Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, О распределении
целочисленных случайных величин, связанных одним
линейным неравенством. II, *Матем. заметки*, 2008,
том 83, выпуск 3, 381–401

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4526>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 09:08:29

О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним линейным неравенством. II

В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский

Продолжено рассмотрение задачи о распределении тождественных частиц по целочисленным уровням энергии при ограничении сверху на суммарную энергию. Показано, что в рассматриваемой модели может иметь место явление, известное как *Бозе-конденсат*. Изучены системы размерности $d < 1$ (включая отрицательные размерности).

Библиография: 1 название.

1. Введение

В статье [1] рассматривалась задача о распределении подчиняющихся заданной парастатистике тождественных частиц по целочисленным уровням энергии при условии, что число частиц не задано, а суммарная энергия системы ограничена сверху некоторой постоянной M . Было показано, что при больших M большинство вариантов концентрируется вблизи отвечающего этой парастатистике предельного распределения. В указанной статье рассматривался случай систем размерности $d \geq 1$ (причем размерность может быть как целой, так и дробной), а основные результаты получены в предположении, что $d > 2$.

В данной статье, которая является продолжением статьи [1], мы, во-первых, заканчиваем рассмотрение случая $d \geq 1$, а именно, доказываем результаты о концентрации при $1 \leq d \leq 2$, а во-вторых, изучаем системы размерности $d < 1$ (включая отрицательные размерности). Во втором случае уже сама постановка задачи нетривиальна – кратности, определяемые той же формулой, что и при $d \geq 1$, оказываются нулевыми, начиная с некоторого номера j , и чтобы сделать задачу осмысленной, их приходится “промасштабировать”, вводя тем самым в задачу дополнительный большой параметр.

Для упрощения изложения мы рассматриваем только случай бозе-эйнштейновской статистики и не останавливаемся на общих парастатистиках.

В заключение работы мы показываем, что в рассматриваемых системах может иметь место явление, известное как *конденсат*. Именно, при заданном M число частиц в большинстве вариантов близко к некоторому значению N (зависящему от M и от размерности системы). Если же мы потребуем, чтобы число частиц равнялось некоторому числу $L \gg N$, то для большинства вариантов большое количество частиц (порядка L) занимает нижний энергетический уровень (эти частицы и образуют конденсат), а распределение частиц на втором и последующих уровнях энергии близко к распределению Бозе–Эйнштейна.

2. Теоремы о концентрации в размерностях $1 \leq d \leq 2$

2.1. Определение системы. Для уровней энергии $j = 1, 2, \dots$ кратностей

$$q_j = \left\lfloor \frac{\Gamma(i+d)}{\Gamma(d)\Gamma(i+1)} \right\rfloor \quad (1)$$

рассматриваем всевозможные наборы целых неотрицательных чисел N_{jk} , $j = 1, 2, \dots$, $k = 1, \dots, q_j$, таких, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk} \leq M; \quad (2)$$

все такие наборы считаются равновероятными.

Определим число $b = b(M)$ как положительное решение уравнения

$$M = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j q_j}{e^{bj} - 1} \quad (3)$$

и положим

$$N_j = \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk} \quad (4)$$

$$\bar{N}_j = \frac{q_j}{e^{bj} - 1}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

$$N = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{N}_j \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j}{e^{bj} - 1}. \quad (6)$$

В [1] (предложения 6 и 7) доказано, что при $M \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические соотношения

$$M \simeq b^{-d-1}, \quad d \geq 1; \quad (7)$$

$$N \simeq b^{-d}, \quad d > 1; \quad N \simeq b^{-1} |\ln b|, \quad d = 1. \quad (8)$$

2.2. Теоремы о концентрации. Будем формулировать теоремы о концентрации для кумулятивных вероятностей. Пусть $\psi(x)$ – фиксированная положительная функция, которая стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$.

ТЕОРЕМА 1. *Положим*

$$\Delta N = \begin{cases} \sqrt{N} \ln N \psi(N), & \text{если } d = 2, \\ N^{1/d+\varepsilon}, & \text{если } 1 < d < 2, \end{cases} \quad (9)$$

где ε – достаточно малое положительное число (в частности, $1/d + \varepsilon < 1$). Существуют такие постоянные C_k , $k = 1, 2, \dots$, что для любого $l \in \mathbb{Z}_+$ справедлива оценка

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{j=1}^l (N_j - \bar{N}_j) \right| > \Delta N \right) \leq C_k N^{-k}. \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 2. *Положим*

$$\Delta E = \frac{E}{N} \begin{cases} \sqrt{N \ln N} \psi(N), & \text{если } 1 < d \leq 2, \\ \sqrt{N} \ln N \psi(N), & \text{если } d = 1. \end{cases} \quad (11)$$

Существуют такие постоянные C_k , $k = 1, 2, \dots$, что для любого $l \in \mathbb{Z}_+$ справедлива оценка

$$P\left(\left|\sum_{j=1}^l j(N_j - \bar{N}_j)\right| > \Delta E\right) \leq C_k N^{-k}. \quad (12)$$

2.3. Теоремы о концентрации для высоких уровней. Заметим, что теорема 1 вообще не дает ответа на вопрос о концентрации при $d = 1$, а при $d \in (1, 2)$ ширина окрестности, в которой концентрируется согласно этой теореме большинство вариантов, существенно больше, чем $\sqrt{N}$ и растет при приближении d к единице. Оказывается, однако, что для $d \in [1, 2)$ можно доказывать теоремы о концентрации, в которых ширина окрестности будет не слишком велика, но при этом приходится рассматривать не все, а лишь достаточно высокие уровни энергии, начиная с некоторого $j = j_0$.

Приведем соответствующим образом измененную постановку задачи.

Для уровней энергии $j = j_0, j_0 + 1, \dots$ кратностей (1) рассматриваем всевозможные наборы целых неотрицательных чисел N_{jk} , $j = j_0, j_0 + 1, \dots$, $k = 1, \dots, q_j$, таких, что

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} j \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk} \leq M; \quad (13)$$

все такие наборы считаются равновероятными.

Определим число $b = b(M)$ как положительное решение уравнения

$$M = \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{j q_j}{e^{bj} - 1} \quad (14)$$

и определим числа $N_j, \bar{N}_j$, $j = j_0, j_0 + 1, \dots$, формулами (4) и (5), а N – формулой

$$N = \sum_{j=j_0}^{\infty} \bar{N}_j \equiv \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{q_j}{e^{bj} - 1}. \quad (15)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть j_0 выбирается таким образом, что

$$bj_0 \leq C \quad \text{для некоторой постоянной } C > 0. \quad (16)$$

Тогда при $M \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические соотношения

$$M \simeq b^{-d-1}, \quad d \geq 1; \quad (17)$$

$$N \simeq b^{-d}, \quad d > 1; \quad N \simeq b^{-1} |\ln bj_0|, \quad d = 1. \quad (18)$$

Теперь мы можем сформулировать теоремы о концентрации вариантов для случая, когда учитываются только числа заполнения, начиная с “достаточно высокого” уровня j_0 . А именно, будем считать, что

$$j_0 \geq \tilde{C} b^{-\gamma} \quad \text{для некоторой постоянной } \tilde{C} > 0, \quad (19)$$

где $\gamma \in (0, 1]$ – фиксированное число. Таким образом, уровень, с которого начинается рассмотрение, растет (хотя и, быть может, достаточно медленно) с ростом “обратной температуры” b .

