Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Карачик, Об одном разложении типа Альманси,
Матем. заметки, 2008, том 83, выпуск 3, 370–380

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4525>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:50:42

Об одном разложении типа Альманси

В. В. Карачик

Получено разложение типа Альманси для функций, удовлетворяющих уравнению $\Delta_\lambda^m u = 0$, где $\Delta_\lambda = \lambda_1 \partial^2 / \partial x_1^2 + \dots + \lambda_n \partial^2 / \partial x_n^2$ и $\lambda_k \neq 0$.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. В 1899 г. Альманси [1] доказал следующее замечательное утверждение: если $f(x)$ полигармоническая функция порядка m в звездной области Ω с центром в начале координат, то существуют единственные функции $f_1(x), \dots, f_m(x)$, гармонические в Ω , такие, что $f(x) = f_0(x) + |x|^2 f_1(x) + \dots + |x|^{2(m-1)} f_{m-1}(x)$. Затем были многочисленные обобщения полученного результата. Во-первых, следует отметить, что в [2] (теорема 2.2) формула Альманси была распространена на голоморфные функции $f(x)$ комплексного переменного x . Интересные свойства полигармонических функций, опирающиеся на формулу Альманси, были получены Бицадзе в [3].

Обобщения другого рода были получены в 1958 г. Николеску [4], где найдено разложение Альманси для класса операторов от двух переменных, который включает в себя и оператор теплопроводности. В работе [5] рассматривалось разложение Альманси для решений уравнения $\square^m u = 0$, где $\square = \Delta_x + \lambda(\partial^2 / \partial t^2)$ или $\square = \Delta_x + \lambda(\partial / \partial t)$ при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

В настоящей работе, основываясь на построенных в [6] 0-нормированных системах функций для оператора Лапласа, утверждение Альманси распространяется на функции, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta_\lambda^m u = 0,$$

где

$$\Delta_\lambda = \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \lambda_n \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad \lambda_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (1.1)$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

2. Нормированные системы функций. В работе [7] было сформулировано понятие f -нормированной системы функций относительно дифференциального оператора L в области Ω . Это понятие в случае $f = 0$ означает, что система функций $\{f_k(x) \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$ в области Ω удовлетворяет условиям

$$L f_0(x) = 0, \quad L f_k(x) = f_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

В дальнейшем изложении мы будем использовать системы функций, обладающие свойством (*). Нормированные системы функций были использованы в [7] для построения полиномиальных решений уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.

Пусть $u \in C^2(\Omega)$ классическое решение уравнения

$$\Delta_\lambda u(x) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Предположим также, что область Ω обладает свойством звездности: $\forall t \in [0, 1], x \in \Omega \Rightarrow tx \in \Omega$. Построим систему функций в Ω , обладающую свойством (*) при $L = \Delta_\lambda$. Для этого зададим на Ω следующую систему функций:

$$G_{k-1}(x; u) = \frac{1}{4^k} \frac{|x|_\lambda^{2k}}{k!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1} \alpha^{n/2-1}}{(k-1)!} u(\alpha x) d\alpha, \quad k > 0, \quad (2.2)$$

где $|x|_\lambda^2 = (1/\lambda_1)x_1^2 + \dots + (1/\lambda_n)x_n^2$. Выражение $|x|_\lambda^{2k}$ определим равенством $|x|_\lambda^{2k} = (|x|_\lambda^2)^k$.

ТЕОРЕМА 1. Система функций $\{G_k(x; u) \mid k = 0, 1, \dots\}$ обладает свойством (*) при $L = \Delta_\lambda$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Подобная система функций была рассмотрена в [6] для оператора Лапласа Δ . Эта же идея была использована также в [8] для построения полной системы гармонических полиномов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Благодаря свойству звездности области Ω функции $G_k(x; u)$ из (2.2) определены на всей Ω . Более того, $G_k(x; u) \in C^2(\Omega)$ в силу возможности дифференцирования по параметру под знаком интеграла и в силу включения $u \in C^2(\Omega)$.

