Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов, Сингулярно возмущенные нелинейные интегро-дифференциальные системы с быстро изменяющимися ядрами, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 5, 654–664

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm453>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 18:21:40

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С БЫСТРО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ЯДРАМИ

А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов

Рассматриваются нелинейные сингулярно возмущенные интегро-дифференциальные уравнения с быстро изменяющимися ядрами. Предполагается, что спектр предельного оператора лежит в замкнутой левой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Разрабатывается алгоритм, позволяющий получать регуляризованные (по С. А. Ломову) асимптотические решения как в нерезонансном, так и в резонансном случае. При развитии алгоритма существенно используется аппарат регуляризации интегральных операторов с быстро изменяющимися ядрами, разработанный ранее авторами для линейных интегральных и интегро-дифференциальных систем. Обоснование алгоритма и доказательство существования решения исходной нелинейной задачи проводится с помощью метода Ньютона для операторных уравнений.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Интегро-дифференциальным сингулярно возмущенным системам посвящено много работ (см., например, [1], [2]). В этих работах подробно обсуждаются различные случаи асимптотического поведения решений этих систем (при стремлении малого параметра к нулю) и предлагаются соответствующие алгоритмы построения асимптотических решений. В зависимости от поведения спектра предельного оператора применим тот или иной алгоритм. Если точки спектра лежат в открытой левой полуплоскости, то используется, как правило, метод пограничных функций Васильевой–Бутузова [3], модифицированный применительно к интегро-дифференциальным уравнениям М. И. Иманалиевым [2]. Если точки спектра при некоторых значениях независимой переменной попадают на мнимую ось, то асимптотический анализ интегро-дифференциальных уравнений методом погранфункций становится невозможным. В этом случае прибегают к другим методам, например, к методу регуляризации Ломова [1]. Однако этот метод применялся в основном к линейным задачам с медленно изменяющимися коэффициентами. В настоящей работе рассматриваются нелинейные системы вида

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dt} &= A(t)y + \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta\right) K(t, s)y(s, \varepsilon) ds + \varepsilon f(y, t) + h(t), \\ y(0, \varepsilon) &= y^0, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (1)$$

с быстро изменяющимися ядрами. Здесь скалярная функция $\mu(t)$, называемая *спектральным значением ядра интегрального оператора*, может не обращаться в нуль

на отрезке $[0, T]$. Она индуцирует в решении задачи (1) дополнительные быстро изменяющиеся компоненты. Даже в случае медленно изменяющихся ядер ($\mu(t) \equiv 0$) задача (1) при наличии чисто мнимых точек спектра $\{\lambda_j(t)\}$ оператора $A(t)$ представляет определенный интерес, так как в цитированных выше работах она не рассматривалась. Здесь впервые предпринимается такая попытка. При этом предполагается, что $\mu(t) \neq 0 \forall t \in [0, T]$. Однако развиваемый ниже алгоритм очевидным образом модифицируется на случай $\mu(t) \equiv 0$.

2. Регуляризация задачи (1). Уточним условия, при которых будет рассматриваться система (1). Будем предполагать, что

- 1) $\lambda_{n+1} \equiv \mu(t) \in C^\infty[0, T]$, $K(t, s) \in C^\infty(0 \leq s \leq t \leq T, \mathbb{C}^{n^2})$, $h(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^n)$, $A(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^{n^2})$, $f(y, t)$ – многочлен по y ,

$$f(y, t) = \sum_{0 \leq |m| \leq l} f^{(m)}(t) y^{(m)}$$

с коэффициентами $f^{(m)}(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^n)$, $0 \leq |m| \leq l < \infty$;

- 2) $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, $i \neq j$, $\lambda_i(t) \neq 0$ ($\forall t \in [0, T]$, $i, j = 1, \dots, n+1$);
- 3) $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \leq 0$, $\operatorname{Re} \lambda_{n+1}(t) < 0$ ($\forall t \in [0, T]$, $i = 1, \dots, n$);
- 4) равенство $(m, \lambda(t)) \equiv m_1 \lambda_1(t) + \dots + m_{n+1} \lambda_{n+1}(t) = \lambda_j(t)$ (при $|m| \geq 2$ и $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$) либо не имеет места ни при каком $t \in [0, T]$, либо выполняется при всех $t \in [0, T]$.