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия (16) и (19). Положим

$$\Delta N = N^\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{d} - \frac{2-d}{2d} \gamma + \varepsilon \quad (20)$$

где ε – достаточно малое положительное число (в частности, такое, что $\alpha < 1$). Существуют такие постоянные C_k , $k = 1, 2, \dots$, что для любого $l \in \mathbb{Z}_+$, $l \geq j_0$, справедлива оценка

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{j=j_0}^l (N_j - \bar{N}_j) \right| > \Delta N \right) \leq C_k N^{-k}. \quad (21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При изменении γ от нуля до единицы показатель степени α изменяется от $1/d + \varepsilon$ до $1/2 + \varepsilon$. Таким образом, налицо компромисс между шириной окрестности, в которую ущемляется большинство вариантов, и номером уровня, начиная с которого мы ведем подсчет чисел заполнения.

3. Теоремы о концентрации в размерности $d < 1$

3.1. Кратности. Для систем размерности $d \geq 1$ кратности задавались формулой (см. [1])

$$q_j = [r_j], \quad \text{где } r_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (22)$$

(квадратные скобки означают целую часть числа). Что происходит с этой формулой при $d \leq 0$? Сразу бросается в глаза, что при целых неположительных d в знаменателе стоит особенность – полюс гамма-функции (как, впрочем, и в числителе, если $j+d \leq 0$), так что выражение в целом оказывается неопределенным. Легко, впрочем, переписать выражение для r_j в таком виде, чтобы оно годилось и для целых неположительных d , для чего следует воспользоваться тождеством $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$:

$$r_j = \prod_{k=1}^j \frac{d+k-1}{k}, \quad (23)$$

или, рекурсивно,

$$r_1 = d, \quad r_{j+1} = r_j \frac{d+j}{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Из формулы (24) нетрудно усмотреть следующее.

1. До тех пор, пока $j < -d$, величины r_j (и соответственно кратности q_j) меняют знак при переходе от j к $j+1$. Более того, q_1 всегда отрицательна (или равна нулю при $d = 0$). Начиная с $j = \lceil -d \rceil$ знаки кратностей будут постоянны (положительны или отрицательны, в зависимости от четности числа $\lceil -d \rceil$).
2. Если число d целое, то кратности равны нулю при $j \geq 1-d$, а при $j = 1, 2, \dots, -d$ задаются формулой

$$q_j = (-1)^j C_{-d}^j.$$

3. Если число d дробное, то все равно кратности равны нулю при достаточно больших j . Это ясно как из рекурсивной формулы (24), так и из соотношения $r_j \asymp j^{d-1}$, вытекающего из формулы Стирлинга – начиная с некоторого момента, все r_j меньше единицы, а значит, соответствующие кратности q_j будут нулевыми.¹

Итак, формула (22) (даже переписанная с учетом (23)) впрямую, по-видимому, непригодна для определения кратностей. Мы определим кратности следующим образом: выберем достаточно большое число j_1 и будем рассматривать только уровни энергии, не превышающие j_1 . Выражения для r_j промасштабируем, разделив их на r_{j_1} . Иными словами, положим

$$q_j = \left[\frac{r_j}{r_{j_1}} \right] \equiv \frac{\Gamma(j+d)\Gamma(j_1+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(j_1+d)}. \quad (25)$$

При тех j , для которых $j+d \leq 0$, знаки элементов определенной таким образом последовательности q_j чередуются (или, при целых d , эти элементы обращаются в бесконечность, попадая на соответствующие полюса Γ -функции). Поэтому естественно отбросить начальный отрезок последовательности и начать отсчет уровней энергии с некоторого

$$j = j_0 \geq 1 + [-d] \quad (26)$$

Тогда все кратности будут неотрицательны и конечны. Именно, мы рассматриваем уровни энергии $j = j_0, j_0+1, \dots, j_1$ с кратностями q_j , определенными формулой (25). Эти кратности убывают с возрастанием индекса j . Более точно, поскольку в соответствии с формулой Стирлинга $r_j \asymp j^{d-1}$, справедливо следующее утверждение:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Для кратностей q_j , $j = j_0, j_0+1, \dots, j_1$, справедливо (с постоянными, не зависящими от j, j_0, j_1) асимптотическое соотношение*

$$q_j \asymp \left(\frac{j}{j_1} \right)^{d-1}. \quad (27)$$

Подчеркнем, что как и в случае размерностей $d \in [1, 2)$, рассмотрение больших j_0 оказывается полезным, и требовать выполнения равенства в (26) было бы неразумно.

3.2. Определение рассматриваемой системы. Будем рассматривать только системы бозе-частиц (т.е., в обозначениях первой части [1] данной статьи, считаем, что все R_j равны бесконечности).

Будем всюду далее предполагать, что выполнено условие (16).

Для уровней энергии $j = j_0, j_0+1, \dots, j_1$ кратностей (25) рассматриваются всевозможные наборы неотрицательных чисел N_{jk} , $k = 1, \dots, q_j$, таких, что

$$N_{jk} \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}, \quad j = j_0, j_0+1, \dots, j_1, \quad k = 1, 2, \dots, q_j, \quad (28)$$

$$\sum_{j=j_0}^{j_1} j \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk} \leq M. \quad (29)$$

Все такие наборы считаем равновероятными.

¹Этот недостаток можно было бы искусственно исправить, определяя q_j как $[r_j]$ вместо $[r_j]$. Но ясно, что такое решение неадекватно, поскольку кратности верхних уровней будут равны единице независимо от размерности.

Как и в [1], введем дополнительные характеристики рассматриваемой системы. Определим число $b = b(M, j_0, j_1)$ как положительное решение уравнения

$$M = \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{j q_j}{e^{bj} - 1} \quad (30)$$

и положим

$$\bar{N}_j = \frac{q_j}{e^{bj} - 1}, \quad j = j_0, j_0 + 1, \dots, j_1, \quad (31)$$

где b – решение уравнения (30), и

$$N = \sum_{j=j_0}^{j_1} \bar{N}_j \equiv \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{q_j}{e^{bj} - 1}. \quad (32)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. 1. При фиксированных $j_0 < j_1$ уравнение (30) имеет единственное решение $b = b(M) > 0$ для любого $M > 0$. Функция $b(M)$ монотонно убывает и стремится к нулю при $M \rightarrow \infty$.

