Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Павликов, Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 3, 417–427

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4527>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:28:24

Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа

С. В. Павликов

Представлено развитие метода функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости неавтономных функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа с конечным запаздыванием. Оно основано на построении предельных уравнений и предельных функционалов.

Библиография: 10 названий.

1. Основные определения и предположения, вспомогательные теоремы. Целью настоящей работы является развитие метода предельных уравнений и предельных функционалов Ляпунова [1]–[6] и исследование устойчивости и асимптотической устойчивости неавтономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа [7], [8].

Рассмотрим неавтономное функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа (НФДУ)

$$\frac{d}{dt}[x(t) - G(t, x_t)] = F(t, x_t), \quad (1)$$

где $F, G: \mathbb{R}^+ \times C_H \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывные отображения, $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ – действительная ось, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, $\mathbb{R}^n$ – действительное евклидово пространство n -векторов x с нормой $|x|$, $h \geq 0$ – некоторое действительное число, $C_{[\alpha, \beta]}$ – банахово пространство непрерывных функций $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|\varphi\| = \sup(|\varphi(s)|, \alpha \leq s \leq \beta)$, $C_H = \{\varphi \in C_{[-h, 0]} : \|\varphi\| < H\}$, $\overline{C}_r = \{\varphi \in C_H : \|\varphi\| \leq r\}$, для непрерывной функции $x:]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ и каждого $t \in \mathbb{R}$ функция $x_t \in C_{[-h, 0]}$ определяется равенством $x_t(s) = x(t+s)$ для $-h \leq s \leq 0$.

Предположим, что функции F и G удовлетворяют условиям Липшица вида

$$|F(t, \varphi) - F(t, \psi)| \leq L\|\varphi - \psi\|, \quad (2)$$

где $(t, \varphi), (t, \psi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H$, L – константа;

$$|G(t_2, \varphi_2) - G(t_1, \varphi_1)| \leq N|t_2 - t_1| + \lambda\|\varphi_2 - \varphi_1\|, \quad (3)$$

где $(t_i, \varphi_i) \in \mathbb{R}^+ \times C_H$, $i = 1, 2$, N, λ – константы, $0 < \lambda < 1$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00765) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-2000.2003.1).

Тогда для каждой точки $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H$ существует единственное решение $x = x(t, \alpha, \varphi)$, начинающееся в точке $x_\alpha = x_\alpha(\alpha, \varphi) = \varphi$, определенное при $t \in [\alpha - h, \alpha + A)$, $A = A(\alpha, \varphi) > 0$, и непрерывно зависящее от (α, φ) [1].

Допустим, что функции F и G удовлетворяют следующим предположениям.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Функция $F(t, \varphi)$ удовлетворяет условию: для каждого числа τ , $0 < \tau < H$, существует число $M(\tau)$ такое, что $|F(t, \varphi)| < M$, где $t \in [0, +\infty)$, $\varphi(s) \in C_\tau$.

ЛЕММА 1 [1]. Если $x = x(t, \alpha, \varphi)$ есть решение (1), определенное для любого $t \geq \alpha - h$ и такое, что $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq r < H$ для любого $t \in [\alpha - h, +\infty)$, тогда семейство функций $\{x_t(\alpha, \varphi) : t \geq \alpha\}$ предкомпактно в $\overline{C}_\tau$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Функция $F(t, \varphi)$ равномерно непрерывна, а функция $G(t, \varphi)$ ограничена на каждом множестве $\mathbb{R}^+ \times K$, где $K \subset C_H$ – произвольное компактное множество из C_H , так что $\forall K \subset C_H, \forall \varepsilon > 0 \exists m(K)$ и $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ такие, что $\forall (t, \varphi), (t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2) \in \mathbb{R}^+ \times K, |t_2 - t_1| \leq \delta, \|\varphi_2 - \varphi_1\| \leq \delta$ имеют место соотношения

$$|F(t_2, \varphi_2) - F(t_1, \varphi_1)| < \varepsilon, \quad |G(t, \varphi)| \leq m.$$

ЛЕММА 2 [1]. В условиях предположений 1, 2 при выполнении условия (3) семейства сдвигов

$$\{F^\tau(t, \varphi) = F(t + \tau, \varphi), \tau \in \mathbb{R}^+\} \quad \text{и} \quad \{G^\tau(t, \varphi) = G(t + \tau, \varphi), \tau \in \mathbb{R}^+\}$$

равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на $\mathbb{R}^+ \times K$, где K – произвольный компакт из C_H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1]. Компактной оболочкой $H^+(F, G)$ функций $F(t, \varphi)$ и $G(t, \varphi)$, определенных на $\mathbb{R}^+ \times C_H$ и удовлетворяющих выше сделанным предположениям, называется множество совокупностей (F^*, G^*, Λ) , где $F^*, G^* \in C(\Lambda, \mathbb{R}^n)$, $\Lambda = \mathbb{R}^+ \times \Lambda_1$, $\Lambda_1 \subset C_H$, таких, что существует последовательность $t_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$, для которой $\{F(t + t_n, \varphi)\}$ равномерно сходится к $F^*(t, \varphi)$, а $\{G(t + t_n, \varphi)\}$ равномерно сходится к $G^*(t, \varphi)$ на каждом множестве $[0, L] \times K$, где $L = 1, 2, \dots$, множество K – компакт из Λ_1 .

Функции F^* и $G^*: \mathbb{R}^+ \times \Lambda_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ называются предельными к функциям F и G .