Следуя методу Ломова [1], вводим регуляризующие функции

$$\tau_j = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(s) ds \equiv \frac{\psi(t)}{\varepsilon}, \quad j = 1, \dots, n+1. \quad (2)$$

Для функции $\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon)$, удовлетворяющей условию

$$\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon)|_{\tau=\psi/\varepsilon} \equiv y(t, \tau, \varepsilon), \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_{n+1}), \quad \psi = (\psi_1, \dots, \psi_{n+1}),$$

где $y(t, \varepsilon)$ – решение системы (1), получим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(t) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau_j} &= A(t) \tilde{y} + \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta\right) K(t, s) \tilde{y}\left(s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon\right) ds \\ &+ \varepsilon f(\tilde{y}, t) + h(t), \quad \tilde{y}(0, 0, \varepsilon) = y^0. \end{aligned} \quad (3)$$

Однако в (3) не произведена регуляризация интегрального члена

$$I\tilde{y}(t, \varepsilon) = \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta\right) K(t, s) \tilde{y}\left(s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon\right) ds. \quad (4)$$

Для этой цели необходимо ввести класс M_ε , асимптотически инвариантный (при $\varepsilon \rightarrow +0$) относительно оператора I (см. [1, с. 62]). В линейном случае ($f(y, t) \equiv 0$) в качестве такого класса выступает пространство вектор-функций, “натянутых” на единицу и экспоненты $\exp(\psi_j(t)/\varepsilon)$, порождаемые спектром $\{\lambda_j(t)\}$ предельного оператора $A(t)$. В нелинейном случае это пространство должно быть существенно расширено, так как нелинейность $f(y, t)$ индуцирует в решениях сингулярно возмущенных задач экспоненты $\exp(\frac{1}{\varepsilon}(m, \lambda(t)))$ измерения $|m| \equiv m_1 + \dots + m_{n+1}$ выше первого (см., например, [4]).

Следуя [4], введем сначала пространство U , описываемое следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что *вектор-функция* $y(t, \tau) = \{y_1, \dots, y_n\}$ *принадлежит пространству* U , если она представляется в виде суммы

$$y(t, \tau) = y^{(0)}(t) + \sum'_{1 \leq |m| \leq N} y^{(m)}(t) e^{(m, \tau)}, \quad N = N_y < \infty, \quad (5)$$

с коэффициентами $y^{(0)}(t), y^{(m)}(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^n)$, не содержащей резонансных экспонент, т.е. таких экспонент $\exp(m, \tau)$ измерения $|m| \geq 2$, для которых при некоторых $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ и $t \in [0, T]$ выполняется равенство

$$(m, \lambda(t)) \equiv m_1 \lambda_1(t) + \dots + m_{n+1} \lambda_{n+1}(t) = \lambda_j(t)$$

(факт отсутствия в (5) резонансных экспонент отмечен штрихом над суммой).

В качестве класса M_ε возьмем пространство $U|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}$. Ниже будет показано, что образ $Iy(t, \tau)$ произвольного элемента класса M_ε разлагается в ряд по степеням ε , сходящийся асимптотически при $\varepsilon \rightarrow +0$. Это и будет означать, что класс M_ε асимптотически инвариантен относительно интегрального оператора (4).

Подставляя (5) в интегральный оператор (4), будем иметь

$$\begin{aligned} Iy(t, \tau) &= \sum'_{1 \leq |m| \leq N} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta\right) \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (m - e_{n+1}, \lambda(\theta)) d\theta\right) k^{(m)}(t, s) ds \\ &+ \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta\right) \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \lambda_{n+1}(\theta) d\theta\right) k^{(0)}(t, s) ds, \end{aligned} \quad (6)$$

где обозначено $k^{(m)}(t, s) \equiv K(t, s)y^{(m)}(s)$, $m \geq 0$. Надо показать, что стоящие здесь интегралы

$$I^{(m)}(t, \varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta\right) \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (m - e_{n+1}, \lambda(\theta)) d\theta\right) k^m(t, s) ds, \quad (7)$$

