrow X$ и $T: Y \rightarrow CL(X)$ такие, что $T(Y) \subseteq f(Y)$ и неравенство (20) выполняется при всех $x, y \in Y$,

$$H(Tx, Ty) \leq \Phi(d(fx, fy), d(fx, Tx), d(fy, Ty), d(fx, Ty), d(fy, Tx)), \quad (20)$$

где функция Φ удовлетворяет условию ϕ -типа. Если либо $T(Y)$, либо $f(Y)$ является полным подпространством пространства X , то существует точка $t \in Y$ такая, что $ft \in Tt$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть заданы $f = g$ и $S = T$ на Y , введенные в теореме 1. Действуя как в доказательстве теоремы 1, получим последовательность $\{x_n\}$ в Y такую, что $fx_{n+1} \in Tx_n$ при целых $n = 1, 2, \dots$ и $\{fx_n\}$ является последовательностью Коши в $f(Y)$.

Если $f(Y)$ – полное подпространство пространства X , то $\{fx_n\}$ имеет предел в $f(Y)$. Обозначим его через μ . Пусть $t \in f^{-1}\mu$; тогда $ft = \mu$. В силу (20) из того, что $fx_{n+1} \in Tx_n$, следует, что

$$\begin{aligned} d(fx_{n+1}, Tt) &\leq H(Tx_n, Tt) \\ &\leq \Phi(d(fx_n, ft), d(fx_n, Tx_n), d(ft, Tt), d(fx_n, Tt), d(ft, Tx_n)) \\ &\leq \Phi(d(fx_n, ft), d(fx_n, fx_{n+1}), d(ft, Tt), d(fx_n, Tt), d(ft, fx_{n+1})). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow +\infty$, из условий (ϕ_1) и (ϕ_2) получим, что

$$d(ft, Tt) \leq \Phi(0, 0, d(ft, Tt), d(ft, Tt), 0) \leq \psi(d(ft, Tt)),$$

что вместе с леммой 1 дает $d(ft, Tt) = 0$, т.е. $ft \in Tt$. Когда $T(Y)$ является полным подпространством пространства X , то поскольку $T(Y) \subset f(Y)$, мы видим, что данный случай является частным случаем рассмотренного выше. Искомое утверждение доказано.

Предположим, что

$$\Phi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = h[aL(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) + (1 - a)N(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)] \quad (21)$$

в следствии 1, где $0 \leq h < 1$, $0 \leq a \leq 1$,

$$L(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \max \left\{ t_1, t_2, t_3, \frac{1}{2}(t_4 + t_5) \right\},$$

$$N(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \left[\max \left\{ t_1^2, t_2 t_3, t_4 t_5, \frac{1}{2} t_2 t_5, \frac{1}{2} t_3 t_4 \right\} \right]^{1/2}.$$

Тогда мы имеем основной результат, полученный Патаком, Кангом и Чо [5].

Обозначим через $\mathbb{R}^+$ множество неотрицательных действительных чисел.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (X, d) – метрическое пространство, $f, g: X \rightarrow X$ – непрерывные отображения и $S, T: X \rightarrow CL(X)$ – H -непрерывные отображения такие, что $T(X) \subset f(X)$, $S(X) \subset g(X)$ и (22) выполняется при всех $x, y \in X$,

$$H^p(Sx, Ty) \leq \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) \Phi_i^p(d(fx, gy), d(fx, Sx), d(gy, Ty), d(fx, Ty), d(gy, Sx)) + \Gamma(d(fx, Ty), d(gy, Sx)) \quad (22)$$

где $p \geq 1$, функция $\alpha_i: X \times X \rightarrow [0, 1]$ при $\sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) \leq 1$, $\Gamma: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ при $\Gamma(u, v) = 0$ всякий раз, когда $uv = 0$, и функция Φ_i удовлетворяет условию ϕ -типа, $i = 1, 2, 3$. Если одно из множеств $S(X)$, $T(X)$, $f(X)$ и $g(X)$ является полным подпространством пространства X и пара (f, S) и (g, T) совместима, то существует точка $z \in X$ такая, что $fz \in Sz$, $gz \in Tz$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. Мы его здесь не приводим.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 2 является обобщением многих теорем о неподвижной точке и точке совпадения (сравни [1]–[3]).

