Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Осипов, Об асимптотике некоторых теоретико-числовых сумм, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 3, 472–476

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4532>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 13:49:56

Об асимптотике некоторых теоретико-числовых сумм

Н. Н. Осипов

1. Введение. Пусть θ – плохо приближаемое вещественное иррациональное число, например, квадратичная иррациональность (определение и основные факты о плохо приближаемых числах см., например, в [1; § 5 гл. I]). При $s > 1$ хорошо известны (см., например, [2], [3]) следующие двусторонние оценки:

$$\sigma_1(N, \theta, s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\langle n\theta \rangle^s} \asymp N^s, \quad \sigma_2(N, \theta, s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\langle n\theta \rangle^s n^s} \asymp \ln N \quad (1.1)$$

(здесь и далее $\langle t \rangle$ обозначает расстояние от t до ближайшего целого числа, а константы в оценках зависят, вообще говоря, от θ и s). Легко видеть, что предел отношения $\sigma_1(N, \theta, s)/N^s$ при $N \rightarrow \infty$ не существует (при $N = q_k$, где q_k – знаменатель k -й подходящей дроби для числа θ , это отношение терпит скачок). Вопрос о существовании предела отношения $\sigma_2(N, \theta, s)/\ln N$ является гораздо более трудным и не исследован, насколько известно автору, даже в случае, когда θ является квадратичной иррациональностью.

В настоящей заметке решается вопрос об асимптотике схожей с $\sigma_2(N, \theta, s)$ суммы

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{(N^{1-s} + \langle n\theta \rangle^s) n^s}, \quad s > 1,$$

где θ – квадратичная иррациональность такая, что $\theta + \theta' \in \mathbb{Z}$ (штрих означает переход к сопряженному числу). Решение этого вопроса основано на знании асимптотического поведения при $h \rightarrow 0$ сумм вида

$$S(h, M, s) = \sum_{(0,0) \neq (x,y) \in M} \frac{1}{(h^s + |x|^s)(h^s + |y|^s)}, \quad s > 1,$$

где M – решетка в плоскости $\mathbb{R}^2$, изображающая какой-нибудь полный модуль в вещественном квадратичном поле (о методе и примерах получения асимптотических оценок подобных сумм см. [4]).

2. Основной результат. Пусть θ – вещественная квадратичная иррациональность. Рассмотрим в квадратичном поле $\mathfrak{K} = \mathbb{Q}(\theta)$ модуль

$$\mathfrak{M} = \{1, -\theta\} = \{m - n\theta : (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$$

и пусть M – решетка в плоскости $\mathbb{R}^2$, точки которой изображают числа из $\mathfrak{M}$ (о геометрическом изображении алгебраических чисел см., например, [5; § 3 гл. II]).

ЛЕММА. При $h \rightarrow 0$ справедлива оценка

$$S(h, M, s) = \frac{2}{|\theta - \theta'|^s} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{(h^s + \langle n\theta \rangle^s) n^s} + \frac{1}{(h^s + \langle n\theta' \rangle^s) n^s} \right) + O(1).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 06-01-00597, 07-01-00326).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для целого $n \neq 0$ пусть целые $m_1(n)$, $m_2(n)$ определяются равенствами

$$|m_1(n) - n\theta| = \langle n\theta \rangle, \quad |m_2(n) - n\theta'| = \langle n\theta' \rangle.$$

Ясно, что $m_1(n) \neq m_2(n)$, если n достаточно велико. Имеем

$$\begin{aligned} S(h, M, s) &= \sum_{(0,0) \neq (m,n)} \frac{1}{(h^s + |m - n\theta|^s)(h^s + |m - n\theta'|^s)} \\ &= \sum_{n=0, m \neq 0} + \sum_{n \neq 0, m=m_1(n)} + \sum_{n \neq 0, m=m_2(n)} + \sum_{n \neq 0, m \notin \{m_1(n), m_2(n)\}} + O(1) \\ &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + O(1). \end{aligned}$$