где $|m| \geq 0$, $m \neq e_{n+1}$, разлагаются в асимптотические ряды по степеням ε . Сначала заметим, что при указанных в (6) мультииндексах m выражение $(m - e_{n+1}, \lambda(t))$ не обращается в нуль на отрезке $[0, T]$. При $m = 0$ и $m = e_i$ ($i \neq n+1$) это вытекает из выписанных выше условий 2). При $|m| \geq 2$ в сумме (5) отсутствуют резонансные экспоненты, а значит,

$$(m - e_{n+1}, \lambda(t)) \equiv (m, \lambda(t)) - \lambda_{n+1}(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Указанное неравенство позволяет применить в (7) операцию интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
 I^{(m)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta\right) \int_0^t \frac{k^{(m)}(t, s)}{(m - e_{n+1}, \lambda(s))} ds \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (m - e_{n+1}, \lambda(\theta)) d\theta\right) \\
 &= \varepsilon \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda(\theta) d\theta\right) \\
 &\quad \times \left[\left(\frac{k^{(m)}(t, t)}{(m - e_{n+1}, \lambda(t))} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (m - e_{n+1}, \lambda(\theta)) d\theta\right) - \frac{k^{(m)}(t, 0)}{(m - e_{n+1}, \lambda(0))} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (m - e_{n+1}, \lambda(\theta)) d\theta\right) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{k^{(m)}(t, s)}{(m - e_{n+1}, \lambda(s))} \right) ds \right] \\
 &= \varepsilon \left(\frac{k^{(m)}(t, t)}{(m - e_{n+1}, \lambda(t))} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (m, \lambda(\theta)) d\theta\right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k^{(m)}(t, 0)}{(m - e_{n+1}, \lambda(0))} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta\right) \right) \\
 &\quad - \varepsilon \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta\right) \\
 &\quad \times \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (m - e_{n+1}, \lambda(\theta)) d\theta\right) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{k^{(m)}(t, s)}{(m - e_{n+1}, \lambda(s))} \right) ds.
 \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс далее, получим ряд

$$\begin{aligned}
 I^{(m)}(t, \varepsilon) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{(\nu)} \varepsilon^{\nu+1} \left[\left(I_m^{\nu} k^{(m)}(t, s) \right)_{s=t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (m, \lambda(\theta)) d\theta\right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(I_m^{\nu} k^{(m)}(t, s) \right)_{s=0} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta\right) \right], \quad |m| \geq 0, \quad m \neq e_{n+1},
 \end{aligned} \tag{8}$$

где введены операторы

$$I_m^0 = \frac{1}{(m - e_{n+1}, \lambda(s))}, \quad I_m^{\nu} = \frac{1}{(m - e_{n+1}, \lambda(s))} \frac{\partial}{\partial s} I_m^{\nu-1}, \quad \nu \geq 1.$$

В силу выполнения условий 1)–3) ряды, стоящие в правой части (8), будут асимптотически сходиться (при $\varepsilon \rightarrow +0$) к интегралам $I^{(m)}(t, \varepsilon)$, что доказывается точно так же, как и аналогичное утверждение в линейном случае (см. [5]). Но тогда из (7) следует, что образ $Iy(t, \tau)|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}$ интегрального оператора (4) системы (1) разлагается в асимптотический ряд

$$\begin{aligned}
 Iy(t, \tau) &= \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta\right) \int_0^t k^{e_{n+1}}(t, s) ds \\
 &\quad + \sum'_{\substack{0 \leq |m| \leq N \\ m \neq e_{n+1}}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \varepsilon^{\nu+1} \left[\left(I_m^{\nu} k^{(m)}(t, s) \right)_{s=t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (m, \lambda(\theta)) d\theta\right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(I_m^{\nu} k^{(m)}(t, s) \right)_{s=0} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta\right) \right].
 \end{aligned} \tag{9}$$

Тем самым показано, что класс M_ε асимптотически инвариантен относительно интегрального оператора I .

Если теперь ряд

$$\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t, \tau) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\sum'_{0 \leq |m| \leq N_k} y^{(m)}(t) e^{(m, \tau)} \right), \quad (10)$$

сходящийся асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow +0$) равномерно по $(t, \tau) \in [0, T] \times \Pi$, то его образ $I\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon)$ будет, очевидно, также представляться асимптотическим рядом (при $\varepsilon \rightarrow +0$). Это позволяет получить окончательное расширение интегрального оператора I следующим образом.