Для каждой $(F^*, G^*, \Lambda) \in H^+(F, G)$ определим предельное уравнение

$$\frac{d}{dt}[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t). \quad (4)$$

Из предположений 1, 2 и условий (2), (3) следует, что решение $x(t, \alpha, \varphi)$ уравнения (4) для каждого начального условия $(\alpha, \varphi) \in \Lambda$ непрерывно зависит от начальных данных и является единственным. Областью определения уравнения (4) по построению можно принять область $\mathbb{R} \times \Lambda_1$, где $\Lambda_1 \subset C_H$.

Допустим, что $G(t, 0) \equiv 0$ и $F(t, 0) \equiv 0$. Тогда уравнение (1) имеет нулевое решение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [9]. Пусть $x = x(t, \alpha, \varphi)$ есть решение уравнения (1), определенное для всех $t \geq \alpha - h$, $x_t^{(n)}(\alpha, \varphi) = x(t_n + s, \alpha, \varphi)$, $-h \leq s \leq 0$. Положительное предельное множество $\Omega^+(\alpha, \varphi)$ в пространстве C_H есть множество

$$\Omega^+ = \{\varphi^* \in C_H : \exists t_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty, x_t^{(n)}(\alpha, \varphi) \rightarrow \varphi^* \text{ при } n \rightarrow \infty\}.$$

ЛЕММА 3 [9]. Пусть решение уравнения (1) $x = x(t, \alpha, \varphi)$ ограничено:

$$|x(t, \alpha, \varphi)| \leq H_1 < H \quad \text{для всех } t \geq \alpha - h.$$

Тогда множество $\Omega^+(\alpha, \varphi)$ связно, компактно и для каждой точки $\varphi^* \in \Omega^+(\alpha, \varphi)$ существует непрерывное отображение $u: \mathbb{R} \rightarrow \overline{C}_{H_1}$ такое, что $u(0) = \varphi^*$, и что $\{u(t), t \in \mathbb{R}\} \subset \Omega^+(\alpha, \varphi)$. При этом, если $\varphi^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{t_n}(\alpha, \varphi)$, то для каждого числа $\gamma > 0$ найдется последовательность $n_k \rightarrow \infty$ такая, что последовательность функций $x_{t_{n_k}+t}(\alpha, \varphi)$ сходится к $u(t)$ равномерно по $t \in [-\gamma, \gamma]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [9]. Множество $\Omega^+(\alpha, \varphi)$ имеет свойство равностепенной непрерывности, если каждое отображение $u(t)$ из леммы 3 равномерно непрерывно по $t \in \mathbb{R}$ с оценкой непрерывности, не зависящей от последовательности $t_n \rightarrow +\infty$, ее определяющей, и одинаковой для всех решений уравнения (1), ограниченных значением H_1 .

Следующие условия, как показано в [9], устанавливают достаточные условия равностепенной непрерывности $\Omega^+(\alpha, \varphi)$.

ТЕОРЕМА 1 [9]. Предположим, что выполняется одно из следующих условий:

- 1) функция $G(t, \varphi) = G(t, \varphi(-h))$;
- 2) функция $G(t, \varphi)$ не зависит от значений $\varphi(s)$ при $s \in [-h_0, 0]$, $0 < h_0 < h$, при этом значение λ из (3) таково, что $\lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n_0} < 1$, где n_0 – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $n_0 h_0 \geq h$;
- 3) функция $G(\varphi)$ является линейной, и корни характеристического уравнения $Z(\varphi_0(s)) = \varphi(0) - G(\varphi_0(s)) = 0$, $\varphi_0(s) = e^{\lambda s}$, $-h \leq s < 0$, удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda \leq -\delta < 0$.

Тогда множество $\Omega^+(\alpha, \varphi)$ имеет свойство равностепенной непрерывности.

Далее будем предполагать, что множество $\Omega^+(\alpha, \varphi)$ имеет свойство равностепенной непрерывности.

Используя теорему 1, докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $H^+(F, G)$ – компактная оболочка функций $F(t, \varphi)$ и $G(t, \varphi)$, определяемая последовательностью $\{t_n\}$, $t_n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$. Пусть $\{\varphi_n \in C_H\}$ есть некоторая последовательность функций, $\{\alpha_n\}$ есть некоторая числовая последовательность. Если $x^n = x(t, \alpha_n, \varphi_n)$ есть решения уравнения (1) такие, что $|x(t, \alpha_n, \varphi_n)| \leq r < H$, $t \geq \alpha_n$, то существует подпоследовательность $\{t_{n_m}\}$ последовательности $\{t_n\}$ такая, что функции $x_{\alpha_{n_m}+t_{n_m}}(\alpha_{n_m}, \varphi_{n_m})$ сходятся к некоторой функции φ , и $x(t+t_{n_m}+\alpha_{n_m}, \alpha_{n_m}, \varphi_{n_m})$ сходятся к решению $x^*(t, 0, \varphi)$ предельного уравнения

$$\frac{d}{dt}[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)$$

равномерно по $t \in [-h, \gamma]$ для каждого $\gamma > -h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий теоремы следует, что последовательность функций $x_{t+t_n+\alpha_n}(\alpha_n, \varphi_n)$, $t \in [0, T]$, $T > 0$, принадлежит $\overline{C}_r$. Из свойства равностепенной непрерывности множества $\Omega^+(\alpha, \varphi)$ следует, что это семейство предкомпактно в C_H и семейство функций $x_{t+t_n+\alpha_n}(\alpha_n, \varphi_n)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $t \geq 0$, принадлежит некоторому компактному $K \subset C_H$. Значит, существует подпоследовательность $\{t_{n_m}\}$ последовательности $\{t_n\}$ такая, что функции $x_{t_{n_m}+\alpha_{n_m}}(\alpha_{n_m}, \varphi_{n_m})$ сходятся к некоторой функции φ .