2. Будем считать для простоты, что

$$\begin{aligned} bj_1 &\geq C, & \text{если} & & 0 \leq d < 1, \\ \frac{j_1}{j_0} &\gg 1 & \text{при всех} & & d < 1. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь C – положительная постоянная. Тогда при $b \rightarrow 0$ справедливы асимптотические соотношения

$$N \asymp \left(\frac{j_1}{j_0}\right)^{1-d} b^{-1} \quad \text{при всех} \quad d < 1, \quad (34)$$

$$M \asymp j_1^{1-d} b^{-d-1} \quad \text{при} \quad 0 < d < 1, \quad (35)$$

$$M \asymp j_1 b^{-1} |\ln(bj_0)| \quad \text{при} \quad d = 0, \quad (36)$$

$$M \asymp \left(\frac{j_1}{j_0}\right)^{1-d} b^{-1} j_0 \quad \text{при} \quad d < 0. \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из лемм 20 и 21, приведенных в п. 7.

3.3. Теоремы о концентрации.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $d \neq 0$ и выполнено условие

$$j_0 \asymp b^{-1}. \quad (38)$$

Положим

$$\Delta N = \sqrt{N \ln N} \psi(N). \quad (39)$$

Существуют такие постоянные C_k , $k = 1, 2, \dots$, что для любого $l = j_0, \dots, j_1$ справедлива оценка

$$\mathbf{P} \left(\left| \sum_{j=l}^{j_1} (N_j - \bar{N}_j) \right| > \Delta N \right) \leq C_k N^{-k}. \quad (40)$$

Разумеется, условие (38) слишком ограничительно. Мы приведем сейчас более мягкие условия на выбор нижнего уровня j_0 , но, как и ранее, при этом придется поступиться точностью оценки больших уклонений, увеличив ширину полосы. Пусть $\gamma \in (0, 1)$ – заданное число. Введем следующее условие на j_0 , j_1 и b :

$$bj_0 \geq CN^{-\gamma}. \quad (41)$$

Хотя мы и записали это условие в довольно простом виде, следует учесть, что N само есть функция от b , j_0 и j_1 , так что мы приведем для наглядности два простых “крайних” случая этого условия:

- 1) $j_0 \geq b^{\gamma-1}$, тогда условие (41) выполнено при любом $j_1 > j_0$;
- 2) $j_1 \geq b^{(\gamma-1)/(\gamma(1-d))}$, тогда условие (41) выполнено при любом допустимом j_0 ; например, можно начать с $j_0 = 1 + \lfloor -d \rfloor$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть выполнены условия (33) и (41), а при $d = 0$ еще и условие

$$j_0 < Cb^{-s} \quad (42)$$

для некоторого $s < 1$. Положим

$$\Delta N = N^{(1+\gamma)/2+\varepsilon}, \quad (43)$$

где ε – достаточно малое положительное число. Тогда существуют такие постоянные C_k , $k = 1, 2, \dots$, что для любого $l = j_0, \dots, j_1$ справедлива оценка

$$P\left(\left|\sum_{j=l}^{j_1} (N_j - \bar{N}_j)\right| > \Delta N\right) \leq C_k N^{-k}. \quad (44)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10. В теоремах о концентрации, приведенных в данном и предыдущем параграфах, мы везде приводим степенную оценку для вероятностей больших уклонений. На самом деле в тех случаях, когда ΔN задается как степень числа N (без сомножителя-логарифма), эта степень всегда берется нами с некоторым произвольно малым запасом, и поэтому в действительности можно показать, что вероятность убывает экспоненциально, т.е. как $\exp(-KN^\varepsilon)$, где конкретные постоянные K , $\varepsilon > 0$ можно извлечь из доказательства наших теорем. Мы не будем здесь на этом более подробно останавливаться.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Так же как и в первой части [1] данной работы, вместо вероятностей уклонений от кумулятивных распределений можно было бы оценивать вероятности типа

$$P\left(\sum_{l=1}^s \left|\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} f_j^{(l)}(N_{jk} - \bar{N}_{jk})\right| > \Delta\right)$$

и доказывать утверждения типа слабой сходимости к предельному распределению. Сформулированные далее в данной работе технические леммы позволяют это сделать, а соответствующих теорем мы не формулируем здесь, чтобы не загромождать изложение, ибо никаких новых эффектов по сравнению с уже рассмотренными здесь и в первой части случаями в этих теоремах не возникает.

4. Бозе-конденсат

В этом параграфе мы рассмотрим явление Бозе-конденсата для частиц, подчиняющихся статистике Бозе. Для простоты будем считать, что система имеет размерность $d > 2$. Случай, когда размерность не удовлетворяет этому условию, может быть рассмотрен аналогичным образом.

Пусть задана система Бозе-частиц размерности $d > 2$ с уровнями энергии $\lambda_j = j$, $j = 1, 2, \dots$, кратностей $q_j = [\Gamma(j+d)/\Gamma(j+1)\Gamma(d)] \asymp j^{d-1}$. Рассмотрим всевозможные варианты наборов $\{N_{jk}\}$, $j = 1, 2, \dots$, $k = 1, \dots, q_j$, чисел заполнения таких, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} j N_{jk} \leq M. \quad (45)$$

По доказанной в первой части статьи теореме большинство вариантов концентрируется в интервале

$$N - \Delta \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk} \leq N + \Delta, \quad (46)$$

где

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{N \ln N} \psi(N), \quad (47)$$

$$N = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{N}_j, \quad \bar{N}_j = \frac{q_j}{e^{bj} - 1}, \quad (48)$$

а параметр b определяется из уравнения

$$\sum_{j=1}^{\infty} j \frac{q_j}{e^{bj} - 1} = M. \quad (49)$$

Именно, доля вариантов вне указанного интервала не превосходит $C_l N^{-l}$ для любого l .

Пусть теперь дополнительно к (45) мы задали ограничение на сумму чисел заполнения в виде

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk} = L, \quad (50)$$

где $L \gg N$ (и, естественно, $L \leq M$, ибо в противном случае множество рассматриваемых вариантов будет пусто). Оказывается, в этом случае образуется *конденсат*. Под этим мы понимаем следующее: для подавляющего большинства вариантов имеет место скопление “аномально” большого числа частиц на самом нижнем уровне энергии (в то время как числа частиц на остальных уровнях близки к бозевскому распределению).