Очевидно, $S_1 = O(1)$. Далее,

$$S_2 = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(h^s + \langle n\theta \rangle^s)(h^s + |m_1(n) - n\theta'|^s)} = \frac{1}{|\theta - \theta'|^s} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(h^s + \langle n\theta \rangle^s)(H^s + |n + \delta_n|^s)},$$

где $H = h/|\theta - \theta'|$ и для всех $n \neq 0$ имеем

$$|\delta_n| = \frac{|m_1(n) - n\theta|}{|\theta - \theta'|} < \frac{1}{2|\theta - \theta'|}.$$

Так как

$$\sum_{n \neq 0} \frac{1}{h^s + \langle n\theta \rangle^s} \left| \frac{1}{|n|^s} - \frac{1}{H^s + |n + \delta_n|^s} \right| \leq C_1(\theta, s) \sum_{n \neq 0} \frac{1}{\langle n\theta \rangle^s |n|^{s+1}} = O(1),^1$$

получаем

$$S_2 = \frac{1}{|\theta - \theta'|^s} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(h^s + \langle n\theta \rangle^s) |n|^s} + O(1) = \frac{2}{|\theta - \theta'|^s} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(h^s + \langle n\theta \rangle^s) n^s} + O(1).$$

Аналогично доказывается, что

$$S_3 = \frac{2}{|\theta - \theta'|^s} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(h^s + \langle n\theta' \rangle^s) n^s} + O(1).$$

Таким образом, остается убедиться в том, что $S_4 = O(1)$. Если $m \notin \{m_1(n), m_2(n)\}$, то

$$|m - n\theta| > \frac{1}{2}, \quad |m - n\theta'| > \frac{1}{2}. \quad (2.1)$$

Поэтому

$$S_4 \leq \sum_{(m,n) \in \Omega} \frac{1}{|m - n\theta|^s |m - n\theta'|^s},$$

где Ω определяется неравенствами (2.1). Покажем, что последний ряд сходится. Для этого положим

$$m - n\theta = k + \xi, \quad m - n\theta' = l + \eta, \quad (2.2)$$

где k, l – целые числа и $|\xi| < 1/2$, $|\eta| < 1/2$. Если $(m, n) \in \Omega$, то $k \neq 0$, $l \neq 0$. Значит,

$$\sum_{(m,n) \in \Omega} \frac{1}{|m - n\theta|^s |m - n\theta'|^s} = \sum_{k \neq 0, l \neq 0} \sum_{(m,n) \in \Pi(k,l)} \frac{1}{|k + \xi|^s |l + \eta|^s}$$

¹Этот ряд сходится при любом $s > 0$, что нетрудно установить применением преобразования Абеля и, например, первой из оценок (1.1).

$$\leq C_2(\theta) \sum_{k \neq 0, l \neq 0} \frac{1}{(|k| - 1/2)^s (|l| - 1/2)^s} < \infty$$

(здесь $\Pi(k, l)$ – множество всех пар $(m, n) \in \Omega$, для которых имеют место равенства (2.2) с данными k, l ; ясно, что число таких пар ограничено некоторой константой $C_2(\theta)$).

Лемма доказана.

Пусть

$$a\theta^2 + b\theta + c = 0,$$

где a, b, c – целые взаимно простые числа, $a > 0$. Модуль $\mathfrak{M}_1 = a\mathfrak{M} = \{a, -a\theta\}$, подобный модулю $\mathfrak{M}$, содержится в своем кольце множителей $\mathfrak{D} = \{1, a\theta\}$ и поэтому для любого числа $\mu \in \mathfrak{M}_1$ его норма

$$N_{\mathfrak{K}/\mathbb{Q}}(\mu) = \mu\mu' \in \mathbb{Z}.$$

Для произвольного натурального c пусть $\mu_j = \mu_j(c) \in \mathfrak{M}_1$, $j = 1, \dots, Q(c)$, – некоторый фиксированный набор попарно неассоциированных решений норменного уравнения

$$|N_{\mathfrak{K}/\mathbb{Q}}(\mu)| = c, \quad (2.3)$$

где $\mu \in \mathfrak{M}_1$. Любое решение этого уравнения может быть однозначно представлено в виде

$$\mu = \pm \mu_j \varepsilon^k, \quad j = 1, \dots, Q(c), \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $\varepsilon > 1$ – основная единица порядка $\mathfrak{D}$.