Проверим, непосредственно, что равенство $\Delta_\lambda G_k(x; u) = G_{k-1}(x; u)$ выполнено для функций $u \in C^2(\Omega)$. Пусть l – четное. Принимая во внимание тождества

$$\Delta_\lambda(|x|_\lambda^l v) = v \Delta_\lambda |x|_\lambda^l + |x|_\lambda^l \Delta_\lambda v + 2l|x|_\lambda^{l-2} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial v}{\partial x_i}(\alpha x) = \alpha \sum_{i=1}^n x_i v_{x_i}(\alpha x) = \alpha \frac{\partial v}{\partial \alpha}(\alpha x),$$

а также равенство

$$\Delta_\lambda |x|_\lambda^l = l(l+n-2)|x|_\lambda^{l-2} \quad (2.4)$$

при $l = 2k$, получим

$$\Delta_\lambda G_k(x; u) = \frac{2}{4^k} \frac{|x|_\lambda^{2k-2}}{(k-1)!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1} \alpha^{n/2-1}}{(k-1)!} \left((2k+n-2)u(\alpha x) + 2\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} u(\alpha x) \right) d\alpha. \quad (2.5)$$

Пусть $k > 1$. Применяя интегрирование по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda G_k(x; u) &= \frac{2}{4^k} \frac{|x|_\lambda^{2k-2}}{(k-1)!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-2} \alpha^{n/2-1}}{(k-1)!} \\ &\quad \times ((2k+n-2)(1-\alpha) + 2(k-1)\alpha - n(1-\alpha)) u(\alpha x) d\alpha \\ &= \frac{2}{4^k} \frac{|x|_\lambda^{2k-2}}{(k-1)!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-2} \alpha^{n/2-1}}{(k-1)!} (2k-2) u(\alpha x) d\alpha = G_{k-1}(x; u). \end{aligned}$$

Если $k = 1$, то согласно (2.5) можем записать

$$\begin{aligned}\Delta_\lambda G_1(x; u) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \alpha^{n/2-1} \left(nu(\alpha x) + 2\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} u(\alpha x) \right) d\alpha \\ &= \int_0^1 \alpha^{n/2} \frac{\partial}{\partial \alpha} u(\alpha x) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha^{n/2}) u(\alpha x) d\alpha = \alpha^{n/2} u(\alpha x)|_0^1 = u(x) \equiv G_0(x; u).\end{aligned}$$

Теорема доказана.

3. Разложение Альманси. Из теоремы 1 сразу следует, что

$$\Delta_\lambda^r G_k(x; u(x)) = \begin{cases} G_{k-r}(x; u(x)), & k > r, \\ u(x), & k = r, \\ 0, & k < r, \end{cases} \quad (3.1)$$

а поэтому функции $G_k(x; u)$ при $k = 0, 1, \dots, m$ и функции $u(x)$, удовлетворяющей уравнению (2.1), удовлетворяют итерированному уравнению (2.1)

$$\Delta_\lambda^{m+1} u = 0. \quad (3.2)$$

Более того, верно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $P(x)$ записывается в виде

$$P(x) = G_0(x; v_0) + G_1(x; v_1) + \dots + G_m(x; v_m) \quad (3.3)$$

при некоторых $v_k(x)$, удовлетворяющих уравнению (2.1); тогда имеют место равенства

$$v_k(x) = \Delta_\lambda^k P(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{4^s} \frac{|x|_\lambda^{2s}}{s!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{s-1} \alpha^{s-1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta_\lambda^{k+s} P(\alpha x) d\alpha. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для $P(x)$ имеет место формула (3.3). Найдем функции $v_k(x)$. Нетрудно заметить, что

$$\Delta_\lambda^m G_m(x; v_m) = v_m(x).$$

Далее, учитывая (2.2), получим

$$\Delta_\lambda^{m-1} P(x) = G_0(x; v_{m-1}) + G_1(x; v_m) = v_{m-1}(x) + \frac{|x|_\lambda^2}{4} \int_0^1 \alpha^{n/2-1} v_m(\alpha x) d\alpha$$

и, значит, используя предыдущее равенство, запишем

$$v_{m-1}(x) = \Delta_\lambda^{m-1} P(x) - \frac{|x|_\lambda^2}{4} \int_0^1 \alpha^{n/2-1} \Delta_\lambda^m P(\alpha x) d\alpha. \quad (3.5)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\Delta_\lambda^{m-2} P(x) &= G_0(x; v_{m-2}) + G_1(x; v_{m-1}) + G_2(x; v_m) \\ &= v_{m-2}(x) + \frac{|x|_\lambda^2}{4} \int_0^1 \alpha^{n/2-1} v_{m-1}(\alpha x) d\alpha \\ &\quad + \frac{|x|_\lambda^4}{4^2 2!} \int_0^1 \alpha^{n/2-1} (1-\alpha) v_m(\alpha x) d\alpha,\end{aligned}$$