Перейдем к точным формулировкам. Рассмотрим сначала случай, когда

$$(1 - \varepsilon)M \leq L \leq M, \quad (51)$$

где $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Поскольку

$$M \geq \sum_{j=1}^{\infty} jN_j = N_1 + \sum_{j=2}^{\infty} jN_j \geq N_1 + 2(L - N_1) = 2L - N_1 \geq 2(1 - \varepsilon)M - N_1,$$

мы заключаем, что в этом случае *во всех вариантах*

$$N_1 \geq (1 - 2\varepsilon)M, \quad (52)$$

так что конденсат действительно образуется. Поэтому начиная с этого момента мы предполагаем, что

$$N \ll L \leq (1 - \varepsilon)M \quad (53)$$

для некоторого произвольно малого, но фиксированного (не зависящего от M) $\varepsilon > 0$. Заметим, что если $L < M/2$, то могут существовать варианты, в которых на нижнем уровне нет вообще ни одной частицы. Так что, в отличие от “тривиального” случая (51), образование конденсата здесь – не детерминированное, а именно статистическое явление. Положим

$$L_j = \frac{q_j}{e^{\beta(j-1)} - 1}, \quad j = 2, 3, \dots, \quad (54)$$

где параметр β определяется из уравнения

$$\sum_{j=2}^{\infty} (j-1) \frac{q_j}{e^{\beta(j-1)} - 1} = M - L, \quad (55)$$

и

$$L_1 = L - \sum_{j=2}^{\infty} L_j. \quad (56)$$

Числа L_j , $j \geq 2$, задают бозевское распределение для частиц, распределенных по уровням, начиная со второго (но со сдвигом на -1 значения каждого уровня энергии) и с суммарной энергией, не превышающей $M - L$. Для такого распределения справедливы теоремы из первой части работы. В частности,

$$K = \sum_{j=2}^{\infty} L_j \quad (57)$$

есть просто соответствующее значение общего числа частиц, вблизи которого концентрируются большинство вариантов.

Справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *При выполнении условия (53) справедливы следующие утверждения:*

$$\beta \asymp b, \quad K \asymp N, \quad L_1 \asymp L.$$

Таким образом, число L_1 (о котором в следующей теореме будет доказано, что оно асимптотически представляет собой заселенность нижнего уровня) действительно оказывается весьма велико, т.е. образуется конденсат. Кроме того, в силу соотношения $K \asymp N$ качестве Δ можно взять величину (47), ибо

$$\sqrt{N \ln N} \psi(N) \asymp \sqrt{K \ln K} \psi(K).$$

Дальше в доказательстве теоремы мы этим воспользуемся.

ТЕОРЕМА 13. Пусть выполнено условие (53). Рассмотрим все наборы $\{N_{jk}\}$ неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих условиям (45) и (50), считая, что все они равновероятны. Тогда существуют такие постоянные C_l , что для любого s выполнены оценки

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{j=1}^s (N_j - L_j)\right| > \Delta\right) \leq C_l N^{-l}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{N}(\alpha)$ – число вариантов $\{N_{jk}\}$, $j = 2, 3, \dots, k = 1, \dots, q_j$, расположения частиц на уровнях энергии, начиная со второго, таких, что

$$\sum_{j=2}^{\infty} N_j = \alpha, \quad \sum_{j=2}^{\infty} (j-1)N_j \leq M - L. \quad (59)$$

(В частности, число частиц на уровнях, начиная со второго, равно α .) Тогда общее число $\mathcal{N}$ вариантов $\{N_{jk}\}$, $j = 1, 2, \dots, k = 1, \dots, q_j$, удовлетворяющих условиям теоремы, есть

$$\mathcal{N} = \sum_{\alpha=0}^L \mathcal{N}(\alpha) F(L - \alpha), \quad (60)$$

где $F(m)$ – число вариантов размещения m частиц на первом уровне энергии. Кратность q_1 этого уровня равна $[d]$, поэтому

$$F(m) = C_{[d]+m+1}^m \asymp m^{[d]-1}.$$

Рассмотрим теперь всевозможные наборы $\{N_{jk}\}$, $j = 1, 2, \dots, k = 1, \dots, q_j$, удовлетворяющие условию

$$\left|\sum_{j=1}^s (N_j - L_j)\right| > \Delta. \quad (61)$$

Пусть число таких наборов равно $\mathcal{N}_1$. Очевидно,

$$\left|\sum_{j=1}^s (N_j - L_j)\right| = \left|\sum_{j=s+1}^{\infty} (N_j - L_j)\right|, \quad (62)$$

поэтому из каждого такого набора отбрасыванием чисел N_{1k} , отвечающих первому уровню, получается набор $\{N_{jk}\}$, $j = 2, 3, \dots, k = 1, \dots, q_j$, чисел заполнения уровней, начиная со второго, удовлетворяющий условию

$$\left|\sum_{j=s+1}^{\infty} (N_j - L_j)\right| > \Delta \quad (63)$$

По теореме из первой части работы число $\mathcal{N}_2$ таких наборов удовлетворяет оценке

$$\mathcal{N}_2 \leq \tilde{C}_k N^{-k} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \mathcal{N}(\alpha) \leq 2\tilde{C}_k N^{-k} \sum_{\alpha=0}^L \mathcal{N}(\alpha) \quad (64)$$

(второе неравенство верно, поскольку $L \gg N$), так что с некоторыми положительными константами

$$\mathcal{N}_1 \leq \mathcal{N}_2 \max_{1 \leq m \leq L} F(m) \leq \tilde{C}_k N^{-k} \sum_{\alpha=0}^L \mathcal{N}(\alpha) C M^{[d]-1} \leq C_k N^{-k} \sum_{\alpha=0}^L \mathcal{N}(\alpha) \leq C_k N^{-k} \mathcal{N}. \quad (65)$$

Теорема доказана.

5. Предварительные оценки

В этом параграфе будут получены оценки сверху и снизу для общего числа $\mathcal{N}(M)$ различных наборов $\{N_{jk}\}$, $j \in J = \{j_0, \dots, j_1\}$, $k = 1, \dots, q_j$, неотрицательных целых чисел N_{jk} , удовлетворяющих неравенству

$$\sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk} \leq M, \quad (66)$$

а также оценка сверху для числа $\mathcal{N}(M, \Delta)$ вариантов, удовлетворяющих, помимо неравенства (66), еще и неравенству

$$\sum_{l=1}^s \left| \sum_{j=j_0}^{j_1} f_j^{(l)}(N_j - \bar{N}_j) \right| > \Delta, \quad (67)$$

где, напомним,

$$N_j = \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk}, \quad \bar{N}_j = \frac{q_j}{e^{bj} - 1}, \quad j = j_0, \dots, j_1,$$

а b определяется из уравнения (30). Эти оценки не зависят от конкретных формул для q_j (предполагается лишь, что при $j \rightarrow \infty$ числа q_j растут не быстрее некоторой степени числа j). В последующих пунктах, используя явные выражения для q_j и конкретные соотношения между b , j_0 , j_1 , мы получим из этих оценок для различных размерностей d асимптотические оценки вероятностей больших отклонений.

