Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. М. Мухамедов, О хаотическом поведении кубической p -адической динамической системы, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 3, 468–471

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4531>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 18:06:11

О хаотическом поведении кубической p -адической динамической системы

Ф. Мухамедов

Теория p -адических динамических систем развивалась главным образом в течение последних 15 лет [1], [2]. Неархимедова динамика в окрестности периодической и почти периодической точек над глобальными полями с применением локальных полей также изучалась в работах [3], [4]. В работе [5] была сформулирована задача получения полного описания аттракторов, т.е. дисков Зигеля для возмущаемых мономиальных динамических систем. В работе [2] изучались некоторые свойства возмущаемых динамических систем, задаваемых функциями $f_q(x) = x^n + q(x)$, где возмущение $q(x)$ является полиномом, коэффициенты которого имеют малые p -адические абсолютные значения. Была обнаружена связь между мономиальными и возмущаемыми мономиальными системами. Эти исследования показали, что изучение возмущаемых динамических систем имеет большое значение. Даже в случае квадратичной функции $f(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{Q}_p$, хаотическое поведение системы довольно сложное (см. [2], [6]). Поэтому, в данной короткой статье мы анонсируем некоторые результаты, касающиеся динамики p -адических кубических функций.

Напомним некоторые обозначения. Пусть $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел. Здесь и далее, p – фиксированное простое число. Любое рациональное число $x \neq 0$ можно представить в виде $x = p^r(n/m)$, где $r, n \in \mathbb{Z}$, m – положительное целое число и p, n, m – относительно простые числа; p -адическая норма числа x задается выражением $|x|_p = p^{-r}$, $|0|_p = 0$, и является неархимедовой, что означает, что она удовлетворяет неравенству ультратрихического треугольника $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$. Пополнение поля $\mathbb{Q}$ относительно p -адической нормы определяет p -адическое поле, которое обозначается как $\mathbb{Q}_p$. Более детальное изложение теории p -адических полей можно найти в [7], [8].

Для любых $a \in \mathbb{Q}_p$ и $r > 0$ будем писать

$$\begin{aligned} \bar{B}_r(a) &= \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p \leq r\}, & B_r(a) &= \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < r\}, \\ S_r(a) &= \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p = r\}. \end{aligned}$$

Напомним некоторую стандартную терминологию теории динамических систем (см., например, [2]). Пусть $f : B \rightarrow B$ – аналитическая функция такая, что $B = B_r(a)$ или $\mathbb{Q}_p$. Введем обозначение $x^{(n)} = f^n(x^{(0)})$, где $x^{(0)} \in B$ и

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n(x).$$

Если $f(x^{(0)}) = x^{(0)}$, то $x^{(0)}$ называется *неподвижной точкой*. Неподвижная точка $x^{(0)}$ называется *аттрактором*, если существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что для всех точек $y \in U(x^{(0)})$ выполняется равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} y^{(n)} = x^{(0)}$, где $y^{(n)} = f^n(y)$. Если $x^{(0)}$ является аттрактором, то его *бассейном притяжения* является область

$$A(x^{(0)}) = \{y \in \mathbb{Q}_p : y^{(n)} \rightarrow x^{(0)}, n \rightarrow \infty\}.$$

Неподвижная точка $x^{(0)}$ называется *отталкивающей точкой*, если существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что $|f(x) - x^{(0)}|_p > |x - x^{(0)}|_p$ для $x \in U(x^{(0)})$, $x \neq x^{(0)}$. Для неподвижной точки $x^{(0)}$ функции $f(x)$ шар $B_r(x^{(0)})$ (содержащийся в B) называется

Работа выполнена при поддержке фонда FCT (грант SFRH/BPD/17419/2004).

диск *Зигеля*, если любая сфера $S_\rho(x^{(0)})$, $\rho < r$, является инвариантной сферой функции $f(x)$, т.е., если точка $x \in S_\rho(x^{(0)})$, то все ее итерации $x^{(n)}$ принадлежат $S_\rho(x^{(0)})$ при всех $n = 1, 2, \dots$. Объединение всех дисков *Зигеля* с центром в точке $x^{(0)}$ называется *максимальным диском Зигеля* и обозначается через $SI(x^{(0)})$.

Пусть $x^{(0)}$ – неподвижная точка аналитической функции $f(x)$. Положим

$$\lambda = \frac{d}{dx} f(x^{(0)}).$$

Точка $x^{(0)}$ называется *притягивающей*, если $0 \leq |\lambda|_p < 1$, *индифферентной*, если $|\lambda|_p = 1$, и *отталкивающей*, если $|\lambda|_p > 1$.

