Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Сирбиладзе, Теоремы трансформации для расширенных нижних и верхних интегралов Суджено, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 3, 439–460

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4528>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:52:25

Теоремы трансформации для расширенных нижних и верхних интегралов Суджено

Г. Г. Сирбиладзе

В статье рассматриваются основные свойства расширенных, экстремальных нечетких мер и приводятся несколько вариантов их представления. Доказывается несколько теорем трансформации для расширенных, нижних и верхних интегралов Суджено.

Библиография: 11 названий.

Введение. Главная тема статьи относится к быстро развивающейся теории нечетких мер и интегралов [1]–[7], применение которых в качестве инструмента построения систем поддержки принятия решений не является новой идеей [5], [8]–[10]. Однако следуя тем же путем, мы используем для наших целей лишь ту часть теории нечетких мер, которая имеет дело с экстремальными, нечеткими мерами, и которая, по нашему мнению, применяется крайне редко. В настоящей работе предлагается новый механизм построения расширенной нечеткой меры, в основу расширения которой положены нижние и верхние интегралы Суджено [1].

В п. 1 вводится понятие экстремальной измеримости функции и строится пространство расширенных, экстремальных, нечетких мер. Доказываются несколько теорем о представлении.

Пункт 2 содержит основные теоремы трансформации экстремальных нечетких мер.

1. Расширенные экстремальные нечеткие меры типа Суджено. Первым делом считаем нужным напомнить несколько определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1]. Пусть X – некоторое непустое множество.

а) Некоторый класс $\mathcal{B}^* \subset 2^X$ подмножеств X называется *верхней σ^* -алгеброй*, если

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{B}^*$;
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{B}^* \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}^*$;
- (iii) $\forall \{A_n\} \in \mathcal{B}^*, n = 1, 2, \dots, A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathcal{B}^*$.

б) Некоторый класс $\mathcal{B}_* \subset 2^X$ подмножеств X называется *нижней σ_* -алгеброй*, если

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{B}_*$;
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{B}_* \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{B}_*$;
- (iii) $\forall \{A_n\} \in \mathcal{B}_*, n = 1, 2, \dots, A_n \downarrow A \Rightarrow A \in \mathcal{B}_*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [1]. Классы $\mathcal{B}^*$ и $\mathcal{B}_*$ называются *экстремальными* тогда и только тогда, когда

$$\forall A \in \mathcal{B}^* \Leftrightarrow \bar{A} \in \mathcal{B}_*.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\mathcal{B} \subseteq 2^X$ некоторая σ -алгебра. Тогда $\mathcal{B}$ одновременно является и σ^* - и σ_* -алгеброй.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [1].

- 1) $(X, \mathcal{B}^*)$ называется *верхним измеримым пространством*;
- 2) $(X, \mathcal{B}_*)$ называется *нижним измеримым пространством*;
- 3) если $\mathcal{B}^*$ и $\mathcal{B}_*$ соответственно являются экстремальными σ^* - и σ_* -алгебрами, то $(X, \mathcal{B}_*, \mathcal{B}^*)$ называется *экстремальным измеримым пространством*.

Приведем примеры σ^* - и σ_* -алгебр. Пусть $\mathbb{R}_0^+$ есть множество всех неотрицательных вещественных чисел.

ПРИМЕР 1. Имеем

$$\mathcal{B}_1^* \triangleq \{A \subset \mathbb{R}_0^+ \mid A = (\alpha; +\infty), \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}_0^+\} \quad \text{есть } \sigma^*\text{-алгебра,}$$

$$\mathcal{B}_{1*} \triangleq \{A \subset \mathbb{R}_0^+ \mid A = [0; \alpha], \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}_0^+\} \quad \text{есть } \sigma_*\text{-алгебра.}$$

$\mathcal{B}_1^*$ и $\mathcal{B}_{1*}$ называются соответственно σ^* - и σ_* -алгеброй *Бореля первого рода*. Ясно, что $\mathcal{B}_1^*$ и $\mathcal{B}_{1*}$ экстремальны.

ПРИМЕР 2. Имеем

$$\mathcal{B}_2^* \triangleq \{A \subset \mathbb{R}_0^+ \mid A = [0; \alpha], \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}_0^+\} \quad \text{есть } \sigma^*\text{-алгебра,}$$

$$\mathcal{B}_{2*} \triangleq \{A \subset \mathbb{R}_0^+ \mid A = [\alpha; +\infty), \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}_0^+\} \quad \text{есть } \sigma_*\text{-алгебра.}$$

$\mathcal{B}_2^*$ и $\mathcal{B}_{2*}$ называются соответственно σ^* - и σ_* -алгеброй *Бореля второго рода*. Ясно, что $\mathcal{B}_2^*$ и $\mathcal{B}_{2*}$ экстремальны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [1]. Пусть $(X, \mathcal{B}^*)$ некоторое верхнее измеримое пространство. Функция $g^*: \mathcal{B}^* \rightarrow [0; 1]$ называется *верхней нечеткой мерой*, если

- (i) $g^*(\emptyset) = 0, g^*(X) = 1$;
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{B}^*, A \subset B \Rightarrow g^*(A) \leq g^*(B)$;
- (iii) $\forall \{A_n\} \in \mathcal{B}^*, n = 1, 2, \dots, A_n \uparrow A \Rightarrow g^*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} g^*(A_n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [1]. Пусть $(X, \mathcal{B}_*)$ – некоторое нижнее измеримое пространство. Функция $g_*: \mathcal{B}_* \rightarrow [0; 1]$ называется *нижней нечеткой мерой*, если

- (i) $g_*(\emptyset) = 0, g_*(X) = 1$;
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{B}_*, A \subset B \Rightarrow g_*(A) \leq g_*(B)$;
- (iii) $\forall \{A_n\} \in \mathcal{B}_*, n = 1, 2, \dots, A_n \downarrow A \Rightarrow g_*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_*(A_n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [1]. Пусть $(X, \mathcal{B}_*, \mathcal{B}^*)$ – некоторое экстремальное измеримое пространство, g_* нижняя и g^* верхняя нечеткая мера. Тогда

а) $g_*: \mathcal{B}_* \rightarrow [0; 1]$ и $g^*: \mathcal{B}^* \rightarrow [0; 1]$ называются *экстремальными* тогда и только тогда, когда

$$\forall A \in \mathcal{B}_*: g_*(A) = 1 - g^*(\bar{A});$$

б) $(X, \mathcal{B}_*, \mathcal{B}^*, g_*, g^*)$ называется *пространством экстремальных нечетких мер*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть g есть некоторая нечеткая мера на измеримом пространстве $(X, \mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ – σ -алгебра. Пусть $\mathcal{B}_* = \mathcal{B}^* = \mathcal{B}$. Тогда экстремальными на $\mathcal{B}$ будут любые, так называемые дуальные нечеткие меры g и g^* [9]:

$$\forall A \in \mathcal{B}: \quad g^*(A) = 1 - g(\bar{A}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $(X_1, \mathcal{B}'_*, \mathcal{B}'^*)$ и $(X_2, \mathcal{B}''_*, \mathcal{B}''^*)$ – некоторые экстремальные, измеримые пространства. Отображение $h: X_1 \rightarrow X_2$ называется *измеримым*, если

$$\forall A \in \mathcal{B}''^*, B \in \mathcal{B}''_*: \quad h^{-1}(A) \in \mathcal{B}'^*, \quad h^{-1}(B) \in \mathcal{B}'_*.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $(X, \mathcal{B}_*, \mathcal{B}^*)$ – некоторое экстремальное измеримое пространство.

а) Функция $h: X \rightarrow \mathbb{R}_0^*$ называется *верхней измеримой* тогда и только тогда, когда h измерима относительно пространств $(X, \mathcal{B}_*, \mathcal{B}^*)$ и $(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{B}_{1*}, \mathcal{B}_1^*)$. В этом случае имеем

$$\forall \alpha \geq 0 \quad h^{-1}((\alpha; +\infty)) \in \mathcal{B}^*, \quad h^{-1}([0; \alpha]) \in \mathcal{B}_*.$$

б) Функция $h: X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ называется *нижней измеримой* тогда и только тогда, когда h измерима относительно пространств $(X, \mathcal{B}_*, \mathcal{B}^*)$ и $(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{B}_{2*}, \mathcal{B}_2^*)$. В этом случае имеем

$$\forall \alpha \geq 0 \quad h^{-1}([0; \alpha]) \in \mathcal{B}^*, \quad h^{-1}([\alpha; +\infty)) \in \mathcal{B}_*.$$

Приведем без доказательств несколько свойств (верхних и нижних) измеримых функций.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(X, \mathcal{B}^*, \mathcal{B}_*)$ некоторое экстремальное, измеримое пространство.

а) Если $\{h_n\}: X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $n = 1, 2, \dots$, – последовательность верхних измеримых функций и $\{h_n\} \uparrow h$, то h есть верхняя измеримая функция на X .

б) Если $\{h_n\}: X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $n = 1, 2, \dots$, – последовательность нижних измеримых функций и $\{h_n\} \downarrow h$, то h есть нижняя измеримая функция на X .

в) Если $h_1, h_2: X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ являются двумя верхними измеримыми функциями, то $h_1 \vee h_2$ тоже является верхней измеримой функцией на X .

г) Если $h_1, h_2: X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $n = 1, 2, \dots$, являются двумя нижними измеримыми функциями, то $h_1 \wedge h_2$ тоже является нижней измеримой функцией на X .

Приведем определения расширения классов $\mathcal{B}_*$ и $\mathcal{B}^*$ σ_* - и σ^* -алгебр до σ -алгебр нечетких подмножеств с верхними и нижними измеримыми функциями принадлежности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть $(X, \mathcal{B}_*, \mathcal{B}^*)$ – некоторое экстремальное, измеримое пространство.