и поэтому, используя (3.5), найдем

$$\begin{aligned} v_{m-2}(x) &= \Delta_\lambda^{m-2} P(x) - \frac{|x|_\lambda^2}{4} \int_0^1 \alpha^{n/2-1} \Delta_\lambda^{m-1} P(\alpha x) d\alpha \\ &\quad + \frac{|x|_\lambda^4}{4^2} \int_0^1 \alpha^{n/2-1} \alpha^2 \int_0^1 \beta^{n/2-1} \Delta_\lambda^m P(\alpha\beta x) d\beta d\alpha \\ &\quad - \frac{|x|_\lambda^4}{4^2 2!} \int_0^1 \alpha^{n/2-1} (1-\alpha) \Delta_\lambda^m P(\alpha x) d\alpha. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если учесть, что

$$\begin{aligned} &\frac{|x|_\lambda^4}{4^2} \int_0^1 \alpha^{n/2-1} \alpha^2 \int_0^1 \beta^{n/2-1} \Delta_\lambda^m P(\alpha\beta x) d\beta d\alpha \\ &= \frac{|x|_\lambda^4}{4^2} \int_0^1 \alpha^{n/2-1} \Delta_\lambda^m P(\alpha x) \int_\alpha^1 \beta d\beta d\alpha \\ &= \frac{|x|_\lambda^4}{4^2 2!} \int_0^1 (1-\alpha)(1+\alpha) \alpha^{n/2-1} \Delta_\lambda^m P(\alpha x) d\alpha, \end{aligned}$$

то мы можем из (3.6) получить

$$\begin{aligned} v_{m-2}(x) &= \Delta_\lambda^{m-2} P(x) - \frac{|x|_\lambda^2}{4} \int_0^1 \alpha^{n/2-1} \Delta_\lambda^{m-1} P(\alpha x) d\alpha \\ &\quad + \frac{|x|_\lambda^4}{4^2 2!} \int_0^1 \alpha(1-\alpha) \alpha^{n/2-1} \Delta_\lambda^m P(\alpha x) d\alpha. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Теперь мы в состоянии предложить общую формулу для вычисления функции $v_{m-i}(x)$:

$$v_{m-i}(x) = \Delta_\lambda^{m-i} P(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{4^s} \frac{|x|_\lambda^{2s}}{s!} \int_0^1 \frac{\alpha^{s-1} (1-\alpha)^{s-1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta_\lambda^{m-i+s} P(\alpha x) d\alpha, \quad (3.8)$$

где $i = 1, \dots, m$.

Докажем ее. Очевидно, что согласно (3.5) и (3.7) эта формула верна для $i = 1, 2$. Предполагая верность (3.8) при некотором $j \geq 1$ и для всех $i \leq j$, докажем ее справедливость и при $i = j + 1$.

Из (3.3) нетрудно получить

$$\Delta_\lambda^{m-j-1} P(x) = v_{m-j-1} + G_1(x; v_{m-j}) + \dots + G_{j+1}(x; v_m),$$

откуда

$$\begin{aligned} v_{m-j-1} &= \Delta_\lambda^{m-j-1} P(x) - \sum_{i=1}^{j+1} G_i(x; v_{m-j-1+i}) \\ &= \Delta_\lambda^{m-j-1} P(x) - \sum_{i=1}^{j+1} \frac{1}{4^i} \frac{|x|_\lambda^{2i}}{i!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{i-1} \alpha^{n/2-1}}{(i-1)!} v_{m-j-1+i}(\alpha x) d\alpha. \end{aligned}$$

Используя предположение индукции (3.8) и равенство $\Delta_\lambda^k P = 0$ для $k \geq m+1$, найдем