В настоящей статье рассматривается динамическая система, соответствующая функции $f: \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$, определенной соотношением

$$f(x) = x^3 + ax^2, \quad a \in \mathbb{Q}_p. \quad (1)$$

Непосредственная проверка показывает, что функция (1) имеет следующие неподвижные точки:

$$x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_{2,3} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

Заметим, что эти точки формально считаются неподвижными точками, поскольку, на самом деле, квадратный корень не всегда существует в $\mathbb{Q}_p$ и, следовательно, для полного исследования поведения динамики этой функции требуется существование неподвижных точек $x_{2,3}$.

Легко проверить, что неподвижная точка x_1 является притягивающей. Поэтому, в дальнейшем, будем рассматривать точки $x_{2,3}$. Следующие утверждения дают ответ на вопрос о существовании неподвижных точек в $\mathbb{Q}_p$ и об их поведении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеют место следующие утверждения.*

- (i) Пусть $|a|_p < 1$; тогда $\sqrt{a^2 + 4}$ существует в $\mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда либо $p \geq 3$, либо $p = 2$ и $|a|_p \leq 1/p^3$. В этом случае обе неподвижные точки $x_{2,3}$ являются притягивающими.
- (ii) Пусть $|a|_p > 1$; тогда $\sqrt{a^2 + 4}$ существует в $\mathbb{Q}_p$. В этом случае неподвижная точка x_2 является отталкивающей, а точка x_3 – индифферентной.
- (iii) Пусть $|a|_p = 1$; тогда $\sqrt{a^2 + 4}$ не существует в $\mathbb{Q}_p$ при $p = 2$ или $p = 3$. Если $p \geq 5$ и $|a^2 + 4|_p = 1$, то $\sqrt{a^2 + 4}$ существует в $\mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда включение

$$\frac{x^2 - a_0^2 - 4}{p} \in \mathbb{Z}$$

выполняется для некоторого $x \in \mathbb{Z}$. Если $|a^2 + 4|_p < 1$ и

$$\begin{cases} a_0^2 + 4 \equiv 0 \pmod{p}, \\ \frac{a_0^2 + 4}{p} + 2a_0a_1 \equiv 0 \pmod{p}, \\ a_1^2 + 2a_0a_2 \not\equiv 0 \pmod{p}, \end{cases}$$

то $\sqrt{a^2 + 4}$ существует. Здесь

$$a = a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots, \quad a_0 \neq 0.$$

В этом случае либо обе неподвижные точки индифферентны, либо одна из них индифферентна, а другая является притягивающей точкой.

Обозначим $r_k = 1/|a|_p^k$, $k \geq 1$. Для заданных множеств $A, B \subset \mathbb{Q}_p$ положим

$$T_{f,A,B}(x) = \min\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(x) \in B\}, \quad x \in A, \\ D[A, B] = \{x \in A : T_{f,A,B}(x) < \infty\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $|a|_p > 1$ и выполняется условие

$$\sqrt{|a|_p} \notin \{p^k, k \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда для притягивающей неподвижной точки x_1 выполняется

$$A(x_1) = B_{r_1}(0) \cup D[S_1(0) \cup S_{|a|_p}(0), B_{r_3}(-a)],$$

а для индифферентной неподвижной точки x_3 выполняется

$$|x_3|_p = r_1 \quad \text{и} \quad SI(x_3) = B_{r_1}(x_3).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Заметим, что из сформулированной выше теоремы видно, что структура аттрактора точки x_1 довольно сложная. Для квадратичных динамических систем такой тип структуры аттрактора пока не известен (см., например, [2; гл. 8, раздел 4]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $|a|_p < 1$. Выполняются следующие утверждения.

- (i) Неподвижная точка x_1 является аттрактором и $A(x_1) = B_1(0)$.
- (ii) Если $p \neq 3$, то неподвижные точки x_σ , $\sigma = 2, 3$, индифферентны и равенство $SI(x_\sigma) = B_1(x_\sigma)$ выполняется тогда и только тогда, когда $\sqrt{-3}$ существует в $\mathbb{Q}_p$. Иначе выполняется равенство $SI(x_\sigma) = \bar{B}_1(x_\sigma)$.
- (iii) Если $p \geq 5$, то $SI(x_2) \cap SI(x_3) = \emptyset$, а если $p = 2$, то $SI(x_2) = SI(x_3)$.
- (iv) Если $p = 3$, то неподвижные точки x_σ , $\sigma = 2, 3$ являются аттракторами и $A(x_\sigma) = B_1(x_\sigma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. (2а) Заметим, что если динамическая система рассматривается над p -адическим комплексным полем $\mathbb{C}_p$, то получаемый результат отличается от сформулированной выше теоремы 3, так как $\sqrt{-3}$ всегда существует в $\mathbb{C}_p$.