а) Расширением σ_* -алгебры $\mathcal{B}_*$ называется класс нечетких подмножеств $\tilde{A} \subset X$ с нижними измеримыми функциями принадлежности

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{B}}_* &= \{\tilde{A} \subset X \mid \mu_{\tilde{A}} - \text{нижняя измеримая функция}\} \\ &= \{\tilde{A} \subset X \mid \forall 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \mu_{\tilde{A}}^{-1}([0; \alpha]) \in \mathcal{B}^*, \mu_{\tilde{A}}^{-1}([\alpha; +\infty)) \in \mathcal{B}_*\}. \end{aligned}$$

б) *Расширением σ^* -алгебры $\mathcal{B}^*$* называется класс нечетких подмножеств $\tilde{A} \subset X$ с верхними измеримыми функциями принадлежности

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{B}}^* &= \{\tilde{A} \subset X \mid \mu_{\tilde{A}} - \text{верхняя измеримая функция}\} \\ &= \{\tilde{A} \in X \mid \forall 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \mu_{\tilde{A}}^{-1}([0; \alpha]) \in \mathcal{B}_*, \mu_{\tilde{A}}^{-1}((\alpha; +\infty)) \in \mathcal{B}^*\}.\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что

а) $\mathcal{B}_* \subset \tilde{\mathcal{B}}_*, \mathcal{B}^* \subset \tilde{\mathcal{B}}^*$;

б) если $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$, то $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}^*$;

в) расширение $\tilde{\mathcal{B}}_*$ есть σ_* -алгебра, а расширение $\tilde{\mathcal{B}}^*$ – σ^* -алгебра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. *Расширением экстремального измеримого пространства $(X, \mathcal{B}_*, \mathcal{B}^*)$* называется экстремальное измеримое пространство $(X, \tilde{\mathcal{B}}_*, \tilde{\mathcal{B}}^*)$.

Пусть $h_i: X \rightarrow \mathbb{R}_0^+, i = 1, 2, \dots, n$, и $h_i(x) = a_i I_{A_i}(x) + b_i$ – элементарные функции, где a_i, b_i являются положительными вещественными числами, а I_{A_i} – индикатор некоторого подмножества $A_i \subset X$. Ясно, что если $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}_*$, то функция $h_* = \bigwedge_{i=1}^n h_i$ является нижней измеримой. Если $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}^*$, то функция $h^* = \bigvee_{i=1}^n h_i$ является верхней измеримой. Функции вида h_* и h^* назовем соответственно *нижними* и *верхними простыми функциями*. Тогда справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(X, \mathcal{B}_*, \mathcal{B}^*)$ – некоторое экстремальное, измеримое пространство, а $h: X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ функция на X . Тогда

а) h является верхней измеримой функцией тогда и только тогда, когда имеется такая последовательность верхних простых функций $\{h_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, на X , что $h_n \uparrow h$.

б) h является нижней измеримой функцией тогда и только тогда, когда имеется такая последовательность нижних простых функций $\{h_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, на X , что $h_n \downarrow h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем а). Доказательство б) аналогично.

Достаточность следует из теоремы 1 и того факта, что простые функции всегда ограничены.

Необходимость. Пусть h верхняя измеримая функция, M – нижний предел функции h , $M = \inf_{x \in X} h(x)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ строим элементарные функции

$$h_{n_i}(x) = \alpha_{n_i} I_{A_{n_i}}(x) - M, \quad i = 0, 1, \dots, n \cdot 2^{n-1}, \quad \forall x \in X,$$

где

$$\alpha_{n_i} = \frac{i}{2^n}, \quad A_{n_i} = \{x \in X \mid h(x) < \alpha_{n_i}\}.$$

Ясно, что h_{n_i} верхние измеримые функции, $A_{n_i} \in \mathcal{B}^*$ такие, что

$$h_n(x) \triangleq \bigvee_{i=0}^k h_{n_i}(x), \quad k = 2^{n-1} \cdot n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

являются верхними измеримыми простыми функциями.

Необходимо доказать, что $\{h_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, является неубывающей функциональной последовательностью ($h_{n+1} \geq h_n$) и что $h_n \uparrow h$. Поскольку $i/2^n = 2i/2^{n+1} \Rightarrow h_{n_i} = h_{(n+i)(2i)}$, имеем $h_{n+1} \geq h_n$; если $x \in X$ и $h(x) \leq n$, то

$$h(x) - h_n(x) \leq \frac{1}{2^n},$$

т.е. $h_n \uparrow h$.

Введем понятие расширения нечетких, экстремальных мер на основе интегралов Суджено [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11 [1]. Пусть $(X, \mathcal{B}_*, \mathcal{B}^*, g_*, g^*)$ – некоторое пространство экстремальных нечетких мер, а $(X, \tilde{\mathcal{B}}_*, \tilde{\mathcal{B}}^*)$ – расширение экстремального измеримого пространства $(X, \mathcal{B}_*, \mathcal{B}^*)$.

а) *Расширением нечеткой меры g_* на $\tilde{\mathcal{B}}_*$ называется функция*

$$\tilde{g}_*(\tilde{A}) \equiv \int_{X_*}^* \mu_{\tilde{A}}(x) \circ g_*(\cdot) \triangleq \bigvee_{0 < \alpha \leq 1} [\alpha \wedge g_*([\tilde{A}]_{\bar{\alpha}})] \quad \forall \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}_*. \quad (1')$$

б) *Расширением нечеткой меры g^* на $\tilde{\mathcal{B}}^*$ называется функция*

$$\tilde{g}^*(\tilde{A}) \equiv \int_X^* \mu_{\tilde{A}}(x) \circ g^*(\cdot) \triangleq \bigwedge_{0 < \alpha \leq 1} [\alpha \vee g^*([\tilde{A}]_{\alpha})] \quad \forall \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}^*, \quad (1'')$$

где $[\tilde{A}]_{\alpha} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$, $[\tilde{A}]_{\bar{\alpha}} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$, $0 < \alpha \leq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Интегралы

$$\int_{X_*}^* \quad \text{и} \quad \int_X^*$$

называются соответственно *нижним и верхним интегралами Суджено*.

Нетрудно доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Расширенные меры $\tilde{g}_*$ и $\tilde{g}^*$ являются соответственно нижней нечеткой и верхней нечеткой мерами на $\tilde{\mathcal{B}}_*$ и $\tilde{\mathcal{B}}^*$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Расширением пространства $(X, \mathcal{B}_*, \mathcal{B}^*, g_*, g^*)$ называется пространство экстремальных нечетких мер $(X, \tilde{\mathcal{B}}_*, \tilde{\mathcal{B}}^*, \tilde{g}_*, \tilde{g}^*)$.*

2. Теоремы трансформации для расширенных нижних и верхних интегралов Суджено. В данном пункте мы доказываем теоремы трансформации для экстремальных, расширенных интегралов Суджено относительно экстремальных, расширенных нечетких мер.

Пусть $(X, \mathcal{B}_*, \mathcal{B}^*, g_*, g^*)$ – некоторое пространство экстремальных нечетких мер, а $(X, \tilde{\mathcal{B}}_*, \tilde{\mathcal{B}}^*, \tilde{g}_*, \tilde{g}^*)$ – его расширение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. а) Пусть $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$ любые нечеткие множества. Тогда нижний нечеткий интеграл Суджено функции принадлежности $\mu_{\tilde{B}}$ на нечетком множестве $\tilde{A}$ определяется относительно нижней нечеткой меры $\tilde{g}_*$ формулой

$$\int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot) \triangleq \bigvee_{0 < \alpha \leq 1} [\alpha \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap [\tilde{B}]_{\bar{\alpha}})]. \quad (2')$$

б) Пусть $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}^*$ любые нечеткие множества. Тогда верхний нечеткий интеграл Суджено функции принадлежности $\mu_{\tilde{B}}$ на нечетком множестве $\tilde{A}$ определяется относительно нижней нечеткой меры $\tilde{g}^*$ формулой

$$\int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}^*(\cdot) \triangleq \bigwedge_{0 < \alpha \leq 1} [\alpha \vee \tilde{g}^*(\tilde{A} \cup [\tilde{B}]_{\alpha})]. \quad (2'')$$

Доказательства следующих двух теорем стандартны и поэтому здесь не приводятся.

ТЕОРЕМА 4. а) Пусть $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$. Тогда

$$\int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot) = \int_{\tilde{B}}^* \mu_{\tilde{A}}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot) = \int_X^* \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot). \quad (3')$$

б) Пусть $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}^*$. Тогда

$$\int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}^*(\cdot) = \int_{\tilde{B}}^* \mu_{\tilde{A}}(x) \circ \tilde{g}^*(\cdot) = \int_X^* \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}^*(\cdot). \quad (3'')$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$ ($\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{B}} \in \tilde{\mathcal{B}}^*$). Тогда

$$\int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot) = 1 - \int_{\tilde{\tilde{A}}}^* \mu_{\tilde{\tilde{B}}}(x) \circ \tilde{g}^*(\cdot). \quad (4)$$

Докажем теоремы о представлении нижних и верхних нечетких интегралов Суджено.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$ – некоторое нечеткое множество, а $\mathcal{B}_*(\tilde{B})$ – минимальная σ_* -алгебра множеств X , где $\mu_{\tilde{B}}$ является $\mathcal{B}_*(\tilde{B})$ -измеримой, $\mathcal{B}_*(\tilde{B}) \subseteq \mathcal{B}_*$. Тогда для $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot) &= \bigvee_{E \in \mathcal{B}_*(\tilde{B})} \left[\left(\bigwedge_{x \in E} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E) \right] \\ &= \bigvee_{E \in \mathcal{B}_*(\tilde{B})} \left[\left(\bigwedge_{x \in E} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E) \right] \\ &= \bigvee_{\tilde{E} \in \tilde{\mathcal{B}}_*} \left[\left(\bigwedge_{x \in [\tilde{E}]_0} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap \tilde{E}) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $0 < \alpha \leq 1$, то $\bigwedge_{x \in [\tilde{B}]_{\bar{\alpha}}} \mu_{\tilde{B}}(x) \geq \alpha$ и $[\tilde{B}]_{\bar{\alpha}} \in \mathcal{B}_*(\tilde{B})$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} [\alpha \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap [\tilde{B}]_{\bar{\alpha}})] &\leq \bigvee_{E \in \mathcal{B}_*(\tilde{B})} [\alpha \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E)] \leq \bigvee_{E \in \mathcal{B}_*(\tilde{B})} \left[\left(\bigwedge_{x \in [\tilde{B}]_{\bar{\alpha}}} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E) \right] \\ &\leq \bigvee_{E \in \mathcal{B}_*(\tilde{B})} \left[\left(\bigwedge_{x \in E} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\bigwedge_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot) \leq \bigvee_{E \in \mathcal{B}_*(\tilde{B})} \left[\left(\bigwedge_{x \in E} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E) \right].$$