Зафиксируем $L > 0$. Рассмотрим $x^n = x(t + t_n + \alpha_n, \alpha_n, \varphi_n)$ при $t \in [0, L]$. По теореме Арцела [10] существуют подпоследовательность (без ограничения общности предположим, что она совпадает с $\{t_{n_m}\}$) $t_{n_m} \rightarrow +\infty$ и функция $x^*(t): [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что $\{x^{n_m} = x(t + t_{n_m} + \alpha_{n_m}, \alpha_{n_m}, \varphi_{n_m})\}$ сходится к $x^*(t)$ для $t \in [0, L]$.

Из (1) следует, что

$$\begin{aligned} x(t + t_{n_m} + \alpha_{n_m}, \alpha_{n_m}, \varphi_{n_m}) &= x(t_{n_m} + \alpha_{n_m}, \alpha_{n_m}, \varphi_{n_m}) - G(t_{n_m} + \alpha_{n_m}, x_{t_{n_m} + \alpha_{n_m}}^{n_m}) \\ &\quad + G(t + t_{n_m} + \alpha_{n_m}, x_{t + t_{n_m} + \alpha_{n_m}}^{n_m}) \\ &\quad + \int_0^t F(s + t_{n_m} + \alpha_{n_m}, x_{s + t_{n_m} + \alpha_{n_m}}^{n_m}) ds. \end{aligned} \quad (5)$$

В силу того, что $H^+(F, G)$ есть компактная оболочка функций $F(t, \varphi)$ и $G(t, \varphi)$, определяемая последовательностью $\{t_n\}$, $t_n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$, а семейство функций $x_{t+t_n+\alpha_n}(\alpha_n, \varphi_n)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $t \geq 0$, принадлежит компакту $K \subset C_H$, используя диагональный процесс, получаем, что существует подпоследовательность (без ограничения общности предположим, что она совпадает с $\{t_{n_m}\}$) $\{t_{n_m}\}$ и функции $F^*(t, \varphi), G^*(t, \varphi): \mathbb{R}^+ \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F^*, G^* \in H^+(F, G)$, такие, что $F(t + t_{n_m} + \alpha_{n_m}, \varphi)$ сходится к $F^*(t, \varphi)$, $G(t + t_{n_m} + \alpha_{n_m}, \varphi)$ сходится к $G^*(t, \varphi)$ равномерно на каждом компакте из $\mathbb{R}^+ \times K$. Следовательно,

$$\begin{aligned} G(t + t_{n_m} + \alpha_{n_m}, x_{t + t_{n_m} + \alpha_{n_m}}^{n_m}) &\rightarrow G^*(t, x_t^*), \\ F(t + t_{n_m} + \alpha_{n_m}, x_{t + t_{n_m} + \alpha_{n_m}}^{n_m}) &\rightarrow F^*(t, x_t^*) \end{aligned}$$

равномерно при $0 \leq t \leq L$; $G(t_{n_m} + \alpha_{n_m}, x_{t_{n_m} + \alpha_{n_m}}^{n_m}) \rightarrow G^*(0, \varphi)$. Устремляя в (5) $m \rightarrow \infty$, получаем, что функция $x^*(t) = x^*(t, 0, \varphi)$ есть решение уравнения

$$\frac{d}{dt}[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)$$

на отрезке $[-h, L]$. Последовательно полагаем $L = 1, 2, \dots$ и, используя диагональный процесс, получаем, что решение $x^*(t, 0, \varphi)$ уравнения (4) определено для всех $t \geq -h$. Теорема доказана.

2. Теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости. Рассмотрим задачу об устойчивости нулевого решения уравнения (1). Обычно, при исследовании устойчивости НФДУ требуют знакоопределенность функционала Ляпунова по ядру [7], [8]. Покажем, что используя предельные уравнения, можно ослабить это условие.

Пусть $V(t, x_t, Z(t, x_t)): \mathbb{R}^+ \times C_H \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторый функционал, определенный и непрерывный по совокупности аргументов для всех $x_t \in C_H$ и $t \in \mathbb{R}^+$ и такой, что его производная dV/dt в силу системы (1) существует. Под dV/dt понимается верхняя правосторонняя производная функционала $V = V(t, x_t, Z(t, x_t))$ вдоль решения $x = x(t, \alpha, \varphi)$ в точке (t_1, x_{t_1}) :

$$\dot{V}(t_1, x_{t_1}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{h} (V(t_1 + h, x_{t_1+h}, Z(t_1 + h, x_{t_1+h})) - V(t_1, x_{t_1}, Z(t_1, x_{t_1}))).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для непрерывного функционала $V(t, \varphi, Z(t, \varphi))$ и некоторого числа $c \in \mathbb{R}$ определим

$$V^{-1}(\infty, c) = \{\varphi \in C_H : \exists \varphi_n \in C_H, t_n \rightarrow +\infty \quad \varphi_n \rightarrow \varphi, V(t_n, \varphi_n, Z(t_n, \varphi_n)) \rightarrow c\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Решение $x = 0$ называется *точкой равномерного притяжения* решений всего семейства предельных уравнений $\{d/dt[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)\}$ (соответствующих компактным оболочкам $H^+(F^*, G^*, \Lambda)$) относительно множества $\Lambda_0 \subset C_H$, если существует $\Delta > 0$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $T = T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения $x^*(t, \alpha, \varphi)$, $\alpha \geq 0$, $\varphi \in \Lambda_0 \cap \{\|\varphi\| < \Delta\}$, любого уравнения $\{d/dt[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)\}$ для всех $t \geq \alpha + T$ выполняется неравенство $\|x_t^*(\alpha, \varphi)\| < \varepsilon$.