$$\begin{aligned} v_{m-j-1} = & \Delta_\lambda^{m-j-1} P(x) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} \frac{|x|_\lambda^{2i}}{i!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{i-1}}{(i-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta_\lambda^{m-j-1+i} P(\alpha x) d\alpha \\ & - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} \frac{|x|_\lambda^{2i}}{i!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{i-1} \alpha^{n/2-1}}{(i-1)!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{4^s} \frac{|\alpha x|_\lambda^{2s}}{s!} \\ & \times \int_0^1 \beta^{n/2-1} \frac{(1-\beta)^{s-1}}{(s-1)!} \beta^{s-1} \Delta_\lambda^{m-j-1+i+s} P(\alpha\beta x) d\beta d\alpha. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Обозначим последнее слагаемое в полученной сумме через $I(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} I(x) = & - \sum_{i,s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{4^{i+s}} \frac{|x|_\lambda^{2i+2s}}{i!s!} \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{i-1} \alpha^{2s+n/2-1}}{(i-1)!} \\ & \times \frac{(1-\beta)^{s-1} \beta^{s+n/2-2}}{(s-1)!} \Delta_\lambda^{m-j-1+i+s} P(\alpha\beta x) d\beta d\alpha. \end{aligned} \quad (3.10)$$

После замены во внутреннем интеграле $\alpha\beta$ на β получим

$$\begin{aligned} I(x) = & - \sum_{i,s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{4^{i+s}} \frac{|x|_\lambda^{2i+2s}}{i!s!} \\ & \times \int_0^1 \int_0^\alpha \frac{\alpha(1-\alpha)^{i-1}(\alpha-\beta)^{s-1}}{(i-1)!(s-1)!} \beta^{n/2+s-2} \Delta_\lambda^{m-j-1+i+s} P(\beta x) d\beta d\alpha. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования в повторном интеграле и вводя обозначение

$$R(\beta) = \int_\beta^1 \alpha(1-\alpha)^{i-1}(\alpha-\beta)^{s-1} d\alpha,$$

получим

$$I(x) = - \sum_{i,s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s |x|_\lambda^{2i+2s}}{4^{i+s} i! s! (i-1)! (s-1)!} \int_0^1 R(\beta) \beta^{n/2+s-2} \Delta_\lambda^{m-j-1+i+s} P(\beta x) d\beta.$$

Вычислим функцию $R(\beta)$. Заменяя под интегралом α на $\alpha + \beta$, будем иметь

$$R(\beta) = \int_0^{1-\beta} (\alpha + \beta)(1 - \alpha - \beta)^{i-1} \alpha^{s-1} d\alpha.$$

Заменяя опять α на $\alpha(1-\beta)$, найдем

$$R(\beta) = (1-\beta)^{s+i-1} \int_0^1 (\alpha - \alpha\beta + \beta)(1-\alpha)^{i-1} \alpha^{s-1} d\alpha.$$

Воспользуемся теперь представлением бета-функции Эйлера в виде

$$B(s, i) = \int_0^1 \alpha^{s-1} (1-\alpha)^{i-1} d\alpha.$$

После простого преобразования получим

$$R(\beta) = B(s+1, i)(1-\beta)^{s+i} + B(s, i)\beta(1-\beta)^{s+i-1}.$$

Имея в виду связь между бета-функцией и гамма-функцией $B(s, i) = \Gamma(s)\Gamma(i)/\Gamma(s+i)$ (см. [9]), а также известное равенство $\Gamma(s) = (s-1)!$ выпишем

$$R(\beta) = \frac{s!(i-1)!}{(s+i)!}(1-\beta)^{s+i} + \frac{(s-1)!(i-1)!}{(s+i-1)!}\beta(1-\beta)^{s+i-1}.$$

Отсюда сразу получаем выражение для $I(x)$:

$$\begin{aligned} I(x) = & - \sum_{i,s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{i!} \frac{|x|_{\lambda}^{2i+2s}}{4^{i+s}} \\ & \times \int_0^1 \left(\frac{1}{(s+i)!(s-1)!} \beta^{s-1}(1-\beta)^{s+i} + \frac{1}{(s+i-1)!s!} \beta^s(1-\beta)^{s+i-1} \right) \\ & \times \beta^{n/2-1} \Delta_{\lambda}^{m-j-1+i+s} P(\beta x) d\beta. \end{aligned}$$

Кратное суммирование $\sum_{i,s=1}^{\infty}$ может быть взято следующим образом:

$$\sum_{i,s=1}^{\infty} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{i+s=l} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{s=1}^{l-1}.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} I(x) = & - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{|x|_{\lambda}^{2l}}{4^l} \int_0^1 \sum_{s=1}^{l-1} \left(\frac{(-1)^s \beta^{s-1}}{l!(s-1)!(l-s)!} (1-\beta)^l + \frac{(-1)^s \beta^s}{(l-1)!s!(l-s)!} (1-\beta)^{l-1} \right) \\ & \times \beta^{n/2-1} \Delta_{\lambda}^{m-j-1+l} P(\beta x) d\beta. \end{aligned}$$