ТЕОРЕМА. Если $\theta + \theta' \in \mathbb{Z}$, то при $h \rightarrow 0$ справедлива оценка

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(h^s + \langle n\theta \rangle^s) n^s} = \frac{a^{2s} |\theta - \theta'|^s}{\ln \varepsilon} \sum_{c \geq 1} \frac{Q(c)}{c^s} \ln h^{-1} + O(1). \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$S(h, M, s) = a^{2s} S(ah, M_1, s),$$

где $M_1 = aM$ – решетка, соответствующая модулю $\mathfrak{M}_1$. Следуя методу, предложенному в [4], докажем при $h \rightarrow 0$ оценку

$$S(h, M_1, s) = \frac{4}{\ln \varepsilon} \sum_{c \geq 1} \frac{Q(c)}{c^s} \ln h^{-1} + O(1). \quad (2.5)$$

Тогда утверждение теоремы будет непосредственно следовать из этой оценки и леммы.

Доказательство оценки (2.5) разбивается на несколько этапов.

А. Сумму $S(h, M_1, s)$ будем оценивать послойно, объединяя в слой те точки решетки M_1 , которые изображают решения уравнения (2.3) при фиксированном c . Поскольку $(x, y) = (\mu, \mu')$, имеем

$$S(h, M_1, s) = h^{-2s} \sum_{0 \neq \mu \in \mathfrak{M}_1} \frac{1}{(1 + |h^{-1}\mu|^s)(1 + |h^{-1}\mu'|^s)} = 2h^{-2s} \sum_{c \geq 1} \sum_{j=1}^{Q(c)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} F(k),$$

где введены обозначения

$$F(t) = \frac{1}{(1 + z^s)(1 + (\omega/z)^s)}, \quad z = h^{-1} |\mu_j| \varepsilon^t, \quad \omega = h^{-2} c.$$

Будем считать $0 < h < 1$, так что $\omega > 1$. Положим

$$\Sigma = \sum_{k \in \mathbb{Z}} F(k), \quad I = \int_{\mathbb{R}} F(t) dt$$

и пусть $\delta = \Sigma - I$.

Б. Вычислим интеграл I , сделав замену переменной $t \rightarrow z$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\ln \varepsilon} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{(1+z^s)(1+(\omega/z)^s)} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{1}{\ln \varepsilon} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{z^{s-1}}{(1+z^s)(z^s + \omega^s)} dz \\ &= \frac{1}{\ln \varepsilon} \cdot \frac{\ln \omega}{\omega^s - 1} = \frac{1}{\ln \varepsilon} \omega^{-s} (\ln \omega + C_3(\omega)), \end{aligned}$$

где величина

$$C_3(\omega) = \frac{\ln \omega}{\omega^s - 1} < \frac{\ln \omega}{\omega - 1} < 1.$$