Для произвольного элемента (5) пространства U можно записать, что

$$Iy(t, \tau) = R_0 y(t, \tau) + \sum_{\nu=0}^{\infty} (R_{\nu+1} y(t, \tau)) \varepsilon^{\nu+1},$$

где через R_ν обозначены операторы порядка (действующие в U), определяемые формулами (см. [4])

$$\begin{aligned} R_0 y(t, \tau) &= e^{\tau_{n+1}} \int_0^t k^{e_{n+1}}(t, s) ds, \\ R_{\nu+1} y(t, \tau) &= (-1)^\nu \sum'_{\substack{0 \leq |m| \leq N \\ m \neq e_{n+1}}} [(I_m^\nu k^{(m)}(t, s))_{s=t} e^{(m, \tau)} - (I_m^\nu k^{(m)}(t, s))_{s=0} e^{\tau_{n+1}}], \\ \nu &\geq 1, \quad \tau = \frac{\psi(t)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

С учетом этих формул результат подстановки (10) в интеграл $I\tilde{y}$ можно записать в виде

$$I\tilde{y} = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{\substack{s=0 \\ r-s \geq 0}}^r R_{r-s} y_s(t, \tau)|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}.$$

Формальным расширением оператора I назовем оператор

$$\tilde{\tilde{y}}(t, \tau, \varepsilon) \equiv \tilde{I} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t, \tau) \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{\substack{s=0 \\ r-s \geq 0}}^r R_{r-s} y_s(t, \tau).$$

Хотя этот оператор определен формально, его сужение $\tilde{\tilde{y}}(t, \tau, \varepsilon)|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}$ на функциях $y(t, \tau, \varepsilon) \in C([0, T], \Pi)$, представимых рядами (10) (сходящимися при $\varepsilon \rightarrow +0$ равномерно по (t, τ)), имеет вполне конкретный смысл:

$$\tilde{\tilde{y}}(t, \tau, \varepsilon)|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon} = I\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon).$$

Это равенство означает, что сужение (при $\tau = \psi(t)/\varepsilon$) образа функции $\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon)$ расширения оператора $\tilde{I}$ является асимптотическим рядом, сходящимся при $\varepsilon \rightarrow +0$ к вполне конкретной функции $I\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon)$.

Теперь можно записать в окончательной форме систему, расширенную по отношению к исходной (1):

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + L_0 \tilde{y} - \tilde{I} \tilde{y}(t, \tau, \varepsilon) - \varepsilon f(\tilde{y}, t) = h(t), \quad \tilde{y}(0, 0, \varepsilon) = y^0, \quad (11)$$

где

$$L_0 \tilde{y} \equiv \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(t) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau_j} - A(t) \tilde{y}.$$

Это расширение определено по крайней мере в классе рядов (10), сходящихся асимптотически при $\varepsilon \rightarrow +0$ (равномерно по $(t, \tau) \in [0, T] \times \Pi$, где $\Pi = \{\tau : \operatorname{Re} \tau_j \leq 0, j = 1, \dots, n+1\}$), что вполне достаточно для развития алгоритма построения асимптотического решения исходной задачи (1).

3. Разрешимость итерационных систем. Будем определять решение задачи (11) в виде ряда (10). Для коэффициентов этого ряда получим следующие задачи:

$$Ly_0(t, \tau) \equiv L_0 y_0 - R_0 y_0 = h(t), \quad y_0(0, 0) = y^0, \quad (12)$$

$$Ly_1(t, \tau) = -\frac{\partial y_0}{\partial t} + \widehat{f}(y_0(t, \tau), t) + R_1 y_0, \quad y_1(0, 0) = 0, \quad (13)$$

$$Ly_2(t, \tau) = -\frac{\partial y_1}{\partial t} - \frac{\partial \widehat{f}(y_0, t)}{\partial y} y_1 + R_1 y_1 + R_2 y_0, \quad y_2(0, 0) = 0, \quad (14)$$

.....

Здесь значком “ $\widehat{}$ ” обозначена операция вложения, ставящая в соответствие произвольной сумме

$$z(t, \tau) = \sum_{|m| \geq 0}^N z^{(m)}(t) e^{(m, t)} = \sum_{|m| \geq 0}' z^{(m)}(t) e^{(m, \tau)} + \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{\substack{|m^j| \geq 2 \\ (m^j, \lambda(t)) \equiv \lambda_j(t)}} z^{(m^j)}(t) e^{(m^j, \tau)}$$

(в которой могут присутствовать резонансные экспоненты) элемент $\widehat{z}(t, \tau)$ пространства U , вычисляемый следующим образом:

$$\widehat{z}(t, \tau) = \sum_{|m| \geq 0}' z^{(m)}(t) e^{(m, t)} + \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{\substack{|m^j| \geq 2 \\ (m^j, \lambda(t)) \equiv \lambda_j(t)}} z^{(m^j)} e^{\tau_j}.$$