Доказательства оценок, приведенных в данном параграфе, в целом следуют доказательствам соответствующих оценок, полученных в первой части [1] данной работы с той разницей, что теперь суммирование производится в пределах от j_0 до j_1 . Поэтому мы их опускаем и ограничиваемся краткими указаниями.

5.1. Оценки для $\mathcal{N}(M)$. Как и в [1], воспользуемся тем фактом, что на множестве всех наборов $\{N_{jk}\}$, удовлетворяющих условию (66), при $b > 0$ справедливо неравенство

$$\exp \left\{ bM - b \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_{k=1}^{q_j} j N_{jk} \right\} \geq 1.$$

Отсюда, суммируя геометрические прогрессии, получаем, что

$$\mathcal{N}(M) \leq \exp \left\{ bM + \sum_{j=j_0}^{j_1} q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-bj}} \right\}, \quad (68)$$

где $b > 0$ произвольно.

Пусть теперь $\mathcal{N}_0(M)$ – число наборов $\{N_{jk}\}$, $j \in J = \{j_0, \dots, j_1\}$, $k = 1, \dots, q_j$, неотрицательных целых чисел N_{jk} , удовлетворяющих равенству

$$\sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk} \leq M. \quad (69)$$

Аналогично [1] получаем, что для $\mathcal{N}_0(M)$ справедлива интегральная формула

$$\mathcal{N}_0(M) = \frac{be^{bM}}{2\pi} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} e^{\Psi(\varphi)} d\varphi, \quad (70)$$

где

$$\Psi(\varphi) = ib\varphi M + \sum_{j=j_0}^{j_1} q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-bj(1+i\varphi)}}, \quad (71)$$

а b определяется из уравнения (30).

Заметим, что при указанном b показатель экспоненты в правой части неравенства (68) в точности совпадает с $\Psi(0)$.

Поскольку, очевидно, $\mathcal{N}(M) \geq \mathcal{N}_0(M)$, получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Для общего числа вариантов $\mathcal{N}(M)$ выполнены оценки

$$\frac{be^{bM}}{2\pi} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} e^{\Psi(\varphi)} d\varphi \leq \mathcal{N}(M) \leq e^{bM+\Psi(0)}, \quad (72)$$

где $\Psi(\varphi)$ задается формулой (71), а b определяется из уравнения

$$\sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{j q_j}{e^{bj} - 1} = M.$$

5.2. Оценка числа вариантов с большими отклонениями. Пусть заданы s вещественных числовых последовательностей $\{f_j^{(1)}\}, \dots, \{f_j^{(s)}\}$, $j = j_0, \dots, j_1$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{l=1}^s |f_j^{(l)}| \leq C_0 j^\alpha, \quad j = j_0, \dots, j_1, \quad (73)$$

с некоторыми постоянными $C_0 > 0$ и $\alpha \in [0, 1]$. Далее, пусть $\mathcal{N}(M, \Delta)$ – число вариантов, удовлетворяющих, неравенствам (66) и (67). Рассуждая, как в [1] при выводе формулы (102), получаем, что справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. Для числа $\mathcal{N}(M, \Delta)$ вариантов с большими отклонениями выполнена оценка

$$\mathcal{N}(M, \Delta) \leq e^{bM+\Psi(0)+s \ln 2 - c\Delta + Bc^2/2} \quad (74)$$

для любого c в интервале

$$0 \leq c \leq \frac{bj_0^{1-\alpha}}{2C_0}, \quad (75)$$

где функция Ψ задана формулой (71), а

$$B = \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{j^{2\alpha} q_j e^{bj/2}}{(e^{bj/2} - 1)^2}. \quad (76)$$

Минимизируя выражение (74) по s на интервале (75), получаем следующую оценку.

СЛЕДСТВИЕ 16. *Справедливо неравенство*

$$\mathcal{N}(M, \Delta) \leq \begin{cases} \exp\left\{bM + \Psi(0) + s \ln 2 - \frac{\Delta^2}{2B}\right\}, & \text{если } \Delta \leq \frac{bBj_0^{1-\alpha}}{2C_0}, \\ \exp\left\{bM + \Psi(0) + s \ln 2 - \frac{b\Delta}{4C_0}\right\}, & \text{если } \Delta > \frac{bBj_0^{1-\alpha}}{2C_0}. \end{cases} \quad (77)$$

Здесь B можно заменить на произвольное число $\tilde{B} > B$.

6. Доказательство основных результатов

6.1. Оценки снизу для $\mathcal{N}(M)$. В этом пункте мы вычислим левую часть оценки (72) из предложения 14 для различных значений размерности d . Заметим, что для $d \geq 1$ это уже было проделано в [1; предложение 14], где было показано, что в этом случае

$$\mathcal{N}(M) \geq Cb^{1+d/2}e^{bM+\Psi(0)}, \quad (78)$$

где $\Psi(\varphi)$ задается формулой (71).

Мы сейчас получим оценки, аналогичные (78), для остальных значений размерности d . Идея доказательств во всех случаях одна и та же – интеграл в левой части (72) вычисляется, как и в [1], по методу Лапласа. При этом, однако, оказывается, что конкретный выбор большого параметра зависит от размерности d .

Итак, мы должны оценить интеграл

$$\mathcal{N}_0(M) = \frac{be^{bM}}{2\pi} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} e^{\Psi(\varphi)} d\varphi, \quad (79)$$

где

$$\Psi(\varphi) = ib\varphi M + \sum_{j=j_0}^{j_1} q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-bj(1+i\varphi)}}.$$

Мы представим функцию $\Psi(\varphi)$ в виде

$$\Psi(\varphi) = \Lambda \Phi(\varphi), \quad (80)$$

где большой параметр Λ определен следующим образом:

$$\Lambda = \begin{cases} j_1^{1-d} b^{-d} & \text{при } d \in (0, 1), \\ j_1 |\ln(bj_0)| & \text{при } d = 0, \\ \left(\frac{j_1}{j_0}\right)^{1-d} j_0 & \text{при } d < 0. \end{cases} \quad (81)$$

ЛЕММА 17. *При каждом $d \in (-\infty, -1)$ задаваемая формулами (81), (80) фазовая функция $\Phi(\varphi)$ обладает следующими свойствами.*

1. Все производные функции $\Phi(\varphi)$ ограничены равномерно в рассматриваемой области значений параметров.

