Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Э. Ахмедов, Асимптотическое поведение полуклассических совместно-ортогональных многочленов типа Бесселя–Лагерра, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 3, 461–464

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4529>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:29:43

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Асимптотическое поведение полуклассических совместно-ортогональных многочленов типа Бесселя–Лагерра

Р. Э. Ахмедов

Многочлены степени $2n$, определяемые с помощью формулы Родрига

$$Q_{2n}(x) = e^{-\alpha/x} e^{-\beta x} \frac{d^n}{dx^n} [x^{2n} e^{\alpha/x} e^{\beta x}], \quad (1)$$

называются *полуклассическими многочленами совместной ортогональности Бесселя–Лагерра* (см. [1], [2]). Для многочленов (1) имеют место соотношения ортогональности

$$\int_{\gamma_j} Q_{2n}(x) x^m w(x) dx = 0, \quad m = 0, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

с весовой функцией

$$w(x) = \exp \left\{ \frac{\alpha}{x} + \beta x \right\}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

заданной на двух контурах в $\mathbb{C}$: $\gamma_1 = (-\infty, 0)$ и γ_2 – простой замкнутый контур, имеющий начало и конец в нуле, причем $\Re(\alpha/x) < 0$, $x \in \gamma_2$, в окрестности нуля.

Впервые задача об асимптотическом поведении многочленов совместной ортогональности рассматривалась в работе [3] (многочлены Якоби–Якоби).

В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение масштабированных многочленов

$$Q_{2n}^*(x) = Q_{2n}(nx), \quad (3a)$$

$$\tilde{Q}_{2n}(x) = Q_{2n}\left(\frac{x}{n}\right), \quad (3b)$$

дающих картину распределения нулей. Как следует из наших результатов, n нулей многочлена Q_{2n}^* стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, а остальные n нулей заполняют отрезок, отделенный от нуля; у многочленов $\tilde{Q}_{2n}$ n нулей “уходят” на бесконечность, а остальные нули распределены на кривой типа Сеге, в точности как у классических многочленов Бесселя.

Формулы сильной асимптотики (теорема 1, теорема 2) могут быть доказаны при помощи метода перевала [4]. Применение теории потенциала [5] дает возможность найти меры распределения нулей (равновесные меры) для многочленов (3a), (3b) (следствия 1, 2).

Для формулировки асимптотических формул введем функции

$$p_\beta(t) = \log \frac{t-x}{t^2 e^{\beta(t-x)}}, \quad p_\alpha(t) = \log \frac{t-x}{t^2 e^{\alpha/t - \alpha/x}}. \quad (4)$$

Многочлены $Q_{2n}^*(x)$. Положим

$$t_j = t_j(x) = \frac{\beta x - 1}{2\beta} \pm \frac{1}{2\beta} \sqrt{\beta^2 x^2 + 6\beta x + 1}, \quad j = 1, 2, \quad (5)$$

т.е. t_j — нули производной $p'_\beta(t)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Delta := [(-3 - \sqrt{8})/\beta, (-3 + \sqrt{8})/\beta]$, $\beta > 0$. Для многочленов (3a) справедливы следующие асимптотические формулы:

$$Q_{2n}^*(x) = \frac{1}{(2\beta)^n \sqrt{\pi n}} A_1(t_1) (\beta^2 x^2 + 4\beta x - 1 + (\beta x + 1)\sqrt{D})^n \times \exp \left\{ \left(\frac{-\beta x - 1 + \sqrt{D}}{2} \right) n \right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (6)$$

равномерно по x на компактных подмножествах области $G = \mathbb{C} \setminus (\Delta \cup \{0\})$;

$$Q_{2n}^*(x) = \frac{1}{(2\beta)^n \sqrt{\pi n}} \left(A_1(t_1) (\beta^2 x^2 + 4\beta x - 1 + (\beta x + 1)\sqrt{D})^n \exp \left\{ \left(\frac{-\beta x - 1 + \sqrt{D}}{2} \right) n \right\} + A_1(t_2) (\beta^2 x^2 + 4\beta x - 1 - (\beta x + 1)\sqrt{D})^n \exp \left\{ \left(\frac{-\beta x - 1 - \sqrt{D}}{2} \right) n \right\} \right) \times \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (7)$$

равномерно по x на компактных подмножествах Δ .

Здесь $D = \beta^2 x^2 + 6\beta x + 1$, t_j определены в (5), $A_1(t)$ — некоторая функция, аналитическая в окрестности точки t_j , и везде в формулах (6), (7) выбрана главная ветвь функции $\sqrt{D}$.

Главный член асимптотического разложения (6), (7) позволяет найти меру распределения нулей многочленов (3a), $d\mu(x)$.