Ясно, что $\mathcal{B}_*(\tilde{B}) \subset \mathcal{B}_* \subset \tilde{\mathcal{B}}_*$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \bigvee_{E \in \mathcal{B}_*(\tilde{B})} \left[\left(\bigwedge_{x \in E} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E) \right] &\leq \bigvee_{E \in \mathcal{B}_*} \left[\left(\bigwedge_{x \in E} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E) \right] \\ &\leq \bigvee_{\tilde{E} \in \tilde{\mathcal{B}}_*} \left[\left(\bigwedge_{x \in [\tilde{E}]_0} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap \tilde{E}) \right]. \end{aligned}$$

С другой стороны, $\forall \tilde{E} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$ выбираем $\alpha' = \alpha(\tilde{E}) > 0$ таким образом, что

$$\alpha' = \bigwedge_{x \in [\tilde{E}]_0} \mu_{\tilde{B}}(x) = \wedge \{ \mu_{\tilde{B}}(x) \mid \mu_{\tilde{E}}(x) \geq 0 \}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} [\tilde{B}]_{\alpha'} &= \{x \in X \mid \mu_{\tilde{B}}(x) \geq \alpha'\} \supset \tilde{E}, \\ \left[\left(\bigwedge_{x \in [\tilde{E}]_0} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap \tilde{E}) \right] &\leq \alpha' \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap [\tilde{B}]_{\alpha'}) \leq \bigwedge_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot). \end{aligned}$$

Рассмотрев супремум в левой части последнего неравенства, мы завершаем доказательство (5):

$$\bigvee_{\tilde{E} \in \tilde{\mathcal{B}}_*} \left[\left(\bigwedge_{x \in [\tilde{E}]_0} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap \tilde{E}) \right] \leq \bigwedge_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot).$$

Теорема 6 доказана.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}^*$ – некоторое нечеткое множество, $\mathcal{B}^*(\tilde{B})$ – минимальная σ^* -алгебра подмножеств X , где $\mu_{\tilde{B}}$ является $\mathcal{B}^*(\tilde{B})$ -измеримой, $\mathcal{B}^*(\tilde{B}) \subset \mathcal{B}^*$. Тогда $\forall \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}^*$ имеем

$$\begin{aligned} \bigwedge_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}} \circ \tilde{g}^*(\cdot) &= \bigwedge_{E \in \mathcal{B}^*(\tilde{B})} \left[\left(\bigvee_{x \in E} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \vee \tilde{g}^*(\tilde{A} \cup E) \right] \\ &= \bigwedge_{E \in \mathcal{B}^*} \left[\left(\bigvee_{x \in E} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \vee \tilde{g}^*(\tilde{A} \cup E) \right] \\ &= \bigwedge_{\tilde{E} \in \tilde{\mathcal{B}}^*} \left[\left(\bigvee_{x \in [\tilde{E}]_1} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \wedge \tilde{g}^*(\tilde{A} \cup \tilde{E}) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
 \int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}^*(\cdot) &= 1 - \int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}^*(\cdot) = 1 - \bigvee_{\tilde{E} \in \mathcal{B}_*(\tilde{B})} \left[\left(\bigwedge_{x \in E} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap \tilde{E}) \right] \\
 &= 1 - \bigvee_{\tilde{E} \in \mathcal{B}_*(\tilde{B})} \left[\left(\bigwedge_{x \in \tilde{E}} (1 - \mu_{\tilde{B}}(x)) \right) \wedge (1 - \tilde{g}^*(\tilde{A} \cup E)) \right] \\
 &= \bigwedge_{E \in \mathcal{B}^*(\tilde{B})} \left[\left(\bigvee_{x \in E} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \vee \tilde{g}^*(\tilde{A} \cup E) \right].
 \end{aligned}$$

Два других равенства в (6) получаются аналогично.

Пусть $\tilde{\mathcal{B}}_{S*} \subset \tilde{\mathcal{B}}_*$ есть класс всех нечетких подмножеств X с простыми нижними измеримыми функциями принадлежности, а $\tilde{\mathcal{B}}_S^* \subset \tilde{\mathcal{B}}^*$ – класс всех нечетких подмножеств X с простыми верхними измеримыми функциями принадлежности; тогда

- если $\tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_{S*}$, то $\forall x \in X$, $\mu_{\tilde{S}}(x) \triangleq \bigwedge_{i=1}^n (1 - \alpha_i \cdot I_{E_i}(x))$, где $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$; $\bigcup_{i=1}^n E_i = X$, $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$;
- если $\tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_S^*$, то $\forall x \in X$, $\mu_{\tilde{S}}(x) \triangleq \bigvee_{i=1}^m (\beta_i \cdot I_{F_i}(x))$, где $F_i \cap F_j = \emptyset$, $i \neq j$; $\bigcup_{i=1}^m F_i = X$, $0 < \beta_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Докажем еще одну теорему о представлении расширенных нижних и верхних нечетких интегралов Суджено через простые нижние и верхние композиции.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$ и $\tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_{S*} \subset \tilde{\mathcal{B}}_*$. Обозначим

$$Q_{*\tilde{A}}(\tilde{S}) = \bigvee_{i=1}^{m_{\tilde{S}}} [(1 - \beta_i) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E_i)],$$

где

$$\mu_{\tilde{S}}(x) \equiv \bigwedge_{i=1}^{m_{\tilde{S}}} (1 - \beta_i I_{E_i}(x)), \quad \bigcup_{i=1}^{m_{\tilde{S}}} E_i = X, \quad E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

$\forall x \in X$. Тогда

$$\int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}^*(\cdot) = \bigvee_{\langle \tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_{S*}, \tilde{S} \subset \tilde{B} \rangle} Q_{*\tilde{A}}(\tilde{S}). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 6 вытекает, что достаточно доказать

$$\bigvee_{\tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_{S*}} Q_{*\tilde{A}}(\tilde{S}) = \bigvee_{E \in \mathcal{B}_*} \left[\left(\bigwedge_{x \in E} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E) \right].$$

Если $E \in \mathcal{B}_*$, $E \neq \emptyset$ и $\bigwedge_{x \in E} \mu_{\tilde{B}}(x) > 0$, то берем

$$0 < \alpha_0 = \bigwedge_{x \in E} \mu_{\tilde{B}}(x) \quad \text{и} \quad \tilde{S}_0 \in \tilde{\mathcal{B}}_{*S}$$

таким образом, что

$$\mu_{\tilde{S}_0}(x) = (1 - \beta_0 I_{E_0}(x)) \wedge (1 - 1 \cdot I_{\bar{E}_0}(x)), \quad \beta_0 = 1 - \alpha_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bigvee_{\tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_{S*}} Q_{*\tilde{A}}(\tilde{S}) &\geq Q_{*\tilde{A}}(\tilde{S}_0) = [(1 - \beta_0) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E)] \vee [(1 - 1) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E)] \\ &= \alpha_0 \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E) = \left(\bigwedge_{x \in E} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E). \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\bigvee_{\tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_{S*}} Q_{*\tilde{A}}(\tilde{S}) \geq \bigvee_{E \in \mathcal{B}_*} \left[\left(\bigwedge_{x \in E} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E) \right].$$

С другой стороны, для $\tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_{S*}$ имеем $\mu_{\tilde{S}}(x) = \bigwedge_{i=1}^{m_S} [1 - \beta_i \cdot I_{E_i}(x)]$, $\bigcup_{i=1}^{m_S} E_i = X$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$, и, следовательно, существует такая $1 \leq i_0 \leq m_S$, что

$$Q_{*\tilde{A}}(\tilde{S}) = \bigvee_{i=1}^{m_S} [(1 - \beta_i) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E_i)] = (1 - \beta_{i_0}) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E_{i_0}).$$

Так как $1 - \beta_{i_0} \leq \bigwedge_{x \in E_{i_0}} \mu_{\tilde{B}}(x)$ (предполагается, что $\tilde{B} \supset \tilde{S}$), получаем

$$\begin{aligned} Q_{*\tilde{A}}(\tilde{S}) &\leq \left(\bigwedge_{x \in E_{i_0}} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E_{i_0}) \leq \bigvee_{E \in \mathcal{B}_*} \left[\left(\bigwedge_{x \in E} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E) \right], \\ \bigvee_{\tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_{S*}} Q_{*\tilde{A}}(\tilde{S}) &\leq \bigvee_{E \in \mathcal{B}_*} \left[\left(\bigwedge_{x \in E} \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E) \right]. \end{aligned}$$

Формула (7) доказана.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}^*$ и $\tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_S \subset \tilde{\mathcal{B}}^*$. Обозначим

$$Q_{\tilde{A}}^*(\tilde{S}) = \bigwedge_{i=1}^{m_S} [\alpha_i \vee \tilde{g}^*(\tilde{A} \cup E_i)],$$

где $\forall x \in X$,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \bigvee_{i=1}^{m_S} \alpha_i I_{E_i}(x), \quad \bigcup_{i=1}^{m_S} E_i = X, \quad E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Тогда

$$\bigwedge_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}^*(\cdot) = \bigwedge_{\langle \tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_S^*, \tilde{S} \supset \tilde{B} \rangle} Q_{\tilde{A}}^*(\tilde{S}). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mu_{\tilde{S}}(x) = \bigvee_{i=1}^{m_S} \alpha_i I_{E_i}(x)$, то $\mu_{\tilde{S}}(x) = \bigwedge_{i=1}^{m_S} (1 - \alpha_i I_{E_i}(x))$, а если $\tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_S^*$, то $\tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_{S*}$ и $\tilde{S} \supseteq \tilde{B}$, т.е., $\tilde{S} \subseteq \tilde{B}$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
 \int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}^*(\cdot) &= 1 - \int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot) = 1 - \bigvee_{\langle \tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_{S^*}, \tilde{S} \subseteq \tilde{B} \rangle} Q_{*\tilde{A}}(\tilde{S}) \\
 &= 1 - \bigvee_{\langle \tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_{S^*}, \tilde{S} \subseteq \tilde{B} \rangle} \left[\bigvee_{i=1}^{m_S} [(1 - \alpha_i) \wedge \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap \tilde{E}_i)] \right] \\
 &= 1 - \bigvee_{\langle \tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_{S^*}, \tilde{S} \supset \tilde{B} \rangle} \left[\bigvee_{i=1}^{m_S} [(1 - \alpha_i) \wedge (1 - \tilde{g}^*(\tilde{A} \cup E_i))] \right] \\
 &= \bigwedge_{\langle \tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_{S^*}, \tilde{S} \supset \tilde{B} \rangle} \left[\bigwedge_{i=1}^{m_S} [\alpha_i \vee \tilde{g}^*(\tilde{A} \cup E_i)] \right] = \bigwedge_{\langle \tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_{S^*}, \tilde{S} \supset \tilde{B} \rangle} Q_{\tilde{A}}^*(S).
 \end{aligned}$$

Теорема 9 доказана.