Докажем следующую теорему о равномерной устойчивости с использованием знакопостоянного по ядру функционала Ляпунова.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что*

1) *существует непрерывный функционал $V(t, x_t, Z(t, x_t))$ такой, что*

$$0 \leq V(t, x_t, Z(t, x_t)) \leq \omega_2(\|x_t\|), \quad V(t, 0, Z(t, 0)) \equiv 0,$$

$$\dot{V}(t, \varphi, Z(t, \varphi)) \leq 0 \quad \forall (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H;$$

2) *решение $x = 0$ есть точка равномерного притяжения решений семейства $\{d/dt[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)\}$ относительно $V^{-1}(\infty, 0)$.*

Тогда тривиальное решение (1) равномерно устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что положение равновесия $x = 0$ уравнения (1) не является равномерно устойчивым. Тогда при некотором ε_0 , $0 < \varepsilon_0 < H$, найдутся последовательности $\{\alpha_n \geq 0\}$, $\{\varphi_n : \|\varphi_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$ и $\{T_n\}$ такие, что для решений (1) $x^n(t) = x(t, \alpha_n, \varphi_n)$ верно

$$\|x_{\alpha_n + T_n}^n(\alpha_n, \varphi_n)\| = \varepsilon_0. \quad (6)$$

Из единственности решения $x = 0$ следует, что $\alpha_n + T_n \rightarrow +\infty$.

Покажем, что последовательность $T_n \rightarrow +\infty$. Пусть это не так и $T_n \leq T_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$; тогда возможны случаи:

1) $\{\alpha_n\}$ ограничена, $\alpha_n \leq \alpha_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

2) $\alpha_n \rightarrow +\infty$.

В первом случае можно считать, что $T_n \rightarrow T_0$ и $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$ при $n \rightarrow \infty$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ и учитывая (6), получаем равенство

$$\|x_{\alpha_0 + T_0}(\alpha_0, 0)\| = \varepsilon_0 > 0,$$

что невозможно в силу единственности решения $x = 0$ уравнения (1).

Рассмотрим второй случай. Считаем, что $T_n \rightarrow T_0$. Можно считать, что семейство функций $\{x_{\alpha_n + t}^n\}$, $t \in [0, T_0]$, принадлежит компакту $K \subset C_H$. Тогда можно определить подпоследовательность $n_k \rightarrow +\infty$, для которой последовательности $G(t + \alpha_{n_k}, \varphi) \rightarrow G^*(t, \varphi)$, $F(t + \alpha_{n_k}, \varphi) \rightarrow F^*(t, \varphi)$, $t \in [0, T_0]$, $\varphi \in K$. По теореме 2 получаем, что $x^n(t + \alpha_n, \alpha_n, \varphi_n)$ будет сходиться к решению $x^*(t, 0, 0) \equiv 0$ уравнения $d/dt[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)$ равномерно по $t \in [0, T_0]$. Из (6) для этого решения получаем равенство

$$\|x_{T_0}^*(0, 0)\| = \varepsilon_0 > 0,$$

что противоречит единственности решения $x = 0$ уравнения $d/dt[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)$.

Таким образом, последовательность $T_n \rightarrow +\infty$.

Пусть $\Delta > 0$ есть число, определяемое из условия 2) теоремы. Полагаем $\delta_0 = \min(\varepsilon_0, \Delta)/2$. Тогда для решений $x^n(t) = x(t, \alpha_n, \varphi_n)$ найдется последовательность $t_n(\delta_0) \leq T_n$ такая, что

$$\|x_{t_n(\delta_0)+\alpha_n}(\alpha_n, \varphi_n)\| = \delta_0, \quad \|x_t(\alpha_n, \varphi_n)\| < \delta_0, \quad t \in [\alpha_n, \alpha_n + t_n(\delta_0)). \quad (7)$$

Очевидно, что $t_n(\delta_0) \rightarrow \infty$.

Положим $\delta_1 = \delta_0/2$. Пусть $T = T(\delta_1)$ есть число, определяемое из условия 2) теоремы согласно определению 5. Положим $t_n^{\delta_1} = \alpha_n + t_n(\delta_0) - T$.

Из (7) следует, что

$$\|x_{t_n^{\delta_1}+T}^{\delta_1}(t_n^{\delta_1}, x_{t_n^{\delta_1}}^{\delta_1}(\alpha_n, \varphi_n))\| = \delta_0, \quad \|x_{t_n^{\delta_1}}^{\delta_1}(t_n^{\delta_1}, x_{t_n^{\delta_1}}^{\delta_1}(\alpha_n, \varphi_n))\| < \delta_0. \quad (8)$$

В силу условия $V(t, \varphi, Z(t, \varphi)) \leq \omega(\|\varphi\|)$ получаем, что существуют числа $\Delta_n \rightarrow 0$ такие, что $V(\alpha_n, \varphi_n, Z(\alpha_n, \varphi_n)) \leq \omega(\|\varphi_n\|) \leq \Delta_n$. В силу $\dot{V}(t, \varphi, Z(\alpha, \varphi)) \leq 0$ получаем, что

$$V(t, x_t^n(\alpha_n, \varphi_n), Z(t, x_t^n(\alpha_n, \varphi_n))) \leq \Delta_n, \quad t > \alpha_n. \quad (9)$$

Семейство функций $\{x_{t_n}^n(\alpha_n, \varphi_n)\}$ принадлежит C_{δ_0} . По теореме 2 это семейство предкомпактно в C_H . Значит, существует подпоследовательность (без ограничения общности примем, что она совпадает с $t_n^{\delta_1}$) и функция $\varphi(\delta_1)$ такие, что $x_{t_n^{\delta_1}}^n \rightarrow \varphi(\delta_1)$, где $\|\varphi(\delta_1)\| \leq \delta_1$.