2. Фазовая функция $\Phi(\varphi)$ имеет невырожденную стационарную точку $\varphi = 0 \pmod{2\pi/b}$.
3. В точке $\varphi = 0$ мнимая часть функции $\Phi(\varphi)$ равна нулю, а ее вещественная часть достигает абсолютного максимума, причем для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех значениях параметров из рассматриваемой области

$$\operatorname{Re} \Phi(\varphi) < \operatorname{Re} \Phi(0) - \delta \quad \text{при} \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{b}, -\varepsilon\right) \cup \left(\varepsilon, \frac{\pi}{b}\right]. \quad (82)$$

4. Вторая производная $\Phi''(0)$ вещественна и удовлетворяет оценке

$$\Phi''(0) < -C < 0, \quad (83)$$

где постоянная C не зависит от значений параметров из рассматриваемой области.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Равномерная ограниченность производных. Функция Φ имеет вид

$$\Phi(\varphi) = i \frac{bM}{\Lambda} \varphi + \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{q_j}{\Lambda} \ln \frac{1}{1 - e^{-bj(1+i\varphi)}}.$$

Вычисления, проведенные в доказательстве предложения 14 из [1] (с заменой большого параметра b^{-d} на Λ) показывают, что первая производная функции $\Phi(\varphi)$ имеет вид

$$\Phi'(\varphi) = i \frac{bM}{\Lambda} - i \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{j b q'_j}{e^{bj(1+i\varphi)} - 1}, \quad (84)$$

где

$$q'_j = \frac{q_j}{\Lambda}, \quad (85)$$

а последующие производные, начиная со второй, задаются формулами

$$\Phi''(\varphi) = - \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{j^2 b^2 q'_j e^{bj(1+i\varphi)}}{(e^{bj(1+i\varphi)} - 1)^2}, \quad (86)$$

а при $s \geq 2$

$$\Phi^{(s)}(\varphi) = \sum_{2 \leq m \leq s} C_{sm} \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{j^s b^s q'_j e^{(m-1)bj(1+i\varphi)}}{(e^{bj(1+i\varphi)} - 1)^m}, \quad (87)$$

где C_{sm} – некоторые постоянные. Пользуясь неравенством [1; (68)]

$$\left| \frac{1}{e^{bj(1+i\varphi)} - 1} \right| \leq \frac{1}{e^{bj} - 1}, \quad (88)$$

получаем, что

$$|\Phi'(\varphi)| \leq \frac{bM}{\Lambda} + \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{bj q'_j}{e^{bj} - 1}, \quad (89)$$

$$|\Phi^{(s)}(\varphi)| \leq \sum_{2 \leq m \leq s} C_{sm} \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{b^s j^s q'_j e^{(m-1)bj}}{(e^{bj} - 1)^m}. \quad (90)$$

Рассмотрим теперь отдельно три варианта значений параметра d .

(а) $d \in (0, 1)$. В этом случае (предложение 7)

$$M \asymp j_1^{1-d} b^{-d-1},$$

так что

$$\frac{bM}{\Lambda} \asymp 1,$$

и первое слагаемое в правой части (89) равномерно ограничено. Далее,

$$q'_j \asymp \left(\frac{j}{j_1}\right)^{d-1} j_1 = j^{d-1} b^d,$$

так что

$$\sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{bjq'_j}{e^{bj} - 1} \asymp b^{d+1} \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{j^d}{e^{bj} - 1} \asymp 1$$

по лемме 20, и второе слагаемое также равномерно ограничено. Наконец, для каждого отдельного слагаемого в правой части (90) имеем

$$\sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{b^s j^s q'_j e^{(m-1)bj}}{(e^{bj} - 1)^m} \asymp b^{s+d} \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{j^{s+d-1} e^{(m-1)bj}}{(e^{bj} - 1)^m}.$$

Применим лемму 20. Здесь $l = s + d - 1 > s - 1 \geq m - 1$, поэтому сумма имеет порядок $b^{-l-1} = b^{-s-d}$, и после умножения на b^{s+d} снова получаем равномерно ограниченное выражение.

(б) $d = 0$. Ограниченность первого слагаемого опять вытекает из предложения 7 в сочетании с определением Λ . Далее,

$$q'_j \asymp \left(\frac{j}{j_1}\right)^{-1} j_1 |\ln bj_0| = j^{-1} |\ln bj_0|^{-1},$$

так что

$$\sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{bjq'_j}{e^{bj} - 1} \asymp b |\ln bj_0|^{-1} \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{1}{e^{bj} - 1} \asymp 1$$

по лемме 20, и второе слагаемое также равномерно ограничено. Наконец, для каждого отдельного слагаемого в правой части (90) имеем

$$\sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{b^s j^s q'_j e^{(m-1)bj}}{(e^{bj} - 1)^m} \asymp \frac{b^s}{|\ln bj_0|} \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{j^{s-1} e^{(m-1)bj}}{(e^{bj} - 1)^m}.$$

Применим лемму 20. Здесь $l = s - 1 \geq m - 1$, поэтому сумма имеет при $m = s$ порядок $b^{-s} |\ln bj_0|$, а при $m < s$ — порядок b^{-s} , и после умножения на $b^s / |\ln bj_0|$ в обоих случаях получаем равномерно ограниченное выражение.

(с) $d < 0$. Ограниченность первого слагаемого и здесь вытекает из предложения 7 в сочетании с определением Λ . Далее,

$$q'_j \asymp \left(\frac{j}{j_1}\right)^{d-1} \left(\frac{j_1}{j_0}\right)^{d-1} j_0^{-1} = \left(\frac{j}{j_0}\right)^{d-1} j_0^{-1},$$

так что

$$\sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{bjq'_j}{e^{bj} - 1} \asymp bj_0^{-d} \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{j^d}{e^{bj} - 1} \asymp 1$$

по леммам 20 и 21, и второе слагаемое также равномерно ограничено. Наконец, для каждого отдельного слагаемого в правой части (90) имеем

$$\sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{b^s j^s q'_j e^{(m-1)bj}}{(e^{bj} - 1)^m} \asymp b^s j_0^{-d} \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{j^{s+d-1} e^{(m-1)bj}}{(e^{bj} - 1)^m} \leq b^s j_0^{-d} \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{j^{s+d-1} e^{(m-1)bj}}{(e^{bj} - 1)^m}.$$

Применим лемму 20. Здесь $l = s + d - 1$. Возможны три случая. Если $l > m - 1$, то

$$b^s j_0^{-d} \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{j^{s+d-1} e^{(m-1)bj}}{(e^{bj} - 1)^m} \asymp b^s j_0^{-d} b^{-s-d} = (bj_0)^{-d} \leq \text{const},$$

поскольку произведение bj_0 ограничено. Если $l = m - 1$, т.е. $s + d = m$, то

$$b^s j_0^{-d} \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{j^{s+d-1} e^{(m-1)bj}}{(e^{bj} - 1)^m} \asymp b^s j_0^{-d} b^{-m} |\ln(bj_0)| = (bj_0)^{-d} |\ln(bj_0)| \leq \text{const}.$$

Наконец, если $l < m - 1$, то

$$b^s j_0^{-d} \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{j^{s+d-1} e^{(m-1)bj}}{(e^{bj} - 1)^m} \asymp b^s j_0^{-d} b^{-m} j_0^{s+d-m} = (bj_0)^{s-m} \leq \text{const},$$

поскольку $s - m \geq 0$. Итак, равномерная ограниченность производных функции $\Phi(\varphi)$ доказана.