Введем следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Пусть $(X, \tilde{\mathcal{B}}_*, \tilde{B}^*, \tilde{g}_*, \tilde{g}^*)$ – расширение некоторого пространства экстремальных нечетких мер $(X, \mathcal{B}_*, \mathcal{B}^*, g_*, g^*)$.

а) Для любого нечеткого множества $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$ введем на $\mathcal{B}_*$ новую меру

$$\forall E \in \mathcal{B}_* \quad g_{\tilde{A}*}(E) \triangleq \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap E), \quad (9)$$

которую назовем *индуцированной $\tilde{A}$ -расширенной мерой относительно $\tilde{g}_*$* .

б) Для любого нечеткого множества $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}^*$ введем на $\mathcal{B}^*$ новую меру

$$\forall E \in \mathcal{B}^* \quad g_{\tilde{A}}^*(E) \triangleq \tilde{g}^*(\tilde{A} \cup E) - \tilde{g}^*(\tilde{A}), \quad (10)$$

которая называется *индуцированной $\tilde{A}$ -расширенной мерой относительно $\tilde{g}^*$* .

Легко доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 10. а) Мера $g_{\tilde{A}*}$ на $\mathcal{B}_*$ есть нижняя нечеткая мера, а мера $g_{\tilde{A}}^*$ на $\mathcal{B}^*$ есть верхняя нечеткая мера.

б) $g_{\tilde{A}*}$ и $g_{\tilde{A}}^*$ являются экстремальными нечеткими мерами тогда и только тогда, когда они индуцированы расширенными экстремальными нечеткими мерами $\tilde{g}_*$ и $\tilde{g}^*$.

Следующее утверждение доказывается применением теоремы 10.

ТЕОРЕМА 11 (теорема трансформации I). а) Пусть $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$ и $g_{\tilde{A}*}$ – индуцированная нечеткая мера на $\mathcal{B}_*$. Тогда

$$\int_{\tilde{A} \cap E}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot) = \int_E^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ g_{\tilde{A}*}(\cdot) \quad \forall E \in \mathcal{B}_*. \quad (11)$$

б) Пусть $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}^*$ и $g_{\tilde{A}}^*$ – индуцированная верхняя нечеткая мера на $\mathcal{B}^*$. Тогда

$$\int_{\tilde{A} \cup E}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}^*(\cdot) = \int_E^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ g_{\tilde{A}}^*(\cdot) \quad \forall E \in \mathcal{B}^*. \quad (12)$$

Перейдем к обсуждению асимптотических свойств последовательности нечетких множеств в $\mathcal{B}_*$ и $\mathcal{B}^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. а) Пусть $\tilde{A}, \{\tilde{B}_n\} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$, $n = 1, 2, \dots$. Скажем, что

$$\mu_{\tilde{B}_n} \xrightarrow{\text{нижняя}} \mu_{\tilde{B}}$$

на нечетком множестве $\tilde{A}$ относительно расширенной нижней нечеткой меры $\tilde{g}_*$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap \{x \in X \mid |\mu_{\tilde{B}_n}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)| \leq \varepsilon\}) = \tilde{g}_*(\tilde{A}) \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (13)$$

б) Пусть $\tilde{A}, \{\tilde{B}_n\} \in \tilde{\mathcal{B}}^*$, $n = 1, 2, \dots$. Скажем, что

$$\mu_{\tilde{B}_n} \xrightarrow{\text{верхняя}} \mu_{\tilde{B}}$$

на нечетком множестве $\tilde{A}$ относительно верхней нечеткой меры $\tilde{g}^*$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g}^*(\tilde{A} \cup \{x \in X \mid |\mu_{\tilde{B}_n}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)| > \varepsilon\}) = \tilde{g}^*(\tilde{A}) \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (14)$$

Для краткости назовем эти сходимости $\tilde{g}_*$ - и $\tilde{g}^*$ -сходимостями и обозначим их через

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{B}_n} \xrightarrow{\text{нижняя}} \mu_{\tilde{B}} \text{ на } \tilde{A} &\Leftrightarrow \mu_{\tilde{B}_n} \xrightarrow{\tilde{g}_*} \mu_{\tilde{B}} \text{ на } \tilde{A}, \\ \mu_{\tilde{B}_n} \xrightarrow{\text{верхняя}} \mu_{\tilde{B}} \text{ на } \tilde{A} &\Leftrightarrow \mu_{\tilde{B}_n} \xrightarrow{\tilde{g}^*} \mu_{\tilde{B}} \text{ на } \tilde{A}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. а) Пусть $\{E_n\} \in \mathcal{B}_*$, $n = 1, 2, \dots$, любая последовательность такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} g_*(E_n) = 1$. Нижняя нечеткая мера g_* на $\mathcal{B}_*$ называется *нижней самонепрерывной*, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_*(E \cap E_n) = g_*(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}_*.$$

б) Пусть, как и выше, $\{E_n\} \in \mathcal{B}^*$, $n = 1, 2, \dots$, любая последовательность такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} g^*(E_n) = 0$. Верхняя нечеткая мера g^* на $\mathcal{B}^*$ называется *верхней самонепрерывной*, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^*(E \cup E_n) = g^*(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}^*.$$

Нетрудно доказать, что g -сходимость по самонепрерывным экстремальным мерам является двойственной.

ТЕОРЕМА 12. Пусть g_* и g^* – любые экстремальные нечеткие меры.

а) Если $\tilde{A}, \tilde{B}, \{\tilde{B}_n\} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$, $n = 1, 2, \dots$, то

$$\mu_{\tilde{B}_n} \xrightarrow{\tilde{g}_*} \mu_{\tilde{B}} \text{ на } \tilde{A} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{B}_n} \xrightarrow{\tilde{g}^*} \mu_{\tilde{B}} \text{ на } \tilde{A}.$$

б) Мера g_* на $\mathcal{B}_*$ является нижней самонепрерывной мерой тогда и только тогда, когда g^* есть верхняя самонепрерывная мера на $\mathcal{B}^*$.

Из теорем 10–12 легко вытекает справедливость нашего следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 13. а) Пусть $\tilde{B}, \tilde{A}, \{\tilde{B}_n\} \in \tilde{\mathcal{B}}_*, \mu_{\tilde{B}_n} \xrightarrow{\tilde{g}^*} \mu_{\tilde{B}}$ на $\tilde{A}$. Тогда и только тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}_n}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot) = \int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot),$$

когда индуцированная нижняя нечеткая мера $g_{\tilde{A}*}$ на $\mathcal{B}_*$ является нижней само-непрерывной мерой.

б) Пусть $\tilde{B}, \tilde{A}, \{\tilde{B}_n\} \in \tilde{\mathcal{B}}^*, \mu_{\tilde{B}_n} \xrightarrow{\tilde{g}^*} \mu_{\tilde{B}}$ на $\tilde{A}$. Тогда и только тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}_n}(x) \circ \tilde{g}^*(\cdot) = \int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}^*(\cdot),$$

когда индуцированная верхняя нечеткая мера $g_{\tilde{A}}^*$ на $\mathcal{B}^*$ является верхней самонепрерывной мерой.

Введем определения так называемых нижних и верхних гомеоморфных нечетких множеств и используем их в преобразованных экстремальных нечетких мерах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. а) Нечеткое множество $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$ называется *нижним гомеоморфным нечетким множеством*, если функция принадлежности $\mu_{\tilde{B}}: X \rightarrow [0; 1]$ есть биекция и $\forall E \in \mathcal{B}_*, \mu_{\tilde{B}}(E) \in \mathcal{B}_{2*}$.

б) Нечеткое множество $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}^*$ называется *верхним гомеоморфным множеством*, если функция принадлежности $\mu_{\tilde{B}}: X \rightarrow [0; 1]$ есть биекция и $\forall E \in \mathcal{B}^*, \mu_{\tilde{B}}(E) \in \mathcal{B}_{1*}$.

Ясно, что $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$ является нижним гомеоморфным нечетким множеством тогда и только тогда, когда $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}^*$ есть верхнее гомеоморфное множество.

Имеет место следующее предложение.

ТЕОРЕМА 14. Пусть $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$. Тогда

$$g_{2*}^{\tilde{A}\tilde{B}}(C) \triangleq \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap \mu_{\tilde{B}}^{-1}(C)) \quad \forall C \in \mathcal{B}_{2*}, \quad C \equiv [\alpha; +\infty), \quad (15)$$

является нижней нечеткой мерой на нижнем измеримом пространстве $\mathcal{B}_{2*}$ (т.е., на измеримом пространстве Бореля второго рода).

Доказательство данной теоремы не приводится ввиду его элементарности.

ТЕОРЕМА 15. Пусть $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}^*$. Тогда

$$g_{1*}^{\tilde{A}\tilde{B}}(C) \triangleq \tilde{g}^*(\tilde{A} \cup \mu_{\tilde{B}}^{-1}(C)) - \tilde{g}^*(\tilde{A}) \quad \forall C \in \mathcal{B}_{1*}, \quad C \equiv (\alpha; +\infty), \quad (16)$$

является верхней нечеткой мерой на верхнем измеримом пространстве $\mathcal{B}_{1*}^*$ (т.е., на измеримом пространстве Бореля первого рода).