Если обозначить в полученном выражении

$$J_1(\beta) = \frac{(1-\beta)^l}{l!} \sum_{s=1}^{l-1} \frac{(-1)^s \beta^{s-1}}{(l-s)!(s-1)!}, \quad J_2(\beta) = \frac{(1-\beta)^{l-1}}{(l-1)!} \sum_{s=1}^{l-1} \frac{(-1)^s \beta^s}{(l-s)!s!},$$

то получим

$$I(x) = - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{|x|_{\lambda}^{2l}}{4^l} \int_0^1 (J_1(\beta) + J_2(\beta)) \beta^{n/2-1} \Delta_{\lambda}^{m-j-1+l} P(\beta x) d\beta. \quad (3.11)$$

Вычислим $J_1(\beta)$ и $J_2(\beta)$. Имеем

$$\begin{aligned} J_1(\beta) &= - \frac{(1-\beta)^l}{l!} \sum_{s=1}^{l-1} \frac{(-\beta)^{s-1}}{(l-1-(s-1))!(s-1)!} = - \frac{(1-\beta)^l}{l!} \sum_{s=0}^{l-2} \frac{(-\beta)^s}{(l-1-s)!s!} \\ &= - \frac{(1-\beta)^l}{l!} \left[\sum_{s=0}^{l-1} \frac{(-\beta)^s}{(l-1-s)!s!} - \frac{(-\beta)^{l-1}}{(l-1)!} \right] = \frac{(1-\beta)^l}{l!(l-1)!} \left[(-\beta)^{l-1} - (1-\beta)^{l-1} \right], \\ J_2(\beta) &= \frac{(1-\beta)^{l-1}}{(l-1)!} \sum_{s=1}^{l-1} \frac{(-\beta)^s}{(l-s)!s!} = \frac{(1-\beta)^{l-1}}{(l-1)!} \left[\sum_{s=0}^l \frac{(-\beta)^s}{(l-s)!s!} - \frac{(-\beta)^l}{l!} - \frac{1}{l!} \right] \\ &= \frac{(1-\beta)^{l-1}}{(l-1)!} \left[\frac{(1-\beta)^l}{l!} - \frac{(-\beta)^l}{l!} - \frac{1}{l!} \right] = \frac{(1-\beta)^{l-1}}{l!(l-1)!} [(1-\beta)^l - (-\beta)^l - 1], \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} J_1(\beta) + J_2(\beta) &= \frac{(1-\beta)^{l-1}}{l!(l-1)!} [(1-\beta)(-\beta)^{l-1} - (1-\beta)^l + (1-\beta)^l - (-\beta)^l - 1] \\ &= \frac{(1-\beta)^{l-1}}{l!(l-1)!} [(-\beta)^{l-1} - 1]. \end{aligned}$$

После подстановки полученного выражения в (3.11), найдем

$$\begin{aligned} I(x) &= \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^l}{4^l} \frac{|x|_{\lambda}^{2l}}{l!} \int_0^1 \frac{\beta^{l-1}(1-\beta)^{l-1}}{(l-1)!} \beta^{n/2-1} \Delta_{\lambda}^{m-j-1+l} P(\beta x) d\beta \\ &\quad + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{4^l} \frac{|x|_{\lambda}^{2l}}{l!} \int_0^1 \frac{(1-\beta)^{l-1}}{(l-1)!} \beta^{n/2-1} \Delta_{\lambda}^{m-j-1+l} P(\beta x) d\beta \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{4^s} \frac{|x|_{\lambda}^{2s}}{s!} \int_0^1 \frac{\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{s-1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta_{\lambda}^{m-j-1+s} P(\alpha x) d\alpha \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{4^s} \frac{|x|_{\lambda}^{2s}}{s!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{s-1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta_{\lambda}^{m-j-1+s} P(\alpha x) d\alpha. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Используя вычисленное значение $I(x)$ вместо последнего слагаемого в (3.9), будем иметь

$$\begin{aligned} v_{m-j-1}(x) &= \Delta_{\lambda}^{m-j-1} P(x) \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{4^s} \frac{|x|_{\lambda}^{2s}}{s!} \int_0^1 \frac{\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{s-1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta_{\lambda}^{m-j-1+s} P(\alpha x) d\alpha, \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (3.8) при $i = j + 1$. Индукция доказана.

