Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Субботин, Группы линейных изометрий пространств M^q голоморфных функций нескольких комплексных переменных, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 3, 477–479

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4533>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:49:37

Группы линейных изометрий пространств M^q голоморфных функций нескольких комплексных переменных

А. В. Субботин

1. Введение. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \mid z_k \in \mathbb{C}, 1 \leq k \leq n\}$ – стандартное n -мерное комплексное координатное пространство. Символом G обозначим шар $B_n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1\}$ или поликруг $U^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| < 1, \dots, |z_n| < 1\}$ из пространства $\mathbb{C}^n$, а символом Γ – границу Бергмана–Шилова области G : в случае $G = B_n$ имеем $\Gamma = S_n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$ и в случае $G = U^n$ $\Gamma = T^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = \dots = |z_n| = 1\}$. На Γ существует естественная инвариантная вероятностная мера $\sigma(d\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, совпадающая с нормированной мерой Лебега на сфере S_n в случае $\Gamma = S_n$ и являющаяся прямым произведением нормированных мер Лебега на единичных окружностях, составляющих в декартовом произведении тор T^n , в случае $\Gamma = T^n$. Когда $n = 1$, то $G = B_n = U^n = U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $\Gamma = S_n = T^n = T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ и $\sigma(d\zeta) = |d\zeta|/2\pi$, $\zeta \in T$.

Для произвольной неубывающей выпуклой на $[-\infty, +\infty)$ функции $\varphi(t) \geq 0$ классы $\varphi(N)$ определяются (см. [1; с. 91] и [2; с. 46]) как множества всех голоморфных в области G функций f , для которых

$$\|f\|_\varphi = \sup_{0 \leq r < 1} \int_\Gamma \varphi(\log |f(r\zeta)|) \sigma(d\zeta) < +\infty. \quad (1)$$

При $\varphi(t) = t^+ = \max(t, 0)$ получаем многомерный класс Островского–Неванлинны N , при $\varphi(t) = e^{pt}$, $p > 0$, – многомерные классы Харди H^p (см. [1; с. 92] и [2; с. 42, 47]), и в случае $\varphi(t) = (t^+)^q$, $q > 1$, приходим к многомерным классам N^q , $q > 1$, введенным в одномерном случае Приваловым в [3]. Объединение всех классов $\varphi(N)$ по всем функциям φ , растущим быстрее t на $+\infty$, образует класс Смирнова N_* . Справедливы следующие строгие включения: $H^p \subset N^q \subset N_* \subset N$, и для функций f из самого широкого из рассмотренных класса N радиальные пределы $f^*(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 1-} f(r\zeta)$ существуют и конечны для почти всех (по мере σ) ζ на Γ (см., например, [1; с. 93] и [2; с. 43]).

Недавно (см. [4], [5]) были рассмотрены более широкие, нежели N , классы M^q , $0 < q < 1$, определяемые при произвольном $q > 0$ как множества всех голоморфных в G функций f , для которых семейство функций $\{(\ln^+ |f(r\zeta)|)^q, \zeta \in \Gamma\}_{0 \leq r < 1}$ имеет интегрируемую мажоранту на Γ ; последнее свойство эквивалентно

$$\int_\Gamma (\ln^+ Mf(\zeta))^q \sigma(d\zeta) < +\infty,$$

где $Mf(\zeta) = \sup_{0 \leq r < 1} |f(r\zeta)|$ – радиальная максимальная функция для f . В случае $q > 1$ класс M^q совпадает с классом Привалова N^q [6]. Функции классов M^q , $0 < q < 1$, так же, как и функции класса N , обладают почти всюду на Γ конечными радиальными пределами [7].

Метрики в классах M^q , $q > 0$, определим по формулам

$$\rho_{M^q}(f, g) = \left[\int_\Gamma \ln^q(1 + M(f - g)(\zeta)) \sigma(d\zeta) \right]^{\alpha_q/q}, \quad f, g \in M^q,$$

в которых $M(f - g)(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, – введенная выше радиальная максимальная функция для $f - g$ и $\alpha_q = \min(1, q)$. Относительно этих метрик классы M^q образуют F -пространства [7].

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-680.2003.1).

Изометрии пространств Харди (в себя) для одномерного случая были описаны Форелли [8] и для многомерного случая Рудиным [9]. Описание изометрий пространства Смирнова и некоторые частичные результаты относительно изометрий пространства Островского–Неванлинны получены Стефенсоном [10]. Общий вид изометрий пространств Привалова в одномерном случае найден Иидой и Мочизуки [11] и в многомерном случае (и независимо от указанных авторов) автором настоящей заметки в [12] (относительно полных доказательств см. [13]). В последних двух работах описаны также сюръективные линейные изометрии пространств M^q на себя в случае натуральных показателей $q \in \mathbb{N}$. Целью настоящего сообщения является распространение этого результата на произвольные (не обязательно натуральные) значения показателей $q > 0$. Доказательство использует описание сюръективных линейных изометрий пространства H^∞ ограниченных голоморфных функций в G со стандартной суп-нормой, данное Ахерном и Шнайдером [14], и недавний результат Берга, относящийся ко вполне монотонным функциям [15].

2. Формулировка и доказательство основной теоремы.