Доказательство этой теоремы также не приводится. Заметим, что экстремальные нечеткие меры (15) и (16) соответственно являются верхней нечеткой мерой на $\mathcal{B}_{2*}^*$ и нижней нечеткой мерой на $\mathcal{B}_{1*}$ и, таким образом,

$$\begin{aligned} g_{2*}^{\tilde{A}\tilde{B}}(C) &= \tilde{g}^*(\tilde{A} \cup \mu_{\tilde{B}}^{-1}(C)) - \tilde{g}^*(\tilde{A}) \quad \forall C \in \mathcal{B}_{2*}^*, \quad \tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_*, \\ g_{1*}^{\tilde{A}\tilde{B}}(C) &= \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap \mu_{\tilde{B}}^{-1}(C)) \quad \forall C \in \mathcal{B}_{1*}^*, \quad \tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}^*. \end{aligned}$$

Итак, мы построили два пространства экстремальных нечетких мер на экстремальных измеримых пространствах Бореля $(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{B}_1^*, \mathcal{B}_{1*})$ и $(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{B}_2^*, \mathcal{B}_{2*})$ соответственно первого и второго рода. Обозначим их через

$$(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{B}_{1*}, \mathcal{B}_1^*, g_{1*}^{\tilde{A}\tilde{B}}, g_1^{\tilde{A}\tilde{B}*}) \quad \text{и} \quad (\mathbb{R}_0^+, \mathcal{B}_{2*}, \mathcal{B}_2^*, g_{2*}^{\tilde{A}\tilde{B}}, g_2^{\tilde{A}\tilde{B}*}).$$

Ясно, что базой введенных экстремальных пространств нечетких мер является экстремальное пространство нечетких мер $(X, \mathcal{B}_*, \mathcal{B}^*, g_*, g^*)$ и пара нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ из $\tilde{\mathcal{B}}_*$ и $\tilde{\mathcal{B}}^*$, соответственно.

Применяя новые понятия, докажем новые теоремы трансформации.

ТЕОРЕМА 16 (теорема трансформации II). а) Пусть $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$ и $\tilde{B}$ – нижнее гомеоморфное нечеткое множество, а $g_{2*}^{\tilde{A}\tilde{B}}$ – нижняя нечеткая мера на $\mathcal{B}_{2*}$, индуцированная элементами $\tilde{A}, \tilde{B}$ и $\tilde{g}_*$. Пусть $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{B}}_{2*}$ – некоторое неотрицательное нечеткое число, где $\mu_{\tilde{a}}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0; 1]$ является его нижней измеримой функцией принадлежности. Тогда

$$\int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{a} \bullet \tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot) = \int_{\mathbb{R}_0^+}^* \mu_{\tilde{a}}(y) \circ g_{2*}^{\tilde{A}\tilde{B}}(\cdot), \quad (17)$$

где $\tilde{a} \bullet \tilde{B}$ представляет собой композицию $\tilde{a}$ и $\tilde{B}$: $\forall x \in X$

$$\mu_{\tilde{a} \bullet \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{a}}(\mu_{\tilde{B}}(x)).$$

б) Пусть $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}^*$, $\tilde{B}$ – верхнее гомеоморфное нечеткое множество, а $g_1^{\tilde{A}\tilde{B}*}$ – верхняя нечеткая мера на $\mathcal{B}_1^*$, индуцированная элементами $\tilde{A}, \tilde{B}$ и $\tilde{g}^*$. Пусть $\tilde{a} \in \mathcal{B}_1^*$ – некоторое неотрицательное нечеткое число, где $\mu_{\tilde{a}}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0; 1]$ является верхней измеримой функцией принадлежности. Тогда

$$\int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{a} \bullet \tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}^*(\cdot) = \int_{\mathbb{R}_0^+}^* \mu_{\tilde{a}}(y) \circ g_1^{\tilde{A}\tilde{B}*}(\cdot), \quad (18)$$

где $\tilde{a} \bullet \tilde{B}$ представляет собой композицию $\tilde{a}$ и $\tilde{B}$: $\forall x \in X$

$$\mu_{\tilde{a} \bullet \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{a}}(\mu_{\tilde{B}}(x)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем только а), поскольку б) доказывается аналогично.

В силу теоремы трансформации I и теоремы 8 (в последней теореме предполагается, что множество интегрирования является нечетким и что нижняя нечеткая мера интегрирования не является расширенной) нам достаточно показать, что

$$\begin{aligned} \int_X^* \mu_{\tilde{a} \bullet \tilde{B}}(x) \circ g_{\tilde{A}*}(\cdot) &= \bigvee_{\langle \tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_{S*}, \tilde{S} \subset \tilde{a} \bullet \tilde{B} \rangle} Q_{*X}(\tilde{S}) = \bigvee_{\langle \tilde{S}_2 \in \tilde{\mathcal{B}}_{2S*}, \tilde{S}_2 \subset \tilde{a} \rangle} Q_{*\mathbb{R}_0^+}(\tilde{S}_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}_0^+}^* \mu_{\tilde{a}}(y) \circ g_{2*}^{\tilde{A}\tilde{B}}(\cdot), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 Q_{*X}(\tilde{S}) &= \bigvee_{i=1}^{m_S} [(1 - \alpha_i) \wedge g_{\tilde{A}*}(E_i)] \quad \text{и} \quad \mu_{\tilde{S}}(x) = \bigwedge_{i=1}^{m_S} (1 - \alpha_i I_{E_i}(x)) \quad \forall x \in X, \\
 \tilde{S} &\in \tilde{\mathcal{B}}_*, \quad \bigcup_{i=1}^{m_S} E_i = X, \quad E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad 0 \leq \alpha_i < 1, \quad i = 1, 2, \dots, m_S, \\
 \tilde{\mathcal{B}}_{S*} &= \{\tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_* \mid \mu_{\tilde{S}} - \text{простая нижняя измеримая функция}\}, \\
 \tilde{\mathcal{B}}_{2S*} &= \{\tilde{S}_2 \in \tilde{\mathcal{B}}_{2*} \mid \mu_{\tilde{S}_2} - \text{простая нижняя измеримая функция}\}, \\
 Q_{*\mathbb{R}_0^+}(\tilde{S}_2) &= \bigvee_{i=1}^{m_{S_2}} [(1 - \beta_i) \wedge g_{2*}^{\tilde{A}\tilde{B}}(B_i)] \quad \text{и} \quad \mu_{\tilde{S}_2}(y) = \bigwedge_{i=1}^{m_{S_2}} (1 - \beta_i I_{B_i}(y)) \quad \forall y \in \mathbb{R}_0^+, \\
 \tilde{S}_2 &\in \tilde{\mathcal{B}}_{2*}, \quad \bigcup_{i=1}^{m_{S_2}} B_i = \mathbb{R}_0^+, \quad B_i \cap B_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad 0 \leq \beta_i < 1, \quad i = 1, 2, \dots, m_{S_2}.
 \end{aligned}$$

Если $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{B}}_{2*}$, $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$, то $\tilde{a} \bullet \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_{2*}$. Если $\tilde{S}_2 \in \tilde{\mathcal{B}}_{2S*}$, то ясно, что если $\tilde{S} \subset \tilde{a} \bullet \tilde{B}$, то $\tilde{S}_2 \subset \tilde{a}$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
 Q_{*X}(\tilde{S}) &= \bigvee_{i=1}^{m_S} [(1 - \alpha_i) \wedge g_{\tilde{A}*}(E_i)] = \bigvee_{i=1}^{m_S} [(1 - \alpha_i) \wedge g_{\tilde{A}*}(\mu_{\tilde{B}}^{-1}(\mu_{\tilde{B}}(E_i)))] \\
 &= \bigvee_{i=1}^{m_S} [(1 - \alpha_i) \wedge g_{2*}^{\tilde{A}\tilde{B}}(\mu_{\tilde{B}}(E_i))] = Q_{*\mathbb{R}_0^+}(\tilde{S}_2) \leq \bigvee_{\langle \tilde{S}_2 \in \tilde{\mathcal{B}}_{2S*}, \tilde{S}_2 \subset \tilde{a} \rangle} Q_{*\mathbb{R}_0^+}(\tilde{S}_2),
 \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\int_{X*} \mu_{\tilde{a} \bullet \tilde{B}}(x) \circ g_{\tilde{A}*}(\cdot) \leq \int_{\mathbb{R}_0^+*} \mu_{\tilde{a}}(y) \circ g_{2*}^{\tilde{A}\tilde{B}}(\cdot).$$

С другой стороны, рассмотрим $\tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_{S*}$ ($\mu_{\tilde{S}}(x) = \bigwedge_{i=1}^{m_S} (1 - \beta_i I_{\mu_{\tilde{B}}^{-1}(B_i)}(x))$) таким образом, что $\tilde{S} \subset \tilde{a} \bullet \tilde{B}$. Имеем

$$\begin{aligned}
 Q_{*\mathbb{R}_0^+}(\tilde{S}_2) &= \bigvee_{i=1}^{m_{S_2}} [(1 - \beta_i) \wedge g_{2*}^{\tilde{A}\tilde{B}}(B_i)] = \bigvee_{i=1}^{m_{S_2}} [(1 - \beta_i) \wedge g_{\tilde{A}*}(\mu_{\tilde{B}}^{-1}(B_i))] \\
 &= Q_{*X}(\tilde{S}) \leq \bigvee_{\langle \tilde{S} \in \tilde{\mathcal{B}}_{S*}, \tilde{S} \subset \tilde{a} \bullet \tilde{B} \rangle} Q_{*X}(\tilde{S}).
 \end{aligned}$$

Здесь мы использовали тот факт, что $\tilde{B}$ является гомеоморфным нечетким множеством в $\mathcal{B}_*$. Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}_0^+*} \mu_{\tilde{a}}(y) \circ g_{2*}^{\tilde{A}\tilde{B}}(\cdot) \leq \int_{X*} \mu_{\tilde{a} \bullet \tilde{B}}(x) \circ g_{\tilde{A}*}(\cdot).$$

Теорема 16 доказана.

Нетрудно доказать следующие предельные свойства расширенных экстремальных нечетких мер.

ТЕОРЕМА 17. *Если $\tilde{g}_*$ и $\tilde{g}^*$ являются экстремальными нечеткими мерами соответственно на $\tilde{\mathcal{B}}_*$ и $\tilde{\mathcal{B}}^*$, то $\forall \alpha \geq 0$ и $\{\alpha_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, $\alpha_n \geq 0$, имеют место следующие предложения:*

- а) если $\alpha_n \uparrow +\infty$, то $\tilde{g}_*(\tilde{A} \cap [\tilde{B}]_{\tilde{\alpha}_n}) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$;
- б) если $\alpha_n \downarrow 0$, то $\tilde{g}^*(\tilde{A} \cup [\tilde{B}]_{\alpha_n}) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}^*$;
- в) если $\alpha_n \uparrow \alpha$, то $\tilde{g}_*(\tilde{A} \cap [\tilde{B}]_{\alpha_n}) \rightarrow \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap [\tilde{B}]_{\tilde{\alpha}})$, $n \rightarrow \infty$, $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$;
- г) если $\alpha_n \downarrow \alpha$, то $\tilde{g}^*(\tilde{A} \cup [\tilde{B}]_{\alpha_n}) \rightarrow \tilde{g}^*(\tilde{A} \cup [\tilde{B}]_{\alpha})$, $n \rightarrow \infty$, $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}^*$.