Решение задачи (12) вычисляем в виде элемента пространства U

$$y_0(t, \tau) = \sum_{0 \leq |m| \leq N_0}' y^{(m)}(t) e^{(m, \tau)}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (12) и приравнивая отдельно свободные члены и коэффициенты при одинаковых экспонентах, получим системы

$$-A(t)y_0^{(0)}(t) = h(t), \quad (16)$$

$$[\lambda_j(t)I - A(t)]y_0^{e_j}(t) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (17)$$

$$[\lambda_{n+1}(t)I - A(t)]y_0^{e_{n+1}}(t) - \int_0^t K(t, s)y_0^{e_{n+1}}(s) ds = 0, \quad (18)$$

$$[(m, \lambda(t))I - A(t)]y^{(m)}(t) = 0, \quad |m| \geq 2, \quad (m, \lambda(t)) \neq \lambda_j(t), \quad j = 1, \dots, n. \quad (19)$$

Поскольку $\lambda_{n+1}(t) \neq \lambda_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, $\det A(t) \neq 0$, $\det([(m, \lambda(t))I - A(t)]) \neq 0$ $\forall t \in [0, T]$, то системы (16), (18), (19) имеют следующие решения:

$$y_0^{(0)}(t) = -A^{-1}(t)h(t), \quad y_0^{e_{n+1}}(t) \equiv 0, \quad y^{(m)}(t) \equiv 0. \quad (20)$$

Система (17) имеет решения вида

$$y_0^{e_j}(t) = \alpha_0^{e_j}(t)\varphi_j(t), \quad j = 1, \dots, n, \quad (21)$$

где $\alpha_0^{e_j}(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ – пока произвольные функции, $j = 1, \dots, n$. При этом решение (15) системы (12) записывается в форме

$$y_0(t, \tau) = -A^{-1}(t)h(t) + \sum_{j=1}^n \alpha_0^{e_j}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j}. \quad (22)$$

Подчиняя его начальному условию, найдем, что

$$\sum_{j=1}^n \alpha_0^{e_j}(0)\varphi_j(0) = A^{-1}(0)h(0) + y^0,$$

откуда (умножая скалярно обе части на $\chi(0)$) вычисляем

$$\alpha_0^{e_j}(0) = (A^{-1}(0)h(0) + y^0, \chi(0)). \quad (23)$$

Перейдем теперь к задаче (13). Подставляя в (13) решение (22) системы (12), будем иметь

$$Ly_1(t, \tau)$$

$$\begin{aligned} &= -\dot{y}_0^{(0)}(t) - \sum_{j=1}^n (\dot{\alpha}_0^{e_j}(0)\varphi_j(t) + \alpha_0^{e_j}(t)\dot{\varphi}_j(t))e^{\tau_j} + f_0(t) \\ &+ \sum_{\substack{|m| \geq 2 \\ (m, \lambda(t)) \neq \lambda_i(t) \\ j=1, \dots, n+1}} f^{(m)}(\alpha_0^{e_1}, \dots, \alpha_0^{e_n}, t)e^{(m, \tau)} \\ &+ \sum_{i=1}^{n+1} f^{e_i}(\alpha_0^{e_1}, \dots, \alpha_0^{e_n}, t)e^{\tau_i} + (I_0^0 K(t, s)y_0^{(0)}(s))_{s=t} - (I_0^0 K(t, s)y_0^{(0)}(s))_{s=0}e^{\tau_{n+1}} \\ &+ \sum_{j=1}^n [(I_{e_j}^0 K(t, s)\alpha_0^{e_j}(s)\varphi(s))_{s=t}e^{\tau_j} - (I_{e_j}^0 K(t, s)\alpha_0^{e_j}(s)\varphi(s))_{s=0}e^{\tau_{n+1}}], \end{aligned} \quad (24)$$

где учтено, что

$$\begin{aligned} \widehat{f}(y_0(t, \tau), t) = & f_0(t) + \sum_{i=1}^{n+1} f^{e_i}(\alpha_0^{e_1}, \dots, \alpha_0^{e_n}, t) e^{\tau_i} \\ & + \sum_{\substack{|m| \geq 2 \\ (m, \lambda(t)) \neq \lambda_i(t) \\ i=1, \dots, n+1}} f^{(m)}(\alpha_0^{e_1}, \dots, \alpha_0^{e_n}, t) e^{(m, \tau)}, \end{aligned}$$

$$R_1 y(t, \tau) \equiv \sum'_{\substack{0 \leq |m| \leq N \\ m \neq e_{n+1}}} [(I_m^0 K(t, s) y^{(m)}(s))_{s=t} e^{(m, \tau)} - (I_m^0 K(t, s) y^{(m)}(s))_{s=0} e^{\tau_{n+1}}]$$

и обозначено $y_0^{(0)}(t) \equiv -A^{-1}(t)h(t)$.