В силу (9) и условия для производной V имеем

$$V(t_n^{\delta_1}, x_{t_n^{\delta_1}}^n(\alpha_n, \varphi_n), Z(t_n^{\delta_1}, x_{t_n^{\delta_1}}^n(\alpha_n, \varphi_n))) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ и, значит, $\varphi(\delta_1) \in V^{-1}(\infty, 0)$.

Кроме того, существует подпоследовательность (без ограничения общности примем, что она совпадает с $t_n^{\delta_1}$) такая, что $G(t + t_n^{\delta_1}, \varphi) \rightarrow G^*(t, \varphi)$, $F(t + t_n^{\delta_1}, \varphi) \rightarrow F^*(t, \varphi)$. По теореме 2 получаем, что $x^n(t + t_n^{\delta_1}, \alpha_n, \varphi_n) \rightarrow x^*(t, 0, \varphi(\delta_1))$, $t \in [-h, \gamma]$, для каждого $\gamma \geq 0$, где $x^*(t, 0, \varphi(\delta_1))$ есть решение уравнения $d/dt[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)$.

По определению числа T имеем, что $|x^*(t, 0, \varphi(\delta_1))| \leq \delta_1$ для каждого $t \geq T$. Из соотношения (8) предельным переходом получаем, что $\|x_T^*(0, \varphi(\delta_1))\| = \delta_0 = 2\delta_1$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Условие 2) теоремы 3 можно видоизменить. Для этого введем следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Решение $x = 0$ устойчиво относительно множества $\Lambda_0 \subset C_H$ равномерно по $\{d/dt[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon, \alpha) > 0$ такое, что из $\varphi \in \Lambda_0 \cap \{\|\varphi\| < \delta\}$ следует $\|x_t^*(\alpha, \varphi)\| < \varepsilon$ для каждого решения $x^*(t, \alpha, \varphi)$ любого уравнения семейства $\{d/dt[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)\}$ при всех $t \geq \alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Решение $x = 0$ называется асимптотически устойчивым относительно множества $\Lambda_0 \subset C_H$ равномерно по $\{d/dt[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)\}$, если оно устойчиво относительно Λ_0 равномерно по $\{d/dt[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)\}$ и для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ существует $\Delta = \Delta(\alpha) > 0$ такое, что из $\varphi \in \Lambda_0 \cap \{\|\varphi\| < \Delta\}$ следует, что решение $x^*(t, \alpha, \varphi)$ каждого уравнения (4) стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что*

1) *существует непрерывный функционал $V(t, x_t, Z(t, x_t))$ такой, что*

$$0 \leq V(t, x_t, Z(t, x_t)) \leq \omega_2(\|x_t\|), \quad V(t, 0, Z(t, 0)) \equiv 0, \\ \dot{V}(t, \varphi, Z(t, \varphi)) \leq 0 \quad \forall (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H;$$

2) *решение $x = 0$ является асимптотически устойчивым относительно множества $V^{-1}(\infty, 0)$ равномерно по $\{d/dt[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)\}$.*

Тогда тривиальное решение (1) равномерно устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что положение равновесия $x = 0$ уравнения (1) не является равномерно устойчивым. Тогда справедливо неравенство (6). Можно считать при этом, что $|x^n(t)| < \varepsilon_0$ для $t \in [\alpha_n, \alpha_n + T_n]$.

Определим $\delta_0 = \min(\delta(\varepsilon_0/2, 0), \Delta(0))$ из условия 2) теоремы согласно определениям 6 и 7. Положим $\delta_1 = \delta_0/2$. Очевидно, что существует последовательность $t_n^{\delta_1} \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$, такая, что $\|x_{t_n^{\delta_1} + \alpha_n}^n\| = \delta_1$ и при $t_n^{\delta_1} + \alpha_n \leq t \leq T_n + \alpha_n$ выполняется

$$\delta_1 \leq \|x_t^n\| \leq \varepsilon_0.$$

Аналогично доказательству теоремы 3 можно показать, что существует подпоследовательность (без ограничения общности примем, что она совпадает с $t_n^{\delta_1}$) и функция φ_{δ_1} такие, что

$$x_{t_n^{\delta_1} + \alpha_n}^n \rightarrow \varphi_{\delta_1},$$

где $\|\varphi_{\delta_1}\| = \delta_1, \varphi_{\delta_1} \in V^{-1}(\infty, 0)$,

$$x^n(t + t_n^{\delta_1} + \alpha_n, \alpha_n, \varphi_n) \rightarrow x^*(t, 0, \varphi_{\delta_1}),$$

где $x^*(t, 0, \varphi_{\delta_1})$ есть решение уравнения $d/dt[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)$.