В. Оценим погрешность δ , используя очевидное неравенство

$$|\delta| \leq \int_{\mathbb{R}} |F'(t)| dt.$$

Нетрудно проверить, что

$$F'(t) = -s \ln \varepsilon \frac{z^s - (\omega/z)^s}{[(1+z^s)(1+(\omega/z)^s)]^2},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |F'(t)| dt &= s \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|z^s - (\omega/z)^s|}{[(1+z^s)(1+(\omega/z)^s)]^2} \cdot \frac{dz}{z} \\ &\leq s \int_{\mathbb{R}_+} \frac{z^s}{[(1+z^s)(1+(\omega/z)^s)]^2} \cdot \frac{dz}{z} + s \int_{\mathbb{R}_+} \frac{(\omega/z)^s}{[(1+z^s)(1+(\omega/z)^s)]^2} \cdot \frac{dz}{z} \\ &= 2s \int_{\mathbb{R}_+} \frac{(\omega/z)^s}{[(1+z^s)(1+(\omega/z)^s)]^2} \cdot \frac{dz}{z} \leq 2s \int_{\mathbb{R}_+} \frac{(\omega/z)^{-s}}{(1+z^s)^2} \cdot \frac{dz}{z} = 2\omega^{-s}. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$|\delta| \leq 2\omega^{-s}.$$

Г. Применим полученные выше оценки, предварительно переписав их в терминах h и c . Имеем

$$\omega^{-s} = h^{2s} c^{-s}, \quad \ln \omega = 2 \ln h^{-1} + \ln c,$$

поэтому

$$\begin{aligned} S(h, M_1, s) &= 2h^{-2s} \sum_{c \geq 1} \sum_{j=1}^{Q(c)} (I + \delta) = 2h^{-2s} \sum_{c \geq 1} \sum_{j=1}^{Q(c)} I + 2h^{-2s} \sum_{c \geq 1} \sum_{j=1}^{Q(c)} \delta \\ &= \frac{2}{\ln \varepsilon} \sum_{c \geq 1} \sum_{j=1}^{Q(c)} \frac{2 \ln h^{-1} + \ln c + C_3(\omega)}{c^s} + 2 \sum_{c \geq 1} \sum_{j=1}^{Q(c)} h^{-2s} \delta \\ &= \frac{4}{\ln \varepsilon} \sum_{c \geq 1} \frac{Q(c)}{c^s} \ln h^{-1} + \Delta_1 + \Delta_2, \end{aligned}$$

где величины

$$\Delta_1 = \frac{2}{\ln \varepsilon} \sum_{c \geq 1} \frac{Q(c)(\ln c + C_3(\omega))}{c^s}, \quad \Delta_2 = 2 \sum_{c \geq 1} \sum_{j=1}^{Q(c)} h^{-2s} \delta.$$

Ясно, что $\Delta_1 = O(1)$, а так как $|h^{-2s} \delta| \leq 2c^{-s}$, то и $\Delta_2 = O(1)$. Тем самым оценка (2.5) установлена, а теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если поле $\mathfrak{K}$ одноклассно, а модуль $\mathfrak{M}$ есть кольцо целых чисел этого поля, то участвующий в формуле (2.4) ряд Дирихле представляет собой дзета-функцию Дедекинда $\zeta_{\mathfrak{K}}(s)$ поля $\mathfrak{K}$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\theta + \theta' \in \mathbb{Z}$, то при $N \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{(N^{1-s} + \langle n\theta \rangle^s) n^s} = \frac{a^{2s} |\theta - \theta'|^s}{\ln \varepsilon} \sum_{c \geq 1} \frac{Q(c)}{c^s} \nu \ln N + O(1),$$

где $\nu = 1 - 1/s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно положить $h = N^{-\nu}$ в формуле (2.4) и заметить, что

$$\sum_{n > N} \frac{1}{(N^{1-s} + \langle n\theta \rangle^s) n^s} < N^{s-1} \sum_{n > N} \frac{1}{n^s} = O(1).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Шмидт, *Диофантовы приближения*, Мир, М., 1983. [2] А. Н. Kruse, *Acta Arith.*, **12** (1967), 229–261. [3] S. Haber, C. Osgood, *Pacific J. Math.*, **31** (1969), 383–394. [4] Н. Н. Осипов, *Вычислительные технологии*, **11** (спецвыпуск) (2006), 81–89. [5] З. И. Борович, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Наука, М., 1985.

Н. Н. Осипов

Политехнический институт Сибирского
федерального университета, г. Красноярск
E-mail: nnosipov@rambler.ru

Поступило

09.02.2007

Исправленный вариант

13.06.2007