2. *Невырожденная стационарная точка при $\varphi = 0$.* Тот факт, что фазовая функция имеет при $\varphi = 0$ стационарную точку, проверяется, как и в [1], прямой выкладкой. То, что эта точка невырождена, следует из п. 4 нашей леммы, который будет доказан ниже.

3. *Неравенства для мнимой части фазовой функции.* Прямое вычисление показывает, что

$$\text{Re } \Phi(0) - \text{Re } \Phi(\varphi) = \sum_{j=j_0}^{j_1} q'_j \Delta_j,$$

где

$$\Delta_j = \ln |1 - e^{-bj(1+i\varphi)}| - \ln(1 - e^{-bj}).$$

Далее, аналогично [1; (75)] показывается, что справедливо неравенство

$$\Delta_j \geq C(1 - \cos bj\varphi) \quad (91)$$

с некоторой постоянной C . Таким образом, все Δ_j неотрицательны, а это значит, что $\text{Re } \Phi(\varphi)$ действительно достигает абсолютного максимума при $\varphi = 0$. Рассуждения, аналогичные проведенным в [1] (которые мы опускаем) показывают, что для разности $\text{Re } \Phi(0) - \text{Re } \Phi(\varphi)$ требуемое неравенство выполнено.

4. Вторая производная фазовой функции. Справедливо соотношение

$$\Phi''(0) = - \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{j^2 b^2 q'_j e^{bj}}{(e^{bj} - 1)^2}. \quad (92)$$

Опять рассмотрим разные значения d по отдельности. При $d \in (0, 1)$ имеем

$$\sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{j^2 b^2 q'_j e^{bj}}{(e^{bj} - 1)^2} \asymp b^{2+d} \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{j^{d+1} e^{bj}}{(e^{bj} - 1)^2} \asymp b^{2+d} b^{-2-d} = 1$$

по лемме 20. При $d = 0$ имеем

$$\sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{j^2 b^2 q'_j e^{bj}}{(e^{bj} - 1)^2} \asymp \frac{b^2}{|\ln b j_0|} \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{j e^{bj}}{(e^{bj} - 1)^2} \asymp 1$$

по лемме 20. Наконец, при $d < 0$ справедливо соотношение

$$\sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{j^2 b^2 q'_j e^{bj}}{(e^{bj} - 1)^2} \asymp b^2 j_0^{-d} \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{j^{d+1} e^{bj}}{(e^{bj} - 1)^2} \asymp b^2 j_0^{-d} b^{-2} j_0^d = 1$$

все по той же лемме 20.

Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать оценку снизу для $\mathcal{N}(M)$.

ТЕОРЕМА 18. Для $\mathcal{N}(M)$ справедлива оценка

$$\mathcal{N}(M) \geq C \frac{b}{\sqrt{\Lambda}} e^{bM + \Psi(0)}, \quad (93)$$

где C – некоторая положительная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 17 позволяет провести для интеграла (79) те же рассуждения, что и в доказательстве соответствующей теоремы в [1], в результате чего получим оценку

$$\mathcal{N}(M) \geq e^{bM + \Psi(0)} \left(C_1 \frac{b}{\sqrt{\Lambda}} - C_2 e^{-\varepsilon \Lambda} \right), \quad (94)$$

где C_1 , C_2 и ε – некоторые положительные постоянные. (Второе слагаемое возникает при оценке интеграла по дополнению к окрестности стационарной точки. Оно не содержит множителя b , поскольку мера этой окрестности имеет порядок $1/b$, и упомянутый множитель сокращается.) Таким образом, чтобы доказать требуемую оценку, нам необходимо показать, что при рассматриваемых нами значениях параметров выполнено соотношение

$$e^{-\varepsilon \Lambda} \ll \frac{b}{\sqrt{\Lambda}}. \quad (95)$$

Для этого, в свою очередь (уменьшая ε) достаточно показать, что

$$e^{-\varepsilon \Lambda} \ll b, \quad (96)$$

или даже, что

$$b^\delta \Lambda \geq \text{const} \quad (97)$$

для некоторого положительного δ .

Разберем отдельно три случая.

1. $d \in (0, 1)$. В этом случае $\Lambda = j_1^{1-d} b^{-d}$, так что

$$b^d \Lambda = j_1^{1-d} \geq 1,$$

и (97) выполнено.

2. $d = 0$. В этом случае $\Lambda = j_1 |\ln(bj_0)|$, так что

$$e^{-\varepsilon \Lambda} = (bj_0)^{\varepsilon j_1} \ll b$$

в силу наложенного нами условия $j_0 \leq b^{-s}$, $s < 1$, т.е. условие (96) выполнено.

3. $d < 0$. В этом случае $\Lambda = (j_1/j_0)^{1-d} j_0$. В рассматриваемой в данной работе области значений параметров выполнено неравенство

$$bj_0 \geq CN^{-\gamma} \equiv \left(\frac{j_1}{j_0} \right)^{\gamma(d-1)} b^\gamma,$$

где $\gamma \in [0, 1)$ – заданное число. Поэтому

$$b^{1-\gamma} \Lambda = \left(\frac{j_1}{j_0} \right)^{1-d} b^{1-\gamma} j_0 \geq \left(\frac{j_1}{j_0} \right)^{(1-d)(1-\gamma)} \geq \text{const} > 0,$$

и условие (97) выполнено с $\delta = 1 - \gamma$.

6.2. Доказательство теорем о концентрации. Поскольку теперь в нашем распоряжении есть оценка (93), для доказательства оценок вероятностей больших отклонений достаточно воспользоваться предложением 15 и следствием из него, вычисляя асимптотику коэффициента B , задаваемого формулой (76) с помощью леммы 20 или 21, и затем подбирая подходящее s , минимизирующее правую часть оценки, т.е. фактически пользуясь формулой (77). Деление на оценку (93) дает тогда соответствующий результат. В следующих ниже доказательствах мы только выпишем соответствующие асимптотики для B и значения соответствующих выражений в оценках (77). Вместо ΔN всюду для краткости пишем просто Δ .

6.2.1. *Доказательство теоремы 1.* При $d = 2$ имеем

$$\begin{aligned} B &\asymp b^{-2} |\ln b|, \\ \Delta &= \sqrt{N} \ln N \psi(N) \asymp b^{-1} \ln b \psi(N), \\ \frac{\Delta}{B} &\asymp b \psi(N), \end{aligned}$$

так что нужно пользоваться второй оценкой из (77). Соответствующее выражение равно

$$b\Delta \asymp \ln N \psi(N),$$

что и требовалось.