4. Теоремы о неподвижной точке. В этом разделе, применяя теорему 1 и следствие 1, докажем несколько теорем о неподвижной точке для нелинейных гибридных отображений, удовлетворяющих условию ϕ -типа.

ТЕОРЕМА 3. Пусть (X, d) – метрическое пространство, $f, g: X \rightarrow X$ и $S, T: X \rightarrow CL(X)$ – ψ -кратные квазисовместимые отображения такие, что $T(X) \subset f(X)$, $S(X) \subset g(X)$ и (2) выполняется при всех $x, y \in X$, где $\psi(t)$ – функция, введенная в определении 3. Если одно из множеств $S(X)$, $T(X)$, $f(X)$ и $g(X)$ является полным подпространством пространства X , то f, g, S и T имеют общую неподвижную точку z в X . Далее, z является их единственной общей неподвижной точкой, если $\Phi(t, 0, 0, t, t) < t$ для любого заданного $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действуя как в доказательстве теоремы 1, мы видим, что существует последовательность $\{x_n\}$ в X такая, что $Sx_{2n-1}, Tx_{2n} \rightarrow M$ при некотором $M \in CL(X)$, $fx_{2n-1}, gx_{2n} \rightarrow z \in M$ и

$$d(gx_{2n}, fx_{2n-1}) \leq H(Sx_{2n-1}, Tx_{2n-2}) + \beta_{2n-1}^+,$$

$$d(fx_{2n+1}, gx_{2n}) \leq H(Tx_{2n}, Sx_{2n-1}) + \beta_{2n}^+,$$

где $gx_{2n} \in Sx_{2n-1}$, $fx_{2n-1} \in Tx_{2n-2}$ и $\beta_{2n-1}^+, \beta_{2n}^+ \rightarrow 0$. Так как f, g, S и T – ψ -кратные квазисовместимые отображения, $gz, fz \in M$. Тогда из определения метрики Хаусдорфа следует, что

$$d(fz, Tz) \leq H(M, Tz), \quad d(z, Tz) \leq H(M, Tz), \quad (23)$$

$$d(gz, Sz) \leq H(M, Sz), \quad d(z, Sz) \leq H(M, Sz). \quad (24)$$

Проверим, что z является общей неподвижной точкой для g, S и f, T . Действительно, применяя (2), получим

$$H(Sx_{2n-1}, Tz) \leq \Phi(d(fx_{2n-1}, gz), d(fx_{2n-1}, Sx_{2n-1}), d(gz, Tz), d(fx_{2n-1}, Tz), d(gz, Sx_{2n-1})).$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow +\infty$, получим

$$H(M, Tz) \leq \Phi(d(z, gz), d(z, M), d(gz, Tz), d(z, Tz), d(gz, M)), \quad (25)$$

откуда наряду с $gz \in M$, $z \in M$ и (23) следует, что

$$H(M, Tz) \leq \Phi(d(z, gz), 0, H(M, Tz), H(M, Tz), 0). \quad (26)$$

Теперь покажем, что

$$H(M, Tz) \geq d(z, gz). \quad (27)$$

Действительно, если $H(M, Tz) < d(z, gz)$, то $gz \neq z$ и из (26) следует, что

$$H(M, Tz) \leq \Phi(d(z, gz), 0, d(z, gz), d(z, gz), 0) \leq \psi(d(z, gz)). \quad (28)$$

С другой стороны, так как g, f и S, T – ψ -кратные квазисовместимые отображения, то из $gz \neq z$ следует, что $H(M, Tz) > \psi(d(z, gz))$. А это противоречит (28). Следовательно, неравенство (27) доказано. Из (26) и (27) следует, что

$$H(M, Tz) \leq \Phi(H(M, Tz), 0, H(M, Tz), H(M, Tz), 0) \leq \psi(H(M, Tz)), \quad (29)$$

что вместе с леммой 1 дает, что $H(M, Tz) = 0$, т.е. $M = Tz$. Теперь, применяя (27) и замечая, что $z \in M$, получим $gz = z \in M$. Действуя аналогично предыдущему, получим $M = Sz$ и $fz = z \in M$. Следовательно, $gz = t \in Sz$ и $fz = z \in Tz$, т.е. z является общей неподвижной точкой для g, S и f, T .

