Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, О числе собственных значений для гиббсовского ансамбля самосопряженных операторов, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 3, 465–467

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4530>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 15:35:45

О числе собственных значений для гиббсовского ансамбля самосопряженных операторов

В. П. Маслов

Рассмотрим самосопряженный оператор $\hat{H}$ с дискретным положительным спектром, с собственными значениями $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$, $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и проекторами на соответствующие собственные подпространства $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ в гильбертовом пространстве $L_2 = L_2(\mathbb{R}^D)$, где D – любое конечное целое. Будем предполагать, что для числа собственных значений, меньших заданного E при $E \rightarrow \infty$, выполняется правило Вейля (в физике говорят, что число собственных значений пропорционально фазовому объему). Иногда эту формулу называют формулой Куранта.

Рассмотрим тензорное произведение N гильбертовых пространств

$$\mathcal{L}_2 = L_2(\mathbb{R}^D) \otimes L_2(\mathbb{R}^D) \otimes L_2(\mathbb{R}^D) \otimes \dots \otimes L_2(\mathbb{R}^D) \quad (N \text{ раз}),$$

где $N \rightarrow \infty$, и оператор

$$\hat{H}_N = [\hat{H} \otimes 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1] + [1 \otimes \hat{H} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1] + \dots + [1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \hat{H}] \quad (N \text{ слагаемых})$$

в нем.

Уравнение

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \quad (1)$$

с начальными условиями вида

$$\Psi|_t = \varphi_s^{(i)}(x), \quad \varphi_s^{(i)}(x) \in L_2(\mathbb{R}^D), \quad x \in \mathbb{R}^D,$$

где $i = 1, 2, \dots, N$, такими, что последовательность $\varphi_s^{(i)}(x)$ при $s \rightarrow \infty$ слабо сходится к нулю, $\|\varphi_s^{(i)}(x)\|_{L_2(\mathbb{R}^D)} = 1$, а $E_s^{(i)} = (\varphi_s^{(i)}(x), \hat{H} \varphi_s^{(i)}(x)) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, $E_s^{(i)} \leq E$, $P_n \varphi_s^{(i)} = 0$, если $\lambda_n > E$.

Соответственно,

$$i \frac{\partial \Psi_N}{\partial t} = \hat{H}_N \Psi_N, \quad \Psi_N \in \mathcal{L}_2, \quad (2)$$

с начальным условием вида

$$\Psi_N|_{t=0} = \varphi_s^{(1)}(x_1) \varphi_s^{(2)}(x_2) \dots \varphi_s^{(N)}(x_N), \quad x_i \in \mathbb{R}^D, \quad (3)$$

при $N \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ будем называть *гиббсовским ансамблем*.

Если $\varphi_s^{(k)}(x_k)$ не равны друг другу при $k = 1, \dots, N$, то мы определим параметр b_E из условия

$$\frac{\text{Sp}(\hat{H} e^{-b_E \hat{H}})}{\text{Sp}(e^{-b_E \hat{H}})} = E. \quad (4)$$

Обозначим $N_0 = \text{Sp} e^{-b_E \hat{H}}$. Числа заполнения оператора $\hat{H}_N$, отвечающие собственной функции Ψ_i оператора $\hat{H}$, меньшие или равные NE , будем обозначать N_i . Сумму $N_i + N_{i+1} + \dots + N_{i+k}$ обозначим через $N_i^{(k)}$ – числа заполнения, отвечающие набору $\Psi_i, \Psi_{i+1}, \dots, \Psi_{i+n}$, а проектор на подпространство, натянутое на собственные подпространства, отвечающие им, через $P_i^{(k)}$.