(2б) Стоит упомянуть, что результаты, аналогичные (i) и (iv), были получены в [2; гл. 4] при изучении возмущаемых свойств мономиальной динамики функции x^n . Оказалось, что подход теории возмущений не достаточно информативен относительно геометрической структуры дисков Зигеля. Здесь и далее (см. теорему 4) проводится подробный анализ структуры этих дисков для рассматриваемой функции. Кроме того, результаты, аналогичные результатам, сформулированным в пунктах (ii)–(iii), просто не верны в случае квадратичных динамических систем.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $|a|_p = 1$. Выполняются следующие утверждения.

- (i) Неподвижная точка x_1 является аттрактором и $A(x_1) = B_1(0) \cup D[S_1(0), B_1(-a)]$.

Предположим, что неподвижные точки x_2, x_3 индифферентны.

- (ii) Если $\sqrt{(a^2 - 6 + a\sqrt{a^2 + 4})/2}$ существует в $\mathbb{Q}_p$, то $SI(x_\sigma) = B_1(x_\sigma)$. Иначе, $SI(x_\sigma) = \bar{B}_1(x_\sigma)$.
- (iii) Пусть $|a^2 + 4|_p < 1$. Если $\sqrt{-5}$ существует в $\mathbb{Q}_p$ при $p > 5$, то $SI(x_\sigma) = B_1(x_\sigma)$. Иначе $SI(x_\sigma) = \bar{B}_1(x_\sigma)$. Кроме того, выполняется равенство $SI(x_2) = SI(x_3)$.

Предположим, что неподвижная точка x_2 – притягивающая.

- (iv) $A(x_2) = B_1(x_2) \cup D[S_1(x_2), B_1(-2x_2 - a)]$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $|a|_p = 1$, $|a^2 + 4| = 1$, и x_σ – индифферентная неподвижная точка функции f . Если выполняется неравенство $|3a^2 - a + 20|_p < 1$, то $SI(x_\sigma) = B_1(x_\sigma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. (3а) При $|a|_p = 1$ аналогичные виды динамических систем недавно изучались над комплексным p -адическим полем в работе Бенедетто [9]. Результаты, полученные в настоящей статье, отличаются от результатов, полученных там, поскольку мы пользовались свойством дискретности значений нормы $|\cdot|_p$ над $\mathbb{Q}_p$.

(3б) В основном, в случае, если возмущающий член мономиальной динамики нейтрален (т.е. $|q(x)|_p = 1$), то изучение динамики становится очень трудным и метод теории возмущения перестает быть эффективным. Следовательно, если нейтральное возмущение присутствует в динамической системе, то следует изучать его природу. Например, динамическая система $f(x) = x^2 + c$ при $|c|_p = 1$ была полностью изучена в [2], и можно видеть, что структура аттракторов такой системы полностью отличается от нашей (см. также замечание 2, (2b)).

Исходя из полученных выше результатов и замечаний, приходим к выводу, что кубические динамические системы имеют более хаотическую структуру, чем квадратичные. Следовательно, задача, поставленная в [5] для кубических динамических систем, практически решена.

Автор выражает благодарность фонду FCT (Португалия) и анонимному рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Escassut, *Analytic Elements in p -adic Analysis*, World Sci. Publ., Singapore–New Jersey–London, 1995. [2] A. Yu. Khrennikov, M. Nilsson, *p -adic Deterministic and Random Dynamics*, Math. Appl., **574**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004. [3] J. Lubin, *Compositio Math.*, **94**:3 (1994), 321–346. [4] T. Pezda, *Acta Arith.*, **66**:1 (1994), 11–22. [5] С. Альбеверио, Б. Тироцци, А. Ю. Хренников, С. де Шмедт, *ТМФ*, **114**:3 (1998), 349–365. [6] E. Thiran, D. Versteegen, J. Weyers, *J. Statist. Phys.*, **54**:3–4 (1989), 893–913. [7] N. Koblitz, *p -adic Numbers, p -adic Analysis and Zeta-function*, Grad. Texts in Math., **58**, Springer-Verlag, Berlin, 1977. [8] A. M. Robert, *A Course in p -adic Analysis*, Grad. Texts in Math., **198**, Springer-Verlag, New York, 2000. [9] R. Benedetto, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **335**:7 (2002), 615–620.

Ф. Мухамедов

Universidade de Aveiro, Португалия

E-mail: far75m@yandex.ru, farruh@fis.ua.pt

Поступило

03.05.2006