Пусть $\{x_{j,n}\}_{j=1}^{2n}$ — последовательность нулей многочлена $Q_{2n}^*(x)$. Положим

$$Q_{n,1}(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ x_{j,n} \in \Delta}}^{2n} (x - x_{j,n}), \quad \nu_{n,1} = \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ x_{j,n} \in \Delta}}^{2n} \delta(x - x_{j,n}). \quad (8)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Последовательность мер $\nu_{n,1}$, считающих нули многочленов $Q_{n,1}(x)$ в (8), при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере $\mu(x)$, имеющей плотность

$$d\mu(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{(\beta x - \delta_-)(\delta_+ - \beta x)}}{x} dx, \quad \delta_{\pm} = -3 \pm \sqrt{8}.$$

Мера μ является равновесной во внешнем поле заряда, сосредоточенного в нуле, и поле $-\Re(\beta x)$. Потенциал меры μ удовлетворяет условию равновесия

$$2V_\mu(x) - \Re(\beta x) + \ln \frac{1}{|x|} = w, \quad x \in \Delta.$$

Многочлены $\tilde{Q}_{2n}(x)$. Критические точки функции $p_\alpha(t)$ (см. (4)) даются выражениями

$$\tilde{t}_j = \frac{\alpha + 2x \pm \sqrt{\alpha^2 + 4x^2}}{2}, \quad j = 1, 2. \quad (9)$$

Нас будет интересовать множество

$$\{x : \Re\{p_\alpha(\tilde{t}_1)\} = \Re\{p_\alpha(\tilde{t}_2)\}\}.$$

Этому множеству принадлежит дуга $\tilde{L}$, имеющая параметрическое представление

$$\tilde{L} = \left\{ x : \alpha^2 = 4x^2(\delta^2 - 1), \frac{(\delta \operatorname{sh} \delta - \operatorname{ch} \delta)^2}{1 - \delta^2} = \theta \in [0, 1], \Re(x) > 0 \right\}, \quad (10)$$

$\tilde{L}$ – аналитическая дуга, лежащая в правой полуплоскости и соединяющая точки $-(\alpha/2)i$ и $(\alpha/2)i$.

ТЕОРЕМА 2. Для многочленов (3b) справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} B_1(\tilde{t}_1) (2x + \sqrt{\alpha^2 + 4x^2})^n \\ \times \exp \left\{ \left(\frac{2x - \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4x^2}}{2x} \right) n \right\} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\}, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (11)$$

равномерно по x на компактных подмножествах области $\tilde{G} = \mathbb{C} \setminus \tilde{L}$;

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(B_1(\tilde{t}_1) (2x + \sqrt{\alpha^2 + 4x^2})^n \exp \left\{ \left(\frac{2x - \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4x^2}}{2x} \right) n \right\} \right. \\ \left. + B_1(\tilde{t}_2) (2x - \sqrt{\alpha^2 + 4x^2})^n \exp \left\{ \left(\frac{2x - \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4x^2}}{2x} \right) n \right\} \right) \\ \times \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\}, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (12)$$

равномерно по x на компактных подмножествах кривой $\tilde{L}$.

Здесь $\tilde{t}_j$ определены в (9), $B_1(t)$ – функция, аналитическая в окрестности точки $\tilde{t}_j$, $\tilde{L}$ задана параметризацией (10), и везде в формулах (11), (12) выбраны главные ветви многозначных функций.

Для определения равновесной меры ν снова положим

$$\tilde{Q}_{n,1}(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ \{\Re(x_{j,n}) > 0\}}}^{2n} (x - x_{j,n}), \quad \tilde{\nu}_{n,1} = \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ \{\Re(x_{j,n}) > 0\}}}^{2n} \delta(x - x_{j,n}), \quad (13)$$

где $\{x_{j,n}\}_{j=1}^{2n}$ – нули $\tilde{Q}_{2n}(x)$; нули многочленов $\tilde{Q}_{n,1}(x)$ распределены (в пределе при $n \rightarrow \infty$) на кривой $\tilde{L}$. Условие равновесия для потенциала меры ν в этом случае имеет вид

$$W_\nu(x) = 2V_\nu(x) - \Re \frac{\alpha}{x} = w, \quad x \in \tilde{L}. \quad (14)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Последовательность мер $\tilde{\nu}_{n,1}$, считающих нули многочленов $\tilde{Q}_{n,1}(x)$ в (13), при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере $\nu(x)$, которая является равновесной мерой на $\tilde{L}$ во внешнем поле $-\Re(\alpha/x)$, удовлетворяющей условию равновесия (14). При этом кривая $\tilde{L}$ обладает S -свойством:

$$\frac{\partial}{\partial n_+} W_\nu(x) = \frac{\partial}{\partial n_-} W_\nu(x), \quad x \in \tilde{L},$$

где $\partial/\partial n_+$ и $\partial/\partial n_-$ – производные по нормали справа и слева от кривой $\tilde{L}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. I. Aptekarev, F. Marcellan, I. A. Rocha, *J. Approx. Theory*, **90**:1 (1997), 117–146.
[2] В. Н. Сорокин, Труды сем. им. И. Г. Петровского, **11**, Изд-во МГУ, М., 1986, 125–165.
[3] В. А. Калягин, *Матем. сб.*, **110**:4 (1979), 609–627. [4] Г. Сеге, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962. [5] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988.

Р. Э. Ахмедов

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: a-ruslan1@mail.ru

Поступило
05.03.2007