По определению числа δ_1 имеем $|x^*(t, 0, \varphi_{\delta_1})| \leq \varepsilon_0/2, t \geq 0$, и $|x^*(t, 0, \varphi_{\delta_1})| \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$. Обозначим $T_n(\delta_1) = T_n - t_n^{\delta_1}$. Рассмотрим $x^* = x^*(T_n(\delta_1), 0, \varphi_{\delta_1})$. Если $T_n(\delta_1) \leq T < +\infty$ для любого $n = 1, 2, \dots$, то, в силу (6) получаем, что существует T_0 такое, что $\|x_{T_0}^*\| = \varepsilon_0$. Если $T_n(\delta_1) \rightarrow +\infty$, то в силу $\delta_1 \leq \|x_t^n\| \leq \varepsilon_0, t \in [t_n^{\delta_1} + \alpha_n, T_n + \alpha_n]$, для каждого $T = \text{const} > 0$ $|x^*(T, 0, \varphi_{\delta_1})| \geq \delta_1 > 0$. И то и другое свойство противоречат выбору δ_1 .

Теорема доказана.

Исследуем вопрос об асимптотической устойчивости нулевого решения (1) с использованием знакопостоянного функционала Ляпунова со знакопостоянной производной.

Допустим, что для производной dV/dt имеет место следующая оценка:

$$\dot{V}(t, \varphi, Z(t, \varphi)) \leq -W(t, \varphi) \leq 0 \quad \forall (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H.$$

Допустим, что непрерывная функция $W = W(t, \varphi)$ ограничена и равномерно непрерывна на каждом множестве $\mathbb{R}^+ \times K, K$ – компакт из C_H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Компактной оболочкой $H^+(F, G, W, \Lambda)$ функций $F(t, \varphi), G(t, \varphi)$ и $W(t, \varphi)$, определенных на $\mathbb{R}^+ \times C_H$, и удовлетворяющих вышеуказанным требованиям, называется множество предельных совокупностей (F^*, G^*, W^*, Λ) , где

$F^*, G^*, W^* \in C(\Lambda, \mathbb{R}^n)$, $\Lambda = \mathbb{R}^+ \times \Lambda_1$, $\Lambda_1 \subset C_H$ таких, что существует последовательность $t_n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$, для которой $\{F(t + t_n, \varphi)\}$ равномерно сходится к $F^*(t, \varphi)$, $\{G(t + t_n, \varphi)\}$ равномерно сходится к $G^*(t, \varphi)$, $\{W(t + t_n, \varphi)\}$ – к $W^*(t, \varphi)$ на каждом множестве $[0, L] \times K$, где $L = 1, 2, \dots$, множество K – компакт из Λ_1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Множество Λ_0 содержит решения, асимптотически устойчивые равномерно по $\{d/dt[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)\}$, если решение $x = 0$ асимптотически устойчиво относительно множества Λ_0 равномерно по $\{d/dt[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)\}$, и, кроме того, каждое решение уравнения $d/dt[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)$ $x_t^*(\alpha, \varphi) \in \Lambda_0 \quad \forall \varphi \in \Lambda_0, t \in \mathbb{R}^+$.

Докажем следующую теорему о равномерной асимптотической устойчивости.

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что*

1) *существует непрерывный функционал $V(t, x_t, Z(t, x_t))$ такой, что*

$$0 \leq V(t, x_t, Z(t, x_t)) \leq \omega_2(\|x_t\|), \quad V(t, 0, Z(t, 0)) \equiv 0, \\ \dot{V}(t, \varphi, Z(t, \varphi)) \leq -W(t, \varphi) \leq 0 \quad \forall (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H;$$

2) *множество $\{W^*(t, \varphi) = 0\}$ содержит из решений каждого предельного уравнения $\{d/dt[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)\}$ только те, которые асимптотически устойчивы равномерно по $\{d/dt[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)\}$.*

Тогда тривиальное решение (1) равномерно асимптотически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем вначале равномерную устойчивость нулевого решения $x = 0$.

Предположим, что положение равновесия $x = 0$ уравнения (1) не является равномерно устойчивым. Тогда при некотором ε_0 , $0 < \varepsilon_0 < H$, найдутся последовательности $\{\alpha_n > 0\}$, $\{\varphi_n : \|\varphi_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$ и $\{T_n\}$ такие, что для решений (1) $x^n(t) = x(t, \alpha_n, \varphi_n)$ верно

$$\|x_{\alpha_n + T_n}^n(\alpha_n, \varphi_n)\| = \varepsilon_0. \quad (10)$$

Из единственности $x = 0$ следует, что $\alpha_n + T_n \rightarrow +\infty$. Можно считать, что $|x^n(t)| < \varepsilon_0$ для $t \in [\alpha_n, \alpha_n + T_n]$.

В силу дополнительного условия $V(t, \varphi, Z(t, \varphi)) \leq \omega(\|\varphi\|)$ получаем, что существуют числа $\Delta_n \rightarrow 0$ такие, что $V(\alpha_n, \varphi_n, Z(\alpha_n, \varphi_n)) \leq \omega(\|\varphi_n\|) \leq \Delta_n$. В силу $\dot{V}(t, \varphi, Z(t, \varphi)) \leq 0$ получаем, что

$$V(t, x_t^n(\alpha_n, \varphi_n), Z(t, x_t^n(\alpha_n, \varphi_n))) \leq \Delta_n, \quad t > \alpha_n. \quad (11)$$

Определим $\delta_0 = \min(\delta(\varepsilon_0/2, 0), \Delta(0))$ из условия 2) теоремы и определения 9. Положим $\delta_1 = \delta_0/2$. Из теоремы 2 и (10) следует, что существует последовательность $t_n(\delta_1) \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$, $t_n(\delta_1) \geq 0$, функция $\varphi(\delta_1)$ такие, что $x_{t_n(\delta_1) + \alpha_n}^n \rightarrow \varphi(\delta_1)$, $\delta_1 \leq \|x_t\| \leq \varepsilon_0$ для $t \in [t_n(\delta_1) + \alpha_n, T_n + \alpha_n]$, где $\|\varphi(\delta_1)\| = \delta_1$.