Таким образом, основываясь на (3.8), мы имеем для $v_k(x)$ общее выражение

$$v_k(x) = \Delta_{\lambda}^k P(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{4^s} \frac{|x|_{\lambda}^{2s}}{s!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{s-1} \alpha^{s-1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta_{\lambda}^{k+s} P(\alpha x) d\alpha,$$

где $k = 0, \dots, m$, которое совпадает с (3.4).

Итак, если для $P(x)$ имеет место равенство (3.3), то $v_k(x)$ находятся из (3.4). Теорема доказана.

Обобщением теоремы 2 является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $P(x)$ – произвольное решение уравнения (3.2); тогда имеет место представление

$$P(x) = v_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \frac{|x|_{\lambda}^{2k}}{k!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1} \alpha^{n/2-1}}{(k-1)!} v_k(\alpha x) d\alpha, \quad (3.13)$$

где функции $v_k(x)$, $k = 0, 1, \dots$, определяются из равенств (3.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $k > m$ формула (3.4) принимает вид $v_k(x) = 0$ и, значит, в сумме из формулы (3.13) верхний предел можно положить равным m . Более того, (3.13) в силу (2.2) совпадает с (3.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Докажем некоторые вспомогательные равенства. Введем следующий оператор:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Убедимся, что при $q \in \mathbb{N}$ и $s \geq 0$ для него верно равенство

$$(\Lambda + s + 1) \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^q}{q!} \alpha^s v(\alpha x) d\alpha = \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{q-1}}{(q-1)!} \alpha^{s+1} v(\alpha x) d\alpha, \quad (3.14)$$

а также при $q = 0$

$$(\Lambda + s + 1) \int_0^1 \alpha^s v(\alpha x) d\alpha = v(x). \quad (3.15)$$

Действительно, при $q = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \Lambda \int_0^1 \alpha^s v(\alpha x) d\alpha &= \int_0^1 \alpha^{s+1} \frac{\partial}{\partial \alpha} v(\alpha x) d\alpha = \alpha^{s+1} v(\alpha x)|_0^1 - (s+1) \int_0^1 \alpha^s v(\alpha x) d\alpha \\ &= v(x) - (s+1) \int_0^1 \alpha^s v(\alpha x) d\alpha \end{aligned}$$

и, значит, (3.15) выполнено. Пусть теперь $q \in \mathbb{N}$; тогда

$$\begin{aligned} \Lambda \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^q}{q!} \alpha^s v(\alpha x) d\alpha &= \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^q}{q!} \alpha^{s+1} \frac{\partial}{\partial \alpha} v(\alpha x) d\alpha \\ &= \frac{(1-\alpha)^q}{q!} \alpha^{s+1} v(\alpha x)|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{(1-\alpha)^q}{q!} \alpha^{s+1} \right)' v(\alpha x) d\alpha \\ &= -(s+1) \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^q}{q!} \alpha^s v(\alpha x) d\alpha \\ &\quad + \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{q-1}}{(q-1)!} \alpha^{s+1} v(\alpha x) d\alpha, \end{aligned}$$

откуда сразу следует (3.14).

Из (2.3) и (2.4) нетрудно получить равенство

$$\Delta_\lambda(|x|_\lambda^{2s} u(x)) = 4s|x|_\lambda^{2s-2} \left(\Lambda + s + \frac{n}{2} - 1 \right) u(x) + |x|_\lambda^{2s} \Delta_\lambda u(x). \quad (3.16)$$

2°. Покажем, что функции $v_k(x)$, найденные из равенства (3.4), удовлетворяют уравнению (2.1). Применим оператор Δ_λ к обеим частям (3.4), учитывая при этом, что дифференцирование под знаком суммы законно (суммирование в (3.13) конечно в силу замечания 2). Обозначая в полученном равенстве $Q_k(x) = \Delta_\lambda^k P(x)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda v_k(x) &= \Delta_\lambda Q_k(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{4^s s!} \Delta_\lambda \left(|x|_\lambda^{2s} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{s-1} \alpha^{s-1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta_\lambda^s Q_k(\alpha x) d\alpha \right) \\ &= \Delta_\lambda Q_k(x) - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{4^{s-1} (s-1)!} |x|_\lambda^{2s-2} \left(\Lambda + s + \frac{n}{2} - 1 \right) \\ &\quad \times \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{s-1} \alpha^{s-1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta_\lambda^s Q_k(\alpha x) d\alpha \end{aligned}$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{4^s s!} |x|_{\lambda}^{2s} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{s-1} \alpha^{s+1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta_{\lambda}^{s+1} Q_k(\alpha x) d\alpha.$$