Определяя решение системы (24) в виде суммы

$$y_1(t, \tau) = \sum'_{|m| \geq 0} y_1^{(m)}(t) e^{(m, \tau)}, \quad (25)$$

получим следующие системы для коэффициентов $y_1^{(m)}(t)$:

$$-A(t)y_1^{(0)}(t) = -\dot{y}_0^{(0)}(t) + f_0(t) + (I_0^0 K(t, s)y_0^{(0)}(s))_{s=t}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} [\lambda_j(t)I - A(t)]y_1^{e_j}(t) = & -\dot{\alpha}_0^{e_j}(t)\varphi_j(t) - \alpha_0^{e_j}(t)\dot{\varphi}_j(t) \\ & + (I_{e_j}^0 K(t, s)\alpha_0^{e_j}(s)\varphi_j(s))_{s=t} + f^{e_j}(\alpha_0^{e_1}, \dots, \alpha_0^{e_n}, t), \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} [\lambda_{n+1}(t)I - A(t)]y_1^{e_{n+1}}(t) - \int_0^t K(t, s)y_1^{e_{n+1}}(s) ds = & - (I_0^0 K(t, s)y_0^{(0)}(s))_{s=0} \\ & - \sum_{j=1}^n (I_{e_j}^0 K(t, s)\alpha_0^{e_j}(s)\varphi_j(s))_{s=0} + f^{e_{n+1}}(\alpha_0^{e_1}, \dots, \alpha_0^{e_n}, t), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} [(m, \lambda(t))I - A(t)]y_1^m(t) = & f^m(\alpha_0^{e_1}, \dots, \alpha_0^{e_n}, t), \\ |m| \geq 2, \quad (m, \lambda(t)) \neq \lambda_j(t), \quad & j = 1, \dots, n+1. \end{aligned} \quad (29)$$

Как и в предыдущем случае, устанавливаем, что системы (26), (28) и (29) имеют единственные решения в классе $C^\infty([0, T], \mathbb{C}^n)$. Для разрешимости системы (27) в указанном классе необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \left(-\dot{\alpha}_0^{e_j}(t)\varphi_j(t) - \alpha_0^{e_j}(t)\dot{\varphi}_j(t) + \frac{K(t, t)\alpha_0^{e_j}(t)\varphi_j(t)}{\lambda_j(t) - \lambda_{n+1}(t)} + f^{e_j}(\alpha_0^{e_1}, \dots, \alpha_0^{e_n}, t), \chi_j(t) \right) \equiv 0, \\ j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_0^{e_j} = - \left[(\dot{\varphi}_j(t), \chi(t)) - \frac{(K(t, t)\varphi_j(t), \chi(t))}{\lambda_j(t) - \lambda_{n+1}(t)} \right] \alpha_0^{e_j} + (f^{e_j}(\alpha_0^{e_1}, \dots, \alpha_0^{e_n}, t), \chi_j(t)) = 0, \\ j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (30)$$

При этом функции $\alpha_0^{e_j}(t)$ должны удовлетворять начальным условиям (23). Система (30), (23) в резонансном случае является нелинейной системой дифференциальных уравнений, а значит, ее разрешимость на отрезке $[0, T]$ не гарантирована. Если, например, спектр $\{\lambda_j(t)\}$ матрицы $A(t)$ в фиксированной точке $t \in [0, T]$ расположен по одну сторону от некоторой прямой π , проходящий через нуль комплексной плоскости λ , и на ней нет точек $\lambda_j(t)$, то система является треугольной. В этом случае уравнения (30) последовательно интегрируются и, значит, их разрешимость на отрезке $[0, T]$ становится очевидной. В других случаях расположения спектра $\lambda_j(t)$ относительно мнимой оси треугольность системы (30) нарушается. Однако в любом случае существует некоторая бирациональная замена переменных, позволяющая понизить порядок системы и свести исследование проблемы разрешимости в целом для более простой системы дифференциальных уравнений. Мы не будем обсуждать здесь эту проблему. Потребуем, чтобы система (30), (23) имела решение в классе $C^\infty([0, T], \mathbb{C}^n)$. В этом случае функции $\alpha_0^{e_j}(t)$, входящие в решение (10) системы (12), будут полностью вычислены, а сама система (12) будет иметь единственное решение в пространстве U . При этом будет найдено решение (25) системы (13) с точностью до элементов ядра $\alpha_1^{e_1}(t)e^{\tau_1} + \dots + \alpha_1^{e_n}(t)e^{\tau_n}$. Поиск функций $\alpha_1^{e_1}(t), \dots, \alpha_1^{e_n}(t)$, входящих в указанное ядро, осуществляется по той же схеме, что и поиск функций $\alpha_0^{e_j}(t)$. При этом для $\alpha_i^{e_j}(t)$ уже получается линейная система дифференциальных уравнений, разрешимость которой на отрезке $[0, T]$ гарантирована гладкостью входящих в нее коэффициентов. Сформулируем соответствующий результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия 1)–4) и задача (30), (23) разрешима на отрезке $[0, T]$. Тогда все итерационные задачи (12), (13), (14), ... однозначно разрешимы в классе U (при их последовательном решении).