Кроме того, существует подпоследовательность (без ограничения общности примем, что она совпадает с $t_n(\delta_1)$) такая, что $F(t + t_n(\delta_1) + \alpha_n, \varphi) \rightarrow F^*(t, \varphi)$ и $G(t + t_n(\delta_1) + \alpha_n, \varphi) \rightarrow G^*(t, \varphi)$. По теореме 2 получаем, что

$$x^n(t + t_n(\delta_1) + \alpha_n, \alpha_n, \varphi_n) \rightarrow x^*(t, 0, \varphi(\delta_1)),$$

где $x^*(t, 0, \varphi(\delta_1))$ есть решение уравнения (4).

Рассмотрим

$$\begin{aligned} & V(t_n(\delta_1) + t + \alpha_n, x_{t_n(\delta_1)+t+\alpha_n}(\alpha_n, \varphi_n), Z(t_n(\delta_1) + t + \alpha_n, x_{t_n(\delta_1)+t+\alpha_n}(\alpha_n, \varphi_n))) \\ & - V(t_n(\delta_1) + \alpha_n, x_{t_n(\delta_1)+\alpha_n}(\alpha_n, \varphi_n), Z(t_n(\delta_1) + \alpha_n, x_{t_n(\delta_1)+\alpha_n}(\alpha_n, \varphi_n))) \\ & \leq - \int_0^t W(s + t_n(\delta_1) + \alpha_n, x_{s+t_n(\delta_1)+\alpha_n}(\alpha_n, \varphi_n)) ds \leq 0. \end{aligned}$$

В силу (11) получаем, что $x_t^*(0, \varphi(\delta_1)) \in \{W^*(t, \varphi) = 0\}$, $t \in \mathbb{R}^+$. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям в доказательстве теоремы 3, получаем противоречие условия 2) с (10).

Докажем теперь равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения $x = 0$ уравнения (1).

Пусть $\overline{C}_r = \{\varphi : \|\varphi\| \leq r < H\}$ лежит в области равномерной устойчивости. Покажем, что $\overline{C}_r$ содержится в области равномерного притяжения $x = 0$ для (1).

Предположим противное, а именно, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$, произвольной последовательности $T_k \rightarrow +\infty$ существует последовательность $(\alpha_k, \varphi_k) \in \mathbb{R}^+ \times \overline{C}_r$ такая, что для решений $x = x(t, \alpha_k, \varphi_k)$ выполняется

$$|x(\alpha_k + T_k, \varphi_k)| = \varepsilon_0.$$

Определим число $\delta_0 = \delta(\varepsilon_0/2)$ из свойства равномерной устойчивости нулевого решения (1) $x = 0$. Тогда для всех $\alpha_k \leq t \leq \alpha_k + T_k$ будем иметь

$$\|x_t(\alpha_k, \varphi_k)\| > \delta_0.$$

Положим $\{\psi_k = x_{\beta_k} : \beta_k = \alpha_k + T_k/2\}$. Значит, для решений (1) $x = x(t + \beta_k, \alpha_k, \varphi_k)$ выполняется

$$\|x_{t+\beta_k}(\alpha_k, \varphi_k)\| > \delta_0 \quad (12)$$

для всех $0 \leq t \leq T_k/2$.

Без ограничения общности по теореме 2 можно считать, что $\psi_k \rightarrow \psi$, $k \rightarrow +\infty$ и последовательность $x(\beta_k + t, \beta_k, \psi_k)$ сходится равномерно по $t \in [0, T]$ к решению $y = y(t, 0, \psi)$ уравнения $d/dt[x(t) - G^*(t, x_t)] = F^*(t, x_t)$.

Тогда в силу (12) имеем

$$\|y_t(0, \psi)\| \geq \delta_0 \quad (13)$$

для всех $t \geq 0$.

Вдоль решения $x = x(t + \beta_k, \beta_k, \psi_k)$ для $\tau > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & V(\beta_k + \tau, x_{\beta_k+\tau}(\beta_k, \psi_k), Z(\beta_k + \tau, x_{\beta_k+\tau}(\beta_k, \psi_k))) \\ & - V(\beta_k, x_{\beta_k}(\beta_k, \psi_k), Z(\beta_k, x_{\beta_k}(\beta_k, \psi_k))) \\ & \leq - \int_0^\tau W(\beta_k + s, x_{\beta_k+s}(\beta_k, \psi_k)) ds \leq 0. \end{aligned}$$

Значит, для любых $\tau \geq 0$, β_k получаем

$$0 \leq \int_0^\tau W(\beta_k + s, x_{\beta_k+s}(\beta_k, \psi_k)) ds \leq m = \text{const.}$$

Устремляя $k \rightarrow \infty$, получаем

$$0 \leq \int_0^\tau W^*(s, y_s(0, \psi)) ds \leq m. \quad (14)$$

Следовательно, $\int_0^\infty W^*(s, y_s(0, \psi)) ds$ сходится и для каждого $\tau \geq 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t-\tau}^{t+\tau} W^*(s, y_s(0, \psi)) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^\tau W^*(t+s, y_{t+s}(0, \psi)) ds = 0.$$