С помощью (3.14) и (3.15) преобразуем первую сумму в выражении справа:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{4^{s-1}(s-1)!} |x|_{\lambda}^{2s-2} \left(\Lambda + s + \frac{n}{2} - 1 \right) \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{s-1} \alpha^{s-1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta_{\lambda}^s Q_k(\alpha x) d\alpha \\ &= \left(\Lambda + \frac{n}{2} \right) \int_0^1 \alpha^{n/2-1} \Delta_{\lambda} Q_k(\alpha x) d\alpha \\ &+ \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{4^{s-1}(s-1)!} |x|_{\lambda}^{2s-2} \left(\Lambda + s + \frac{n}{2} - 1 \right) \\ &\quad \times \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{s-1} \alpha^{s-1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta_{\lambda}^s Q_k(\alpha x) d\alpha \\ &= \Delta_{\lambda} Q_k(x) + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{4^{s-1}(s-1)!} |x|_{\lambda}^{2s-2} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{s-2} \alpha^s}{(s-2)!} \alpha^{n/2-1} \Delta_{\lambda}^s Q_k(\alpha x) d\alpha \\ &= \Delta_{\lambda} Q_k(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{4^s s!} |x|_{\lambda}^{2s} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{s-1} \alpha^{s+1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta_{\lambda}^{s+1} Q_k(\alpha x) d\alpha. \end{aligned}$$

Подставляя вычисленное значение суммы назад, видим, что все слагаемые сокращаются и мы получаем требуемое равенство $\Delta_{\lambda} v_k(x) = 0$.

3°. Докажем теперь, что имеет место формула (3.13), в которой $v_k(x)$ находятся из (3.4). Для этого положим в (3.13) $P(x) = f(x)$ и подставим выражение для $v_k(x)$ в (3.13). Получим

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{4^s} \frac{|x|_{\lambda}^{2s}}{s!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{s-1} \alpha^{s-1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta_{\lambda}^s P(\alpha x) d\alpha \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \frac{|x|_{\lambda}^{2k}}{k!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta_{\lambda}^k P(\alpha x) d\alpha \\ &+ \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{4^{k+s}} \frac{|x|_{\lambda}^{2(k+s)}}{k! s!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1} \alpha^{2s+n/2-1}}{(k-1)!} \\ &\quad \times \int_0^1 \frac{(1-\beta)^{s-1} \beta^{s-1}}{(s-1)!} \beta^{n/2-1} \Delta_{\lambda}^{k+s} P(\alpha \beta x) d\beta d\alpha. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Обозначим последнюю сумму в полученном выражении через $I_1(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{4^{k+s}} \frac{|x|_{\lambda}^{2(k+s)}}{k! s!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1} \alpha^{2s+n/2-1}}{(k-1)!} \\ &\quad \times \int_0^1 \frac{(1-\beta)^{s-1} \beta^{s+n/2-2}}{(s-1)!} \Delta_{\lambda}^{k+s} P(\alpha \beta x) d\beta d\alpha. \end{aligned}$$

Из (3.10) видим, что имеет место равенство $I_1(x) = -I(x)$ при $P(x) = \Delta_\lambda^{m-j-1}P(x)$. Поэтому, в соответствии с (3.12)

$$I_1(x) = - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{4^s} \frac{|x|_\lambda^{2s}}{s!} \int_0^1 \frac{\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{s-1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta_\lambda^s P(\alpha x) d\alpha \\ - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{4^s} \frac{|x|_\lambda^{2s}}{s!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{s-1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta_\lambda^s P(\alpha x) d\alpha.$$

После подстановки найденного значения выражения $I_1(x)$ в (3.17) получим тождество $f(x) = P(x)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функция $P(x)$ – некоторое решение уравнения (3.2); тогда имеет место представление

$$P(x) = u_0(x) + u_1(x)|x|_\lambda^2 + \dots + u_m(x)|x|_\lambda^{2m},$$

где функции $u_0(x), \dots, u_m(x)$ являются решениями уравнения (2.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно заметить, что если в равенстве (3.13) положить

$$u_k(x) = \frac{1}{4^k k!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} \alpha^{n/2-1} v_k(\alpha x) d\alpha,$$

то утверждаемое равенство сразу следует из теоремы 3. Следствие доказано.