Доказательство данной теоремы осуществляется, используя нижнюю непрерывность $\tilde{g}_*$ и верхнюю непрерывность $\tilde{g}^*$, а также тот факт, что

$$\lim_{\alpha_n \uparrow \alpha} [\tilde{B}]_{\tilde{\alpha}_n} = [\tilde{B}]_{\tilde{\alpha}}, \quad \tilde{B}_n, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_*, \quad \lim_{\alpha_n \downarrow \alpha} [\tilde{B}]_{\alpha_n} = [\tilde{B}]_{\alpha}, \quad \tilde{B}_n, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}^*.$$

Рассмотрим теорему трансформации для случая экстремальных пространств.

ТЕОРЕМА 18 (теорема трансформации III). а) Пусть $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$ – некоторые нечеткие множества, а L – мера Лебега на $\mathbb{R}_0^+$. Тогда

$$\int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot) = \int_{\mathbb{R}_0^+}^* \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap [\tilde{B}]_{\tilde{\alpha}}) \circ L(\cdot). \quad (19)$$

б) Пусть $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}^*$ – некоторые нечеткие множества, а L – мера Лебега на $\mathbb{R}_0^+$. Тогда

$$\int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}^*(\cdot) = \int_{\mathbb{R}_0^+}^* \tilde{g}^*(\tilde{A} \cup [\tilde{B}]_{\alpha}) \circ L(\cdot). \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем а). Доказательство б) аналогично. Обозначим

$$\mu_{\tilde{h}}(\alpha) = \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap [\tilde{B}]_{\tilde{\alpha}}), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad \mu_{\tilde{h}}(\alpha) \equiv 0, \quad \alpha > 1.$$

Ясно, что $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{B}}_{2*}$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}_0^+}^* \mu_{\tilde{h}}(y) \circ L(\cdot) = \bigvee_{\{\tilde{S}_2 \in \tilde{\mathcal{B}}_{2S*}, \tilde{S}_2 \subset \tilde{h}\}} Q_{*\mathbb{R}_0^+}(\tilde{S}_2) \quad \text{и} \quad Q_{*\mathbb{R}_0^+}(\tilde{S}_2) = \bigvee_{i=1}^{m_{S_2}} [(1 - \beta_i) \wedge L(B_i)],$$

если

$$\mu_{\tilde{S}_2}(y) = \bigwedge_{i=1}^{m_{S_2}} [(1 - \beta_i I_{B_i}(y))], \quad y \geq 0, \quad \bigcup_{i=1}^{m_S} B_i = \mathbb{R}_0^+, \quad B_i \cap B_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Допустим, что $\alpha_0 > 0$ и $0 < \mu_{\tilde{h}}(\alpha_0) < 1$ (ясно, что $0 < \alpha_0 < 1$). Обозначим $\tilde{B}_0 = [\alpha_0; +\infty)$,

$$\mu_{\tilde{S}_0}(y) = \mu_{\tilde{h}}(\alpha_0) I_{\tilde{B}_0}(y) \wedge I_{B_0}(y), \quad \tilde{S}_0 \subseteq \tilde{h},$$

а также

$$\alpha_0 \wedge \mu_{\tilde{h}}(\alpha_0) = L(B_0) \wedge \mu_{\tilde{h}}(\alpha_0) = Q_{*\mathbb{R}_0^+}(\tilde{S}_2) \leq \bigvee_{\{\tilde{S}_2 \in \tilde{\mathcal{B}}_{2S*}, \tilde{S}_2 \subset \tilde{h}\}} Q_{*\mathbb{R}_0^+}(\tilde{S}_2).$$

Отсюда вытекает, что

$$\int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot) = \bigvee_{\alpha \geq 0} [\alpha \wedge \mu_{\tilde{h}}(\alpha)] \leq \int_{\mathbb{R}_0^+}^* \mu_{\tilde{h}}(y) \circ L(\cdot).$$

С другой стороны, $\forall \tilde{S}_2 \in \tilde{\mathcal{B}}_{2S*}, \tilde{S}_2 \subset \tilde{h}$, существует такая $i_0, 1 \leq i_0 \leq m_{S_2}$, что

$$Q_{*\mathbb{R}_0^+}(\tilde{S}_2) = \bigvee_{i=1}^{m_S} [(1 - \beta_i) \wedge L(B_i)] = (1 - \beta_{i_0}) \wedge L(B_{i_0}).$$

Если $1 - \beta_{i_0} \equiv 0$, то

$$Q_{*\mathbb{R}_0^+}(\tilde{S}_2) = 0 \leq \int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ L(\cdot).$$

Если $1 - \beta_{i_0} > 0$, то в силу теоремы 17 $\forall \{\alpha_n\} \uparrow \infty \mu_{\tilde{h}}(\alpha_n) \rightarrow 0$ и $\mu_{\tilde{S}_2}(\alpha_n) \rightarrow 0$. Ясно, что $B_{i_0} \subset [0; 1]$ и является ограниченным множеством. Пусть $1 - \beta$ обозначает максимальный предельный элемент B_{i_0}

$$1 - \beta = \min\{m \mid \forall x \in B_{i_0} \ x \leq m\}.$$

Тогда $B_{i_0} \subseteq [0; 1 - \beta]$ и $L(B_{i_0}) \leq 1 - \beta$. Возьмем $\{1 - r_n\}_n \subset B_{i_0}, n = 1, 2, \dots$, таким образом, что $1 - r_n \uparrow 1 - \beta$. Тогда $1 - \beta_{i_0} = \mu_{\tilde{S}_2}(1 - r_n) \leq \mu_{\tilde{h}}(1 - r_n)$ и

$$Q_{*\mathbb{R}_0^+}(\tilde{S}_2) = (1 - \beta_{i_0}) \wedge L(B_{i_0}) \leq (1 - \beta_{i_0}) \wedge (1 - \beta) \leq \mu_{\tilde{h}}(1 - r_n) \wedge (1 - \beta).$$

Это вытекает из того факта, что $\mu_{\tilde{h}}(1 - r_n) \downarrow \mu_{\tilde{h}}(1 - \beta)$. Следовательно,

$$Q_{*\mathbb{R}_0^+}(\tilde{S}_2) \leq \mu_{\tilde{h}}(1 - \beta) \wedge (1 - \beta) \leq \int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot).$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}_0^+}^* \mu_{\tilde{h}}(y) \circ L(\cdot) = \int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(\cdot) \circ \tilde{g}_*(\cdot).$$

Теорема 18 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вышеуказанная теорема будет носить более общий характер, если вместо меры Лебега L возьмем внутреннюю меру Жордана на $\mathcal{B}_{2*}$, т.е., $\forall \alpha \geq 0$

$$G_*([0; \alpha]) = \bigvee_{\left\langle \begin{smallmatrix} G \subset [0; \alpha] \\ G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0^+) \end{smallmatrix} \right\rangle} m(G), \quad (21)$$

а на $\mathcal{B}_2^*$ возьмем внешнюю меру Жордана G^* , т.е., $\forall \alpha \geq 0$

$$G^*([\alpha; +\infty)) = \bigwedge_{\left\langle \begin{smallmatrix} G \subset [\alpha; +\infty) \\ G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0^+) \end{smallmatrix} \right\rangle} m(G), \quad (22)$$

где $\mathcal{B}(\mathbb{R}_0^+)$ есть σ -алгебра Бореля на $\mathbb{R}_0^+$, а m – некоторая σ -аддитивная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R}_0^+)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. а) Введем на $[0; 1] \cap \mathcal{B}_2^*$ меру возможности [11]: $\forall 0 < \alpha \leq 1$

$$\text{Poss}([0; \alpha)) = \alpha.$$

Тогда $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{B}^*$ имеем

$$\int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}^*(\cdot) = \int_{[0;1]}^* \tilde{g}^*(\tilde{A} \cup [\tilde{B}]_{\alpha}) \circ \text{Poss}(\cdot). \quad (23)$$

б) Введем на $[0; 1] \cap \mathcal{B}_{2*}$ меру необходимости [11]: $\forall 0 < \alpha < 1$

$$\text{Ness}([\alpha; 1)) = 1 - \text{Poss}([0; \alpha)) = 1 - \alpha.$$

Тогда $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{B}_*$ имеем

$$\int_{\tilde{A}}^* \mu_{\tilde{B}}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot) = \int_{[0;1]}^* \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap [\tilde{B}]_{\alpha}) \circ \text{Ness}(\cdot). \quad (24)$$

Продолжим изучение свойств h -расширенных экстремальных нечетких мер.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Предположим, что $(X, \mathcal{B}_*, \mathcal{B}^*, g_*, g^*)$ – некоторое пространство экстремальных нечетких мер.

а) Пусть $h \in \tilde{\mathcal{B}}_*$ – некоторое нечеткое множество. Мера

$$\tilde{g}_{h*}(\tilde{A}) \triangleq \int_{\tilde{A}}^* \mu_h(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot) = \int_h^* \mu_{\tilde{A}}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot) = \int_X^* \mu_{h \cap \tilde{A}}(x) \circ \tilde{g}_*(\cdot) \quad \forall \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}_* \quad (25)$$

называется *нижним расширением* g_* на $\tilde{\mathcal{B}}_*$ относительно h .

б) Пусть $h \in \tilde{\mathcal{B}}^*$ – некоторое нечеткое множество. Мера

$$\tilde{g}_h^*(\tilde{A}) \triangleq \int_{\tilde{A}}^* \mu_h(x) \circ \tilde{g}^*(\cdot) = \int_h^* \mu_{\tilde{A}}(x) \circ \tilde{g}^*(\cdot) = \int_X^* \mu_{h \cup \tilde{A}}(x) \circ \tilde{g}^*(\cdot) \quad \forall \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}^* \quad (26)$$

называется *верхним расширением* g^* на $\tilde{\mathcal{B}}^*$ относительно h .