Наконец, докажем единственность общей неподвижной точки z . Пусть z' – другая общая неподвижная точка для f, g, S и T . Из условия (2) следует, что

$$\begin{aligned} d(z', z) &= d(Sz', Tz) \leq \Phi(d(fz', gz), d(fz', Sz'), d(gz, Tz), d(fz', Tz), d(gz, Sz')) \\ &\leq \Phi(d(z', z), 0, 0, d(z', z), d(z', z)), \end{aligned}$$

откуда наряду с $\Phi(t, 0, 0, t, t) < t$ при условии, что $t > 0$, следует, что $d(z', z) = 0$ и, следовательно, $z = z'$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть (X, d) – метрическое пространство, $f: X \rightarrow X$ – непрерывное отображение и $T: X \rightarrow CL(X)$ – H -непрерывное отображение такое, что $T(X) \subset f(X)$ и (1) выполняется при всех $x, y \in X$. Предположим, что выполнены

следующие условия:

- (i) $T(X)$ или $f(X)$ – полное подпространство пространства X , и пара (f, T) совместима;
- (ii) при каждом $x \in X$ из $fx \in Tx$ следует, что $f^n x \rightarrow z$ при некотором $z \in X$. Тогда f и T имеют общую неподвижную точку в X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 1 $ft \in Tt$ для некоторого $t \in X$, а также $f^n t \rightarrow z$ для некоторого $z \in X$ по условию (ii). Теперь проверим, что $f^2 t = fft \in Tft$. Действительно, пусть при каждом целом $n \geq 1$ имеем $x_n = t$ и $y_n = ft$. Тогда отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = ft \in Tt, \quad T x_n \rightarrow Tt, \quad y_n \in T x_n,$$

откуда, наряду с тем, что f и T совместимы, следует, что $d(f y_n, T f x_n) = 0$ и также $f^2 t \in Tft$. Повторяя эти рассуждения, получим $f^n t \in T f^{n-1} t$ для каждого n , и из того, что T непрерывно, следует, что

$$d(z, Tz) \leq d(z, f^n t) + d(f^n t, Tz) \leq d(z, f^n t) + H(T f^{n-1} t, Tz) \rightarrow 0,$$

т.е. $z \in Tz$, так как Tz замкнуто. Ясно, что $fz = z$ в силу непрерывности отображения f . Следовательно, z является общей неподвижной точкой для f и T . Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность анонимным рецензентам за ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Y. J. Cho, B. Fisher, G. S. Genga, “Coincidence theorems for nonlinear hybrid contractions”, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **20**:2 (1997), 249–256.
- [2] H. Kaneko, S. Sessa, “Fixed point theorems for compatible multi-valued and single-valued mapping”, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **12**:2 (1989), 257–262.
- [3] N. Shahzad, T. Kamran, “Coincidence points and R -weakly commuting maps”, *Arch. Math. (Brno)*, **37**:3 (2001), 179–183.
- [4] H. K. Pathak, “Fixed point theorems for weak compatible multi-valued and single-valued mapping”, *Acta Math. Hungar.*, **67**:1–2 (1995), 69–78.
- [5] H. K. Pathak, S. M. Kang, Y. J. Cho, “Coincidence and fixed point theorems for nonlinear hybrid generalized contractions”, *Czechoslovak Math. J.*, **48**:2 (1998), 341–357.
- [6] S. B. Nadler, jr., “Multivalued contraction mappings”, *Pacific J. Math.*, **30** (1969), 475–488.

Ийшенг Лай

Колледж статистики и математики, Жейянг Гонгшанг
университет, Китай
E-mail: laiisheng@yahoo.com.cn

Поступило

21.10.2005