4. Пример. В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрим уравнение

$$\Delta_\lambda v(x) + \mu v(x) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (4.1)$$

где $\mu \in \mathbb{R}_+$, в звездной области Ω .

Воспользуемся, формально, формулой (3.13) для нахождения решения $v(x)$, поскольку при доказательстве формулы (3.13) условие $\Delta_\lambda^{m+1}P(x) = 0$ не было использовано. Для этого вычислим функции $v_k(x)$ из (3.4). Поскольку в силу уравнения (4.1) $\Delta_\lambda v(x) = -\mu v(x)$, то

$$v_k(x) = \Delta_\lambda^k v(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{4^s} \frac{|x|_\lambda^{2s}}{s!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{s-1} \alpha^{s-1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta_\lambda^{k+s} v(\alpha x) d\alpha \\ = (-\mu)^k \left(v(x) + \mu \frac{|x|_\lambda^2}{4} \int_0^1 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(\mu(1-\alpha)\alpha|x|_\lambda^2)^{s-1}}{4^{s-1}s!(s-1)!} \alpha^{n/2-1} v(\alpha x) d\alpha \right) = (-\mu)^k v_0(x).$$

Нетрудно заметить, что если обозначить

$$g_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{(2, 2)_k(m, 2)_k}$$

(см. [6]), то функцию $v_0(x)$, удовлетворяющую уравнению (2.1), можно записать в виде

$$v_0(x) = v(x) + \mu \frac{|x|_\lambda^2}{4} \int_0^1 g_4(-\mu\alpha(1-\alpha)|x|_\lambda^2) \alpha^{n/2-1} v(\alpha x) d\alpha. \quad (4.2)$$

Теперь из (3.13) находим

$$\begin{aligned}
 v(x) &= v_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \frac{|x|_{\lambda}^{2k}}{k!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} \alpha^{n/2-1} v_k(\alpha x) d\alpha \\
 &= v_0(x) - \mu \frac{|x|_{\lambda}^2}{4} \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\mu)^{k-1}}{4^{k-1}} \frac{|x|_{\lambda}^{2k-2}}{k!} \frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} \alpha^{n/2-1} v_0(\alpha x) d\alpha \\
 &= v_0(x) - \mu \frac{|x|_{\lambda}^2}{4} \int_0^1 g_4 \left(\mu(1-\alpha)|x|_{\lambda}^2 \right) v_0(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Формулы (4.2) и (4.3) задают взаимно однозначное соответствие между решениями уравнения (2.1) и (4.1). Они совпадают при $\Delta_{\lambda} = \Delta$ с соответствующими формулами, полученными в [6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Almansi, “Sull’integrazione dell’equazione differenziale $\Delta^{2n}u = 0$ ”, *Annali di Mat.* (3), **2** (1899), 1–51.
- [2] N. Aronszajn, M. T. Creese, L. J. Lipkin, *Polyharmonic Functions*, Oxford Math. Monogr., Oxford Univ. Press, New York, 1983.
- [3] А. В. Бицадзе, “О некоторых свойствах полигармонических функций”, *Дифференц. уравнения*, **24**:5 (1988), 825–831.
- [4] N. Nicolescu, “Problème de l’analyticité par rapport à un opérateur linéaire”, *Studia Math.*, **16** (1958), 353–363.
- [5] G. B. Ren, U. Kähler, “Almansi decompositions for polyharmonic, polyheat, and polywave functions”, *Studia Math.*, **172**:1 (2006), 91–100.
- [6] V. V. Karachik, “Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications”, *J. Math. Anal. Appl.*, **287**:2 (2003), 577–592.
- [7] V. V. Karachik, “Polynomial solutions to the systems of partial differential equations with constant coefficients”, *Yokohama Math. J.*, **47**:2 (2000), 121–142.
- [8] V. V. Karachik, “On one set of orthogonal harmonic polynomials”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**:12 (1998), 3513–3519.
- [9] H. Bateman, A. Erdélyi, *Higher Transcendental Functions*, vol. II, New York, 1953.

В. В. Карачик

Южно-Уральский государственный университет

E-mail: karachik@susu.ru

Поступило

18.11.2006

Исправленный вариант

04.04.2007