4. Асимптотическая сходимость формальных решений. Построив решения $y_0(t, \tau), \dots, y_N(t, \tau)$ задач (12), (13), (14), ... в пространстве U , составим частичную сумму

$$S_N(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k y_k(t, \tau).$$

Обозначим сужение этой суммы при $\tau = \psi(t)/\varepsilon$ через $y_{\varepsilon N}(t)$. Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда функция $y_{\varepsilon N}(t)$ удовлетворяет задаче (1) с точностью до членов, содержащих ε^{N+1} , т.е.

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy_{\varepsilon N}}{dt} &= A(t)y_{\varepsilon N}(t) + \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta\right) K(t, s)y_{\varepsilon N}(s, \varepsilon) ds \\ &+ \varepsilon f(y_{\varepsilon N}, t) + h(t) + \varepsilon^{N+1} R(t, \varepsilon), \quad y_{\varepsilon N}(0) = y^0, \end{aligned} \quad (31)$$

где $\|R(t, \varepsilon)\|_{C[0, T]} \leq \overline{R}$, $\overline{R} > 0$ – постоянная, не зависящая от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя $y_0(t, \tau), \dots, y_N(t, \tau)$ в первые N систем (12), (13), (14), ... соответственно, получим тождества. Умножим их на $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^N$ соответственно и сложим. Будем иметь

$$\begin{aligned} & L_0(y_0 + \varepsilon y_1 + \dots + \varepsilon^N y_N) - R_0(y_0 + \varepsilon y_1 + \dots + \varepsilon^N y_N) \\ & \equiv h(t) - \varepsilon \left(\frac{\partial y_0}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial y_1}{\partial t} + \dots + \varepsilon^{N-1} \frac{\partial y_{N-1}}{\partial t} \right) \\ & \quad + \varepsilon R_1 y_0 + \varepsilon^2 (R_1 y_1 + R_2 y_0) + \varepsilon^N (R_1 y_{N-1} + \dots + R_N y_0) \\ & \quad + \varepsilon \widehat{f}(y_0, t) + \varepsilon^2 \frac{\partial \widehat{f}(y_0, t)}{\partial y} y_1 + \dots + \varepsilon^N \widehat{P}_N(y_0, \dots, y_{N-1}, t). \end{aligned}$$

Произведем здесь сужение при $\tau = \psi(t)/\varepsilon$; при этом учтем, что выполняются тождества

$$\sum_{0 \leq |m| \leq k} z^{(m)}(t) e^{(m, \tau)}|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon} \equiv \sum_{0 \leq |m| \leq k} z^{(m)}(t) e^{(m, \tau)}|_{\tau=\psi(t, \varepsilon)}, \quad (32)$$