Для несимметричного гиббсовского ансамбля имеет место теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Существуют такие постоянные C_l , $l = 1, 2, \dots$, что для любых $i > 1$ и $k > 0$ числа заполнения $N_i^{(k)}$, удовлетворяющие неравенству*

$$P(|N_i^{(k)} - B \text{Sp}(P_i^{(k)} e^{-b_E \hat{H}})| > B \sqrt{N_0 \ln N_0} \psi(N_0)) \leq C_l N_0^{-l}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad B = N/N_0, \quad (5)$$

где $\psi(x)$ – положительная функция, произвольно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, а $P(\cdot)$ – отношение числа собственных значений гамильтониана $\hat{H}_N$, не превосходящих NE и удовлетворяющих стоящему в скобках неравенству, к общему числу собственных значений гамильтониана $\hat{H}_N$, не превосходящих NE .

Если начальное условие (3) симметрично (т.е. $\varphi_s^{(k)}(x) = \varphi_s^{(m)}(x)$ при всех k и m), то оно разлагается только по симметрическим собственным функциям оператора $\hat{H}_N$. Выражение вида $\sum_{i=1}^k \lambda_i N_i$ для любых N_i таких, что $\sum_{i=1}^k N_i \leq N$, есть собственное значение $\hat{H}_N$, отвечающее симметричным по (x_i, x_j) собственным функциям. Снова обозначим $N_i^{(k)} = \sum_{j=i}^{i+k} N_j$. Будем называть эту задачу *симметричным гиббсовским ансамблем*.

Пусть $b_{E,N}$ – решение уравнения

$$\text{Sp}\left(\frac{\hat{H}}{e^{b_{E,N}\hat{H}} - 1}\right) = E \text{Sp}\left(\frac{1}{e^{b_{E,N}\hat{H}} - 1}\right) + \lambda_1\left(N - \text{Sp}\left(\frac{1}{e^{b_{E,N}\hat{H}} - 1}\right)\right). \quad (6)$$

Тогда для “почти всех” чисел заполнения $N_i^{(k)}$ при $k \rightarrow \infty$ имеет место равенство

$$N_i^{(k)} \cong \text{Sp}\left(P_i^{(k)} \frac{1}{e^{b_{E,N}\hat{H}} - 1}\right), \quad (7)$$

где $P_i^{(k)} = P_i + P_{i+1} + \dots + P_{i+k}$ – проектор на подпространство, порожденное подпространствами $P_i L_2, P_{i+1} L_2, \dots, P_{i+k} L_2$.

Более точно утверждение формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. *Существуют такие постоянные $C_l, l = 1, 2, \dots$, что для любых $i > 1$ и $k > 0$ числа заполнения $N_i^{(k)}$, удовлетворяющие неравенству*

$$P\left(\left|N_i^{(k)} - \text{Sp}\left(P_i^{(k)} \frac{1}{e^{b_{E,N}\hat{H}} - 1}\right)\right| > \sqrt{\tilde{N}_0 \ln \tilde{N}_0} \psi(N_0)\right) \leq C_l \tilde{N}_0^{-l}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где

$$\tilde{N}_0 = \text{Sp}\left(\frac{1}{e^{b_{E,N}\hat{H}} - 1}\right),$$

и где $\psi(x)$ – положительная функция, произвольно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, а $P(\cdot)$ – отношение числа собственных значений гамильтониана $\hat{H}_N$, отвечающих симметричным по (x_i, x_j) собственным функциям, не превосходящих NE и удовлетворяющих стоящему в скобках неравенству, к общему числу собственных значений гамильтониана $\hat{H}_N$, не превосходящих NE и отвечающих симметричным собственным функциям.

Таким образом, в симметрическом случае $\tilde{N}_0$ зависит от N и если $\tilde{N}_0(N) < N$, то возникает “диффузия”, при которой увеличивается кратность λ_1 на величину $N - \tilde{N}_0(N)$, т.е. при $N > a\tilde{N}_0(N)$, $a > 1$ возникает скопление собственных значений оператора $\hat{H}_N$ на нижнем уровне λ_1 (конденсат).

Пусть $\hat{H} = H(\hat{p}, q)$ оператор в $L_2(\mathbb{R}^n)$, $\hat{p} = i\hbar\partial/\partial q$, где $H(p, q)$ – символ Вейля (или Иордана).