Не представляет трудности доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 19. а) Связь $\tilde{g}_{A*}$ ($\tilde{g}_h^*$) с расширением $\tilde{g}_*$ ($\tilde{g}^*$) представляется в виде

$$\forall \tilde{A}, h \in \tilde{\mathcal{B}}_* \quad \tilde{g}_{A*}(\tilde{A}) = \tilde{g}_*(\tilde{A} \cap h) \quad (\forall \tilde{A}, h \in \tilde{\mathcal{B}}^* \quad \tilde{g}_h^*(\tilde{A}) = \tilde{g}^*(\tilde{A} \cup h) - \tilde{g}^*(h)).$$

б) если $\tilde{g}_{h*}$ расширение на $\tilde{\mathcal{B}}_*$, то его экстремальная мера на $\tilde{\mathcal{B}}^*$ является расширением $\tilde{g}_h^*$, т.е., $\forall \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$

$$\tilde{g}_{h*}(\tilde{A}) = 1 - \tilde{g}_h^*(\tilde{A}).$$

Пусть даны два пространства экстремальных нечетких мер $(X_1, \mathcal{B}'_*, \mathcal{B}'^*, g'_*, g'^*)$ и $(X_1, \mathcal{B}''_*, \mathcal{B}''^*, g''_*, g''^*)$, а также их соответствующие расширения $(X_1, \tilde{\mathcal{B}}'_*, \tilde{\mathcal{B}}'^*, \tilde{g}'_*, \tilde{g}'^*)$ и $(X_1, \tilde{\mathcal{B}}''_*, \tilde{\mathcal{B}}''^*, \tilde{g}''_*, \tilde{g}''^*)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. а) Пусть $\varphi: \tilde{\mathcal{B}}'_* \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}''_*$ – отображение со следующими свойствами:

- (i) $\varphi(\emptyset) = \emptyset$;
- (ii) если $\tilde{A} \subset \tilde{B}$, $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}'_*$, то $\varphi(\tilde{A}) \subset \varphi(\tilde{B})$;
- (iii) если $\{\tilde{A}_n\} \in \tilde{\mathcal{B}}'_*$, $n = 1, 2, \dots$, $\tilde{A}_n \downarrow \tilde{A}$, то $\varphi(\tilde{A}_n) \downarrow \varphi(\tilde{A})$.

Тогда φ называется *нижним гомеоморфизмом с сохранением 0–1*.

б) Пусть $\varphi: \tilde{\mathcal{B}}'^* \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}''^*$ – отображение со следующими свойствами:

- (i) $\varphi(\emptyset) = \emptyset$;
- (ii) если $\tilde{A} \subset \tilde{B}$, $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}'^*$, то $\varphi(\tilde{A}) \subset \varphi(\tilde{B})$;
- (iii) если $\{\tilde{A}_n\} \in \tilde{\mathcal{B}}'^*$, $n = 1, 2, \dots$, $\tilde{A}_n \uparrow \tilde{A}$, то $\varphi(\tilde{A}_n) \uparrow \varphi(\tilde{A})$.

Тогда φ называется *верхним гомеоморфизмом с сохранением 0–1*.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20. Пусть $\varphi: \tilde{\mathcal{B}}'_* \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}''_*$ – нижний гомеоморфизм с сохранением 0–1. Тогда расширенная мера на $\tilde{\mathcal{B}}'_*$ относительно некоторого нечеткого множества $h \in \tilde{\mathcal{B}}''_*$

$$\forall \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}'_* \quad \tilde{g}_{h*}'^{\varphi}(\tilde{A}) \triangleq \int_{\varphi(\tilde{A})}^* \mu_{\tilde{h}}(y) \circ g''(\cdot) = \tilde{g}_{h*}''(\varphi(\tilde{A})) \quad (27)$$

есть нижняя нечеткая мера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся, что имеют место свойства нижней нечеткой меры:

(i) имеем

$$\tilde{g}_{h*}'^{\varphi}(\emptyset) = \int_{\emptyset}^* \mu_{\tilde{h}}(y) \circ g''(\cdot) \equiv 0;$$

(ii) если $\tilde{A} \subset \tilde{B}$, $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}'_*$, то

$$\tilde{g}_{h*}'^{\varphi}(\tilde{A}) = \int_{\varphi(\tilde{A})}^* \mu_h(y) \circ g''(\cdot) \leq \int_{\varphi(\tilde{B})}^* \mu_h(y) \circ g''(\cdot) = \tilde{g}_{h*}'^{\varphi}(\tilde{B}),$$

так как $\varphi(\tilde{A}) \subset \varphi(\tilde{B})$ и нижний нечеткий интеграл Суджено монотонно возрастает относительно области определения интеграла;

(iii) если $\{\tilde{A}_n\} \in \tilde{\mathcal{B}}'_*$, $n = 1, 2, \dots$, $\tilde{A}_n \downarrow \tilde{A}$, то

$$\tilde{g}_{h*}'^{\varphi}(\tilde{A}_n) = \int_{\varphi(\tilde{A}_n)}^* \mu_h(y) \circ g''(\cdot) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\varphi(\tilde{A})}^* \mu_h(y) \circ g''(\cdot) = \tilde{g}_{h*}'^{\varphi}(\tilde{A}),$$

так как $\varphi(\tilde{A}_n) \downarrow \varphi(\tilde{A})$ и нижний нечеткий интеграл Суджено непрерывен.

Аналогично докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 21. Пусть $\varphi: \tilde{\mathcal{B}}'^* \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}''^*$ – верхний гомеоморфизм с сохранением 0–1. Тогда расширенная мера на $\tilde{\mathcal{B}}'^*$ относительно некоторого нечеткого множества $h \in \tilde{\mathcal{B}}''^*$

$$\forall \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}'^* \quad \tilde{g}_{h*}'^{\varphi}(\tilde{A}) \triangleq \int_{\varphi(\tilde{A})}^* \mu_h(y) \circ \tilde{g}''^*(\cdot) \equiv \tilde{g}_{h*}''(\varphi(\tilde{A})) \quad (28)$$

есть верхняя нечеткая мера.

Нетрудно проверить, что $\tilde{g}_{h*}'^{\varphi}$ и $\tilde{g}_h'^{\varphi*}$ являются экстремальными мерами соответственно на $\tilde{\mathcal{B}}_*$ и $\tilde{\mathcal{B}}'^*$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}'^* \quad \bar{\varphi}(\tilde{A}) = \overline{\varphi(\tilde{A})} \in \tilde{\mathcal{B}}''^*.$$

Рассмотрим теорему трансформации, связывающую два пространства экстремальных нечетких мер.

ТЕОРЕМА 22 (теорема трансформации IV). а) Пусть $\varphi: \tilde{\mathcal{B}}_*' \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_*''$ – нижний гомеоморфизм с сохранением 0–1. Тогда $\forall \tilde{E} \in \tilde{\mathcal{B}}_*'$, $\forall \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}_*'$, $\forall h \in \tilde{\mathcal{B}}_*''$ справедливо следующее представление:

$$\int_{\tilde{E}}^* \mu_{\tilde{A}}(x) \circ \tilde{g}_{h*}'^{\varphi}(\cdot) = \bigvee_{0 \leq \gamma \leq 1} \{ \gamma \wedge g_*''([h]_{\bar{\gamma}} \cap [\varphi([\tilde{A}]_{\bar{\gamma}} \cap [\tilde{E}]_{\bar{\gamma}})]_{\bar{\gamma}}) \}. \quad (29)$$

б) Пусть $\varphi: \tilde{\mathcal{B}}'^* \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}''^*$ – верхний гомеоморфизм с сохранением 0–1. Тогда $\forall \tilde{E} \in \tilde{\mathcal{B}}'^*$, $\forall \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}'^*$, $\forall h \in \tilde{\mathcal{B}}''^*$ справедливо следующее представление:

$$\int_{\tilde{E}}^* \mu_{\tilde{A}}(x) \circ \tilde{g}_h'^{\varphi*}(\cdot) = \bigwedge_{0 \leq \gamma \leq 1} \{ \gamma \vee g_*''([h]_{\gamma} \cup [\varphi([\tilde{A}]_{\gamma} \cup [\tilde{E}]_{\gamma})]_{\gamma} \}. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем а), доказательство б) аналогично.

Применяя свойства расширенного нижнего нечеткого интеграла Суджено относительно расширенной нижней нечеткой меры $\tilde{g}_{h*}'^{\varphi}$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{E}}^* \mu_{\tilde{A}}(x) \circ \tilde{g}_{h*}'^{\varphi}(\cdot) &= \bigvee_{0 \leq \alpha \leq 1} \{ \alpha \wedge \tilde{g}_{h*}'^{\varphi}(\tilde{E} \cap [\tilde{A}]_{\bar{\alpha}}) \} = \bigvee_{0 \leq \alpha \leq 1} \left\{ \alpha \wedge \bigvee_{\varphi(\tilde{E} \cap [\tilde{A}]_{\bar{\alpha}})} \mu_h(y) \circ \tilde{g}_*''(\cdot) \right\} \\ &= \bigvee_{0 \leq \alpha \leq 1} \left\{ \alpha \wedge \left(\bigvee_{0 \leq \beta \leq 1} [\beta \wedge \tilde{g}_*''(\varphi(\tilde{E} \cap [\tilde{A}]_{\bar{\alpha}}) \cap [h]_{\bar{\beta}})] \right) \right\} \\ &= \bigvee_{\substack{\gamma = \alpha \wedge \beta \\ 0 \leq \alpha, \beta \leq 1}} \{ \gamma \wedge \tilde{g}_*''(\varphi(\tilde{E} \cap [\tilde{A}]_{\bar{\alpha}}) \cap [h]_{\bar{\beta}}) \} \\ &= \bigvee_{0 \leq \gamma \leq 1} \{ \gamma \wedge \tilde{g}_*''(\varphi(\tilde{E} \cap [\tilde{A}]_{\bar{\gamma}}) \cap [h]_{\bar{\gamma}}) \} \\ &= \bigvee_{0 \leq \gamma \leq 1} \{ \gamma \wedge g_*''([\varphi([\tilde{E}]_{\bar{\gamma}} \cap [\tilde{A}]_{\bar{\gamma}})]_{\bar{\gamma}} \cap [h]_{\bar{\gamma}}) \}, \end{aligned}$$

так как $\varphi(\tilde{E} \cap [\tilde{A}]_{\bar{\alpha}}) \subseteq \varphi(\tilde{E} \cap [\tilde{A}]_{\bar{\gamma}})$, $[h]_{\bar{\beta}} \subseteq [h]_{\bar{\gamma}}$ и, следовательно,

$$\tilde{g}_*''(\varphi(\tilde{E} \cap [\tilde{A}]_{\bar{\alpha}}) \cap [h]_{\bar{\beta}}) \leq \tilde{g}_*''(\varphi(\tilde{E} \cap [\tilde{A}]_{\bar{\gamma}}) \cap [h]_{\bar{\gamma}}).$$

Теорема 22 доказана.