$$L_0 v(t, \tau, \varepsilon)|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon} \equiv \varepsilon \frac{dv(t, \psi(t)/\varepsilon, \varepsilon)}{dt} - A(t) v\left(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}, \varepsilon\right) - \varepsilon \frac{\partial v(t, \psi(t)/\varepsilon, \varepsilon)}{\partial t}.$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy_{\varepsilon N}}{dt} - A(t) y_{\varepsilon N}(t) &= \varepsilon^{N+1} \frac{\partial y_N(t, \psi)}{\partial t} + h(t) + \sum_{r=0}^N \varepsilon^r \sum_{\substack{s=0 \\ r-s \geq 0}}^r R_{r-s} y_s(t, \psi) \\ &\quad + \varepsilon \left[f(y_0, t) + \varepsilon \frac{\partial f(y_0, t)}{\partial y} y_1 + \dots + \varepsilon^{N-1} P_N(y_0, \dots, y_{N-1}, t) \right], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy_{\varepsilon N}}{dt} &= A(t) y_{\varepsilon N}(t) + \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta\right) K(t, s) y_{\varepsilon N}(s) ds \\ &\quad + \varepsilon f(y_{\varepsilon N}(t), t) + h(t) + \varepsilon^{N+1} \frac{\partial y_N(t, \psi)}{\partial t} \\ &\quad - \left[\int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta\right) K(t, s) y_{\varepsilon N}(s) ds - \sum_{r=0}^N \varepsilon^r \sum_{\substack{s=0 \\ r-s \geq 0}}^r R_{r-s} y_s(t, \psi) \right] \\ &\quad - \varepsilon \left[f(y_{\varepsilon N}(t), t) - f(y_0, t) - \frac{\partial f(y_0, t)}{\partial y} y_1 - \dots - \varepsilon^{N-1} P_N(y_0, \dots, y_{N-1}, t) \right]. \end{aligned}$$

По определению операторов R_k выражение в первой квадратной скобке последнего тождества представляется в виде $\varepsilon^{N+1} M_1(t, \varepsilon)$, а по построению задач (12), (13), ... выражение во второй квадратной скобке представляется в виде $\varepsilon^{N+1} M_2(t, \varepsilon)$, где

$$\|M_i\|_{C[0, T]} \leq \text{const} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \quad i = 1, 2.$$

Обозначая

$$R(t, \varepsilon) \equiv M_1(t, \varepsilon) + M_2(t, \varepsilon) + \frac{\partial y_N(t, \psi)}{\partial t},$$

получим утверждение леммы.

При обосновании асимптотической сходимости формального решения $y_{\varepsilon N}(t)$ к точному $y(t, \varepsilon)$ используется следующее утверждение (см. [6]), касающееся разрешимости операторного уравнения

$$P_{\varepsilon}(u) = 0. \quad (33)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть оператор P_{ε} действует из банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2 и имеет в некотором шаре $\{\|u - u_0\| \leq r\} \subset B_1$ две непрерывные производные. Пусть также существует оператор $\Gamma_{\varepsilon} \equiv [P'_{\varepsilon}(u_0)]^{-1}$ и выполнены условия:

- 1) $\|\Gamma_{\varepsilon}\| \leq c_1 \varepsilon^{-k}$;
- 2) $\|P_{\varepsilon}(u_0)\| \leq c_2 \varepsilon^m$ ($m > 2k$);
- 3) $\|P''_{\varepsilon}(u)\| \leq c_3$.

Тогда уравнение (33) имеет при достаточно малых $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$) решение $u_* \in B_1$, удовлетворяющее неравенству

$$\|u_* - u_0\|_{B_1} \leq c \varepsilon^{m-k}.$$

Здесь c, c_1, c_2, c_3 — некоторые положительные постоянные, не зависящие от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Получен следующий основной результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия 1)–4) и задача (30), (23) разрешима в целом на отрезке $[0, T]$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ исходная задача (1) имеет в классе $C^1([0, T], \mathbb{C}^n)$ единственное решение $y(t, \varepsilon)$ и справедлива оценка

$$\|y(t, \varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t)\|_{C[0, T]} \leq C_N \varepsilon^{N+1}, \quad N = 0, 1, \dots,$$

где постоянная $C_N > 0$ не зависит от ε при $(0, \varepsilon_0]$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
- [2] Иманалиев М. И. Методы решения нелинейных обратных задач и их приложения. Фрунзе, 1977.
- [3] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
- [4] Сафонов В. Ф. Метод регуляризации для сингулярно возмущенных систем нелинейных дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 3. С. 628–653.
- [5] Сафонов В. Ф., Туйчиев О. Д. Регуляризация сингулярно возмущенных интегральных уравнений с быстро изменяющимся ядром и их асимптотика // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 9. С. 1199–1211.
- [6] Срубщик Л. С., Юдович В. И. О применении метода Ньютона в задачах асимптотического интегрирования нелинейных уравнений // Тезисы докладов Всесоюзной межвузовской конференции по применению методов функционального анализа к решению нелинейных задач. Баку, 1975. С. 103.