Пусть символ гамильтониана $H(p, q)$ есть выпуклая функция, растущая не медленнее, чем $|p| + |q|$, и не быстрее, чем $|p|^s + |q|^s$, где s – любое целое. Тогда можно перейти к системе координат $H(p, q) = \text{const}$ и нормальным к ним $\vec{n}$. Сделав замену $\vec{l} = b\vec{n}$, мы получим, что

$$\frac{\iint H(p, q) e^{-bH(p, q)} dp dq}{\iint e^{-bH(p, q)} dp dq} = \frac{1}{b} \frac{\iint H(p, q) e^{-H(p, q)} dp dq}{\iint e^{-H(p, q)} dp dq} = E, \quad N_0 \cong \iint e^{-bH(p, q)} dp dq. \quad (9)$$

Причем нетрудно убедиться, что $a_1 b^{-n} \geq N_0 \geq a_2 b^{-2n/s}$, где a_1 и a_2 – некоторые константы.

Кроме того, при этих ограничениях

$$\mathrm{Sp}(e^{-H(\hat{p}, q)}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \iint e^{-H(p, q)} dp dq,$$

а число собственных значений, меньших λ при $\lambda \rightarrow \infty$, приближенно равно фазовому объему $H(p, q) \leq E$, деленному на h^n (см. [1], [2]).

Следовательно, при $b \rightarrow 0$ условия $E \rightarrow \infty$, $N_0 \rightarrow \infty$ выполнены, и мы приходим после перехода к пределу при $h/b \rightarrow 0$ к следующему.

Плотность спектра при $h \rightarrow 0$ переходит в отношение данного фазового объема к фазовому объему, определяемому неравенством

$$\sum_{i=1}^{N_0} H(p_i, q_i) \leq N_0 E. \quad (10)$$

Пусть $\rho_{E_l}^{E_{l+1}}$ – плотность “чисел заполнения” в интервале E_l и E_{l+1} .

Разобьем фазовое пространство p, q на конечное число областей $E_l \leq H(p, q) \leq E_{l+1}$, $l = 0, \dots, s-1$, $E_0 = 0$, $E_s = E$; $p, q \in \mathbb{R}^n$ и соответственно фазовое пространство $p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_N, q_N$. Производя выборку с возвращением N_l из $2nN$ областей в “ящик” $E_l \leq H(p, q) \leq E_{l+1}$ (в гиббсовском случае упорядоченную, а в бозевском случае неупорядоченную), при условии (10) мы получим $\rho_{E_l}^{E_{l+1}} = N_l/N$ [3] и теорему в независимой от допредельного квантового варианта формулировке. В нижеприводимой теореме Р есть лебегова мера фазового объема, определенного в скобках (11), относительно всего объема (10).

ТЕОРЕМА 3. В гиббсовском случае имеет место неравенство

$$\mathbf{P} \left(N_0 \rho_{E_l}^{E_{l+1}} - \iint_{E_l \leq H(p, q) \leq E_{l+1}} e^{-bH(p, q)} dp dq \geq \sqrt{N_0 \ln N_0} \Psi(N_0) \right) \leq N_0^{-m}, \quad (11)$$

где m – любое целое.

Здесь мы не используем, как в случае классической теоремы Козлова [4; с. 143], гипотезу Гиббса, поэтому аналогичная теорема имеет место в неупорядоченном (бозевском) случае.

Приношу глубокую благодарность В. Е. Назайкинскому за плодотворные обсуждения и В. Е. Подольскому за полезные консультации.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Helffer, *Théorie Spectrale pour des Operateurs Globalement Elliptiques*, Astérisque, 112, Soc. Math. France, Paris, 1984. [2] Ф. А. Березин, М. А. Шубин, *Уравнение Шредингера*, Изд-во МГУ, М., 1983. [3] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, кн. 1: Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы, МЦНМО, М., 2004. [4] В. В. Козлов, *Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре*, Современная математика, Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2002.

В. П. Маслов

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Поступило
07.10.2007