При $1 < d < 2$ выполнено

$$B \simeq b^{-2}, \quad N \simeq b^{-d},$$

$$\frac{\Delta}{B} \asymp b^{1-d\varepsilon},$$

так что опять нужно пользоваться второй оценкой из (77). Соответствующее выражение равно

$$b\Delta \asymp b^{-d\varepsilon}.$$

Доказательство теоремы 2 проводится аналогичным образом.

6.2.2. Доказательство теоремы 4. При сделанных в этой теореме предположениях

$$B \simeq b^{-2} j_0^{d-2}, \quad N \simeq b^{-d},$$

$$\frac{\Delta}{B} \asymp j_0^{2-d} b^{2-d\alpha}.$$

Если теперь считать, что $j_0 \asymp b^{-\gamma}$, то

$$\frac{\Delta}{B} \asymp b^{(d-2)\gamma+2-d\alpha},$$

$$\frac{\Delta^2}{B} \asymp b^{(d-2)\gamma+2-2d\alpha},$$

причем при выбранном значении

$$\alpha = \frac{1}{d} - \frac{2-d}{2d} \gamma + \varepsilon$$

будем иметь

$$(d-2)\gamma + 2 - d\alpha > 1 - \gamma,$$

$$(d-2)\gamma + 2 - 2d\alpha < 0,$$

что обеспечивает применимость второй оценки в 77.

6.2.3. Доказательство теорем 8 и 9. При $d < 1$ выполнены соотношения

$$N \simeq \left(\frac{j_1}{j_0} \right)^{1-d} b^{-2},$$

$$B \simeq \left(\frac{j_1}{j_0} \right)^{1-d} b^{-2} j_0^{-1} \simeq N(bj_0)^{-1}.$$

Если взять

$$\Delta = N^\alpha,$$

то, обозначая $j_1/j_0 > 1$ через λ , получим

$$\frac{\Delta}{B} = \lambda^{(1-d)(\alpha-1)} b^{2-\alpha} j_0 \ll bj_0,$$

$$\frac{\Delta^2}{B} = \lambda^{(1-d)(2\alpha-1)} b^{2-2\alpha} j_0.$$

Положим

$$\gamma = 2\alpha - 1 \in (0, 1).$$

Тогда по предположению теоремы 9 выполнено условие

$$bj_0 \geq N^{-\gamma},$$

и несложная выкладка показывает, что можно применить первую оценку в (77), причем

$$\frac{\Delta^2}{B} \geq CN^\varepsilon.$$

Это доказывает теорему 9.

При $\alpha = 1/2$ можно взять

$$\Delta = \sqrt{N \ln N} \psi(N);$$

если при этом $bj_0 \geq C > 0$, то можно применить первую оценку в (77), причем

$$\frac{\Delta^2}{B} \geq \ln N \psi(N).$$

Это доказывает теорему 8.

7. Некоторые вспомогательные оценки

В этом пункте дается обобщение леммы 23 из [1].

Пусть l – фиксированное вещественное число, а k, m – фиксированные целые числа такие, что

$$0 \leq k < m. \quad (98)$$

Далее, пусть $b > 0$ – вещественный параметр, который будет считаться малым ($b \rightarrow 0$), а $j_0 \in \mathbb{N}$, $j_1 \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ – целочисленные параметры, причем $j_1 > j_0$ и j_1 может принимать значение $+\infty$.

Рассмотрим сумму

$$\Sigma \equiv \Sigma(b, j_0, j_1) = \sum_{j=j_0}^{j_1} \frac{j^l e^{kbj}}{(e^{bj} - 1)^m}. \quad (99)$$

Следующие ниже леммы дают оценки этой суммы при различных соотношениях между параметрами. Лемма 19 относится к случаю, когда $bj_0 > C$ для некоторой постоянной $C > 0$, а леммы 20 и 21 – к случаю, когда $bj_0 < C$ для некоторой постоянной $C > 0$.

ЛЕММА 19. Если $bj_0 > C$, где $C > 0$ – заданная постоянная, то

$$\Sigma \asymp \begin{cases} b^{-l}(j_1 - j_0)e^{-(m-k)bj_0}, & \text{если } j_1 - j_0 < b^{-1}, \\ b^{-l-1}e^{-(m-k)bj_0}, & \text{если } j_1 - j_0 > b^{-1}. \end{cases}$$

ЛЕММА 20. Если $b j_0 < C$, а $b j_1 > C_1$, где $C_1 > C > 0$ – заданные постоянные, то

$$\Sigma \asymp \begin{cases} b^{-l-1}, & \text{если } l > m-1, \\ b^{-m} |\ln b j_0|, & \text{если } l = m-1, \\ b^{-m} j_0^{l-m+1}, & \text{если } l < m-1. \end{cases}$$

ЛЕММА 21. Если $b j_0, b j_1 < C$, где $C > 0$ – заданная постоянная, то

$$\Sigma \asymp \begin{cases} b^{-m} |j_1^{l-m+1} - j_0^{l-m+1}| \equiv b^{-l-1} |(b j_1)^{l-m+1} - (b j_0)^{l-m+1}|, & \text{если } l \neq m-1, \\ b^{-m} \left| \ln \left(\frac{j_1}{j_0} \right) \right| \equiv b^{-m} |\ln(b j_0) - \ln(b j_1)|, & \text{если } l = m-1. \end{cases}$$

При этом если $l < m-1$ и $j_1/j_0 > 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – постоянная, то оценка принимает вид

$$\Sigma \asymp b^{-m} j_0^{l-m+1}.$$

Напомним, что запись $A \asymp B$ означает, что частное A/B ограничено сверху и снизу положительными постоянными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО лемм 19–21 проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 23 в [1], так что мы опустим его (единственным новым моментом является введение пределов суммирования j_0 и j_1 вместо 1 и ∞ , но на рассуждениях это фактически почти не отражается). Отметим лишь, что ключевым приемом, используемым в доказательстве, является замена интегральных сумм ($\sum$) на соответствующие интегралы ($\int$). Хотя условия применимости формулы Эйлера–Маклорена могут здесь (как и в доказательстве вышеупомянутой леммы из [1]) и не выполняться, так что погрешность $|\sum - \int|$ при такой замене будет, вообще говоря, не мала, тем не менее оказывается, что для рассматриваемых здесь сумм всегда справедливо соотношение $\sum \asymp \int$, которое только и требуется для доказательства лемм 19–21.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, “О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним линейным неравенством. I”, *Матем. заметки*, **83**:2 (2008), 232–263.

В. П. Маслов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Поступило

07.02.2008

В. Е. Назайкинский

Институт проблем механики РАН
E-mail: nazaikinskii@yandex.ru