Нетрудно доказать следующие свойства расширенных экстремальных нечетких интегралов Суджено относительно расширенных нечетких мер $\tilde{g}_{h*}$ и $\tilde{g}_h^*$.

ТЕОРЕМА 23. Пусть $(X, \mathcal{B}_*, \mathcal{B}^*, g_*, g^*)$ – некоторое пространство экстремальных нечетких мер. Тогда

а) если $h \in \tilde{\mathcal{B}}_*$, $a \in [0; 1]$, то

$$\bigwedge_{X^*} a \circ \tilde{g}_{h*}(\cdot) = a \wedge \tilde{g}_{h*}(X); \quad (31)$$

б) если $h \in \tilde{\mathcal{B}}^*$, $a \in [0; 1]$, то

$$\bigvee_X^* a \circ \tilde{g}_{h*}(\cdot) = a \vee \tilde{g}_h^*(X); \quad (32)$$

в) если $h, \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$ и $a \in [0; 1]$, то

$$\bigwedge_{X^*} [a \wedge \mu_{\tilde{A}}(x)] \circ \tilde{g}_{h*}(\cdot) = a \wedge \bigwedge_{X^*} \mu_{\tilde{A}}(x) \circ \tilde{g}_{h*}(\cdot); \quad (33)$$

г) если $h, \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}^*$ и $a \in [0; 1]$, то

$$\bigvee_X^* [a \vee \mu_{\tilde{A}}(x)] \circ \tilde{g}_h^*(\cdot) = \left\{ a \vee \bigvee_X^* \mu_{\tilde{A}}(x) \circ \tilde{g}_h^*(\cdot) \right\} \wedge \tilde{g}_h^*(X). \quad (34)$$

Докажем следующие предельные свойства.

ТЕОРЕМА 24. а) Пусть $\tilde{g}_{h*}$ – самонепрерывная нижняя нечеткая мера на $\tilde{\mathcal{B}}_*$; $\{\tilde{A}\}_n \in \tilde{\mathcal{B}}_*$, $n = 1, 2, \dots$, – такая последовательность нечетких множеств, что $\tilde{A}_n \downarrow \tilde{A}$; $\{a_n\}_{n \geq 1}$, и $a_n \in [0; 1]$ – такая монотонно невозрастающая последовательность, что $a_n \downarrow a$. Тогда

$$\begin{aligned} \bigwedge_{X^*} \bigwedge_{n=1}^{\infty} [a_n \vee \mu_{\tilde{A}_n}(x)] \circ \tilde{g}_{h*}(\cdot) &= \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{X^*} [a_n \vee \mu_{\tilde{A}_n}(x)] \circ \tilde{g}_{h*}(\cdot) \\ &= \bigwedge_{X^*} [a \vee \mu_{\tilde{A}}(x)] \circ \tilde{g}_{h*}(\cdot). \end{aligned} \quad (35)$$

б) Пусть $\tilde{g}_h^*$ – самонепрерывная верхняя нечеткая мера на $\tilde{\mathcal{B}}^*$; $\{\tilde{A}_n\}_n \in \tilde{\mathcal{B}}^*$, $n = 1, 2, \dots$, – такая последовательность нечетких множеств, что $\tilde{A}_n \uparrow \tilde{A}$, и $\{a_n\}_{n \geq 1}$ – такая монотонно неубывающая последовательность ($0 \leq a_n \leq 1$), что $a_n \uparrow a$. Тогда

$$\begin{aligned} \bigvee_X^* \bigvee_{n=1}^{\infty} [a_n \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x)] \circ \tilde{g}_h^*(\cdot) &= \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigvee_X^* [a_n \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x)] \circ \tilde{g}_h^*(\cdot) \\ &= \bigvee_X^* [a \wedge \mu_{\tilde{A}}(x)] \circ \tilde{g}_h^*(\cdot). \end{aligned} \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем часть а). Доказательство части б) аналогично.

Пусть $\tilde{g}_{h*}$ – самонепрерывная нижняя расширенная нечеткая мера на $\tilde{\mathcal{B}}_*$ (где h есть некоторое нечеткое множество из $\tilde{\mathcal{B}}_*$). Рассмотрим $\forall \{A_n\} \in \tilde{\mathcal{B}}_*$, $n = 1, 2, \dots$, таким образом, что $\tilde{A}_n \downarrow A$, и $\forall \{a_n\} \in [0; 1]$ $a_n \downarrow a$, $0 \leq a \leq 1$.

Заметим, что $a_n \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x)$ является нижней измеримой функцией, так как

$$\begin{aligned} \{x \in X \mid a_n \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x) \geq \alpha\} &= \begin{cases} X, & \text{если } \alpha \leq a, \\ [\tilde{A}]_{\tilde{\alpha}}, & \text{если } \alpha > a, \end{cases} \in \mathcal{B}_*, \\ \{x \in X \mid a_n \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x) < \alpha\} &= \begin{cases} \emptyset, & \text{если } \alpha \leq a, \\ [\tilde{A}]_{1-\alpha}, & \text{если } \alpha > a, \end{cases} \in \mathcal{B}^*. \end{aligned}$$

Зная, что $a_n \vee \mu_{\tilde{A}_n}(x) \geq a_{n+1} \vee \mu_{\tilde{A}_{n+1}}(x)$, функция $\mu_N(x) = \bigwedge_{n=1}^N [a_n \vee \mu_{\tilde{A}_n}(x)]$ и, соответственно, ее предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_N(x) = \bigwedge_{n=1}^{\infty} [a_n \vee \mu_{\tilde{A}_n}(x)] = a \vee \mu_{\tilde{A}}(x)$$

будет нижним измеримым. Тогда

$$\mu_N(x) \xrightarrow{g_*} a \vee \mu_{\tilde{A}}(x).$$

Поскольку $\tilde{g}_{h*}$ является самонепрерывной нижней мерой на $\tilde{\mathcal{B}}_*$, то индуцированная нижняя нечеткая мера g_{h*} будет самонепрерывной на $\mathcal{B}_*$:

$$\forall B \in \mathcal{B}_* \quad g_{h \cap X}^*(B) = g_{h*}(X \cap B) = g_{h*}(B),$$

где $\tilde{g}_{h*}$ есть расширение g_{h*} на $\tilde{\mathcal{B}}_*$, обеспечивающее выполнение всех условий для части а) теоремы 13, т.е.,

$$\int_{X_*}^* \mu_N(x) \circ \tilde{g}_{h*}(\cdot) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{X_*}^* [a \vee \mu_{\tilde{A}}(x)] \circ \tilde{g}_{h*}(\cdot).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \bigwedge_{n=1}^{\infty} \int_{X_*}^* [a_n \mu_{\tilde{A}_n}(x)] \circ \tilde{g}_{h*}(\cdot) &= \bigwedge_{n=1}^{\infty} \left[a_n \vee \int_{X_*}^* \mu_{\tilde{A}_n}(x) \circ \tilde{g}_{h*}(\cdot) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a_n \vee \int_{X_*}^* \mu_{\tilde{A}_n}(x) \circ \tilde{g}_{h*}(\cdot) \right] \\ &= a \vee \int_{X_*}^* \mu_{\tilde{A}}(x) \circ \tilde{g}_{h*}(\cdot) = \int_{X_*}^* [a \vee \mu_{\tilde{A}}(x)] \circ \tilde{g}_{h*}(\cdot). \end{aligned}$$

Теорема 24 доказана.

В заключение нашего анализа пространств расширенных экстремальных нечетких мер сделаем следующие краткие выводы:

- 1) с помощью введенного понятия экстремальной измеримости функции построено пространство экстремальных нечетких мер;

- 2) исследованы основные свойства экстремальных нечетких мер и их расширения (теоремы 3–10, 12–15);
- 3) в ходе рассмотрения экстремальных нечетких мер доказаны четыре теоремы трансформации (теоремы 11, 16, 18, 22) для расширенных экстремальных интегралов Суджено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Delgado, S. Moral, “Upper and lower fuzzy measures”, *Fuzzy Sets and Systems*, **33**:2 (1989), 191–200.
- [2] *Fuzzy Measures and Integrals. Theory and Applications*, Stud. Fuzziness Soft Comput., **40**, eds. M. Grabish, T. Murofushi, M. Sugeno, Physica-Verlag, Heidelberg, 2000.
- [3] T. Murofushi, M. Sugeno, “An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure”, *Fuzzy Sets and Systems*, **29**:2 (1989), 201–227.
- [4] T. Murofushi, M. Sugeno, “Fuzzy measures and integrals”, *Fuzzy Measures and Integrals*, Physica-Verlag, Heidelberg, 1999, 3–41.
- [5] G. Sirbiladze, A. Sikharulidze, “Weighted fuzzy averages in fuzzy environment: Part I. Insufficient expert data and fuzzy averages”, *Internat. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Systems*, **2**:2 (2003), 139–157; “Weighted fuzzy averages in fuzzy environment: Part II. Generalized weighted fuzzy expected values in fuzzy environments”, *Internat. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Systems*, **2**:2 (2003), 159–172.
- [6] G. Sirbiladze, N. Zaporozhets, “About two probability representations of fuzzy measures on a finite set”, *J. Fuzzy Math.*, **11**:3 (2003), 549–565.
- [7] M. Sugeno, *Theory of Fuzzy Integrals and its Applications*, Thesis, Tokyo Institute of Technology, 1979.
- [8] M. Grabisch, “Fuzzy integral in multicriteria decision making”, *Fuzzy Sets and Systems*, **69**:3 (1995), 279–298.
- [9] Z. Wang, G. J. Klir, *Fuzzy Measure Theory*, Plenum Press, New York, 1992.
- [10] G. J. Klir, Z. Wang, D. Harmanec, “Construction of fuzzy measures in expert systems”, *Fuzzy Sets and Systems*, **92**:2 (1997), 251–264.
- [11] D. Dubois, H. Prade, *Possibility Theory. An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*, Plenum Press, New York, 1988.

Г. Г. Сирбиладзе

Институт компьютерных наук,
Тбилисский государственный университет
им. И. Джавахишвили
E-mail: gsirbiladze@tsu.ge

Поступило
12.05.2004