Возьмем произвольную последовательность $t_n \rightarrow +\infty$. Без ограничения общности можно считать, что $G^*(t+t_n, \varphi) \rightarrow G^{**}(t, \varphi)$, $F^*(t+t_n, \varphi) \rightarrow F^{**}(t, \varphi)$, и что $W^*(t_n+t, \varphi) \rightarrow W^{**}(t, \varphi)$, а $y(t_k+t, 0, \psi)$ сходится равномерно по $t \in [-T, T]$ к $z(t, 0, \psi^*)$, где $z(t, 0, \psi^*)$ есть решение уравнения $d/dt[x(t) - G^{**}(t, x_t)] = F^{**}(t, x_t)$, $\psi^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{t_n}$. В силу (13) для каждого $t \in \mathbb{R}$ получаем

$$\|z_t(0, \psi^*)\| \geq \delta_0 > 0. \quad (15)$$

Из (14) имеем

$$0 \leq \int_{-\tau}^\tau W^{**}(s, z_s(0, \psi^*)) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^\tau W(t_n+s, y_{t_n+s}(0, \psi)) ds = 0.$$

Следовательно, для каждого $t \in \mathbb{R}$ $W^{**}(t, z_t(0, \psi^*)) = 0$. Учитывая (15), мы приходим к противоречию с условием 2) теоремы.

Теорема доказана.

ПРИМЕР. Имеется следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[Z_1(t, x_t)] = Z_2(t, x_t), \\ \frac{d}{dt}[Z_2(t, x_t)] = -a(t, x_t)[Z_2(t, x_t)] - b(t)f_1(Z_1(t, x_t)), \\ \frac{d}{dt}[Z_3(t, x_t)] = [Z_1(t, x_t)]f_2(Z_2(t, x_t)) - Z_3(t, x_t). \end{cases} \quad (16)$$

Здесь ядра $Z_i(t, x_t) = x_i(t) - G_i(t, x_t)$, $Z_i(t, 0) \equiv 0$, функции $G_i(t, x_t)$, $i = 1, 2, 3$ удовлетворяют условию 2) теоремы 1.

Допустим, что функция $G = (G_1, G_2, G_3)$ удовлетворяет условию (3); функция a удовлетворяет условию (2); функции f , b , G_1 , G_2 , G_3 , a ограничены и равномерно непрерывны. Тогда уравнения, предельные к (16), имеют аналогичный вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[Z_1^*(t, x_t)] = Z_2^*(t, x_t), \\ \frac{d}{dt}[Z_2^*(t, x_t)] = -a^*(t, x_t)[Z_2^*(t, x_t)] - b^*(t)f_1(Z_1^*(t, x_t)), \\ \frac{d}{dt}[Z_3^*(t, x_t)] = [Z_1^*(t, x_t)]f_2(Z_2^*(t, x_t)) - Z_3^*(t, x_t). \end{cases} \quad (17)$$

Предположим, что для всех $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^2$ выполняются условия

$$\begin{aligned} f_i(x) = 0, \quad x = 0, \quad i = 1, 2, \quad f(x_1) = 0, \quad x_1 > 0 \quad (|x_1| > 0), \\ a(t, x_t) \geq c > 0, \quad b(t) \in C^1: \quad b(t) \geq b > 0, \quad c, b = \text{const.} \end{aligned}$$

Допустим, что

$$\frac{\dot{b}(t)}{2b^2(t)} + \frac{a(t, x_t)}{b(t)} \geq k_0 > 0, \quad k_0 = \text{const.}$$

Рассмотрим знакопостоянный функционал Ляпунова в виде

$$V = \frac{(Z_2)^2}{2b(t)} + b(t) \int_0^{Z_1} f(u) du.$$

Его производная в силу (16) имеет оценку

$$\dot{V} = -k_0 Z_2^2 \leq 0.$$

Полагаем $W(t, x_t) = k_0 Z_2^2(t, x_t)$. Тогда $W^*(t, x_t) = k_0 Z_2^{*2}(t, x_t)$.

На множестве $\{W^*(t, \varphi) = 0\}$ предельная система (17) принимает вид

$$\frac{d}{dt}[x_3(t) - G_3^*(t, x_t)] = -(x_3(t) - G_3^*(t, x_t)). \quad (18)$$

В силу (18) и леммы 7.2.3 из [9] получаем, что решение (18) $x_3(t) = 0$ асимптотически устойчиво.

Из теоремы 5 следует, что нулевое решение системы (16) равномерно асимптотически устойчиво.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. С. Андреев, С. В. Павликов, “К методу функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений”, *Матем. заметки*, **68**:3 (2000), 323–331.
- [2] А. С. Андреев, Д. Х. Хусанов, “К методу функционалов ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости и неустойчивости”, *Дифференц. уравнения*, **34**:7 (1998), 876–885.
- [3] А. А. Мартынюк, Д. Като, А. А. Шестаков, *Устойчивость движения: метод предельных уравнений*, Наукова думка, Киев, 1990.
- [4] J. K. Hale, J. Kato, “Phase space for retarded equations with infinite delay”, *Funkcial. Ekvac.*, **21**:1 (1978), 11–41.
- [5] S. Murakami, “Perturbation theorems for functional differential equations with infinite delay via limiting equations”, *J. Differential Equations*, **59**:3 (1985), 314–335.
- [6] А. А. Косов, “О глобальной устойчивости неавтономных систем. I”, *Изв. вузов. Матем.*, 1997, № 7, 28–35.
- [7] В. Б. Колмановский, В. Р. Носов, *Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием*, Наука, М., 1981.
- [8] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984.
- [9] А. С. Андреев, *Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений*, Ульяновский гос. ун-т, Ульяновск, 2005.
- [10] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976.

С. В. Павликов

Камская государственная
инженерно-экономическая академия,
г. Набережные Челны
E-mail: sp@im.tbit.ru

Поступило

05.06.2006

Исправленный вариант

17.10.2007