ТЕОРЕМА. *Отображение $A: M^q \rightarrow M^q$ является сюръективной линейной изометрией, тогда и только тогда, когда оно имеет для всех функций $f \in M^q$ вид*

$$Af(z) = \alpha f(\phi(z)), \quad z \in G, \quad (2)$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, и ϕ – биголоморфный автоморфизм области G , оставляющий точку 0 на месте.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 [10]. Автоморфизмы области G , оставляющие 0 на месте, образуют в случае шара $G = B_n$ группу $U_n(\mathbb{C})$ унитарных операторов в $\mathbb{C}^n$, и в случае полукруга $G = U^n$ они составляют подгруппу $S_n(\mathbb{C})$ группы $U_n(\mathbb{C})$, состоящую из преобразований вида

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) \mapsto (\alpha_1 z_{\tau(1)}, \alpha_2 z_{\tau(2)}, \dots, \alpha_n z_{\tau(n)}),$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$ и $(\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n))$ – перестановка набора чисел $(1, 2, \dots, n)$.

Для доказательства теоремы понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 1 (Ахерн, Шнайдер [14]). *Отображение A является линейной изометрией пространства H^∞ на себя в том и только том случае, когда оно действует на все функции $f \in H^\infty$ по формуле (2), в которой α – некоторое комплексное число, по модулю равное единице, а ϕ – некоторый биголоморфный автоморфизм области G .*

Напомним, что функция $\varphi(x)$ на интервале $(0, +\infty)$ называется *вполне монотонной*, если она бесконечно дифференцируема на $(0, +\infty)$ и $(-1)^n \varphi^{(n)}(x) \geq 0$, $x > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Известно (см. [16; с. 233, 417]), что $\varphi(x)$ представляется интегралом Лапласа по некоторой неотрицательной мере на $[0, +\infty)$, сходящимся для каждого $x > 0$, а если к тому же она представляется в виде преобразования Стилтеса (повторного преобразования Лапласа), то она логарифмически вполне монотонна (см. [15; теорема 1.2]). Доказательство следующей леммы предоставляем читателю.

ЛЕММА 2. *Функция $\ln(1+x)/x$ представляется в виде преобразования Стилтеса от неотрицательной функции.*

Согласно [17; теорема 9] из этой леммы вытекает полная монотонность функций $(\ln(1+x)/x)^q$ для всех $q > 0$.

Следующая лемма является непосредственным следствием формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и определения вполне монотонной функции.

ЛЕММА 3. Если вполне монотонная функция $\varphi(x)$ на $(0, +\infty)$ продолжается до бесконечно дифференцируемой функции на $[0, +\infty)$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\frac{(-1)^n}{x^n} \left[\varphi(x) - \varphi(0) - \varphi'(0)x - \dots - \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} \right] \geq 0, \quad x > 0,$$

причем $\varphi^{(n)}(0) \neq 0$, если только $\varphi \not\equiv \text{const}$.

С учетом сформулированных лемм доказательство теоремы проводится тем же методом, что и [13; доказательство леммы 2], поэтому мы его опускаем.

СЛЕДСТВИЕ. Для групп $\text{Isom } M^q$ сюръективных линейных изометрий пространств M^q , $q > 0$, справедливы изоморфизмы

$$\text{Isom } M^q \simeq T \times U_n(\mathbb{C}), \quad G = B_n, \quad \text{и} \quad \text{Isom } M^q \simeq T \times S_n(\mathbb{C}), \quad G = U^n.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Линейные сюръективные изометрии пространств M^q для любого $q > 0$ имеют такой же вид, как линейные сюръективные изометрии пространств Смирнова N_* [10] и Привалова N^q , $q > 1$ [13]. Как показано в [13], множества всех линейных изометрий пространств M^q и пространств Привалова N^q различны для каждого $q > 1$. Вопрос о полном описании всех (необязательно сюръективных) линейных изометрий пространств M^q хотя бы для одного значения $q > 0$ остается открытым.

Автор благодарит профессора В. И. Гаврилова за предложенную тему исследования и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] У. Рудин, *Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$* , М., Мир, 1984. [2] У. Рудин, *Теория функций в поликруге*, М., Мир, 1974. [3] И. И. Привалов, *Граничные свойства однозначных аналитических функций*, Изд-во МГУ, М., 1941. [4] H. O. Kim, Y. Y. Park, *Tsukuba J. Math.*, **16**:1 (1992), 11–18. [5] B. R. Choe, H. O. Kim, *Complex Variables Theory Appl.*, **20**:1–4 (1992), 53–61. [6] А. В. Субботин, *Матем. заметки*, **65**:2 (1999), 280–288. [7] В. И. Гаврилов, А. В. Субботин, *Math. Montisnigri*, **12** (2000), 17–31. [8] F. Forelli, *Canad. J. Math.*, **16**:4 (1964), 721–728. [9] W. Rudin, *Indiana Univ. Math. J.*, **25**:3 (1976), 215–228. [10] K. Stephenson, *Indiana Univ. Math. J.*, **26**:2 (1977), 307–324. [11] Y. Iida, N. Mochizuki, *Arch. Math. (Basel)*, **71**:4 (1998), 297–300. [12] А. В. Субботин, *Докл. РАН*, **367**:4 (1999), 451–453. [13] А. В. Субботин, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **25**, Изд-во МГУ, М., 2005, 299–313. [14] P. R. Ahern, R. Schneider, *Duke Math. J.*, **42**:2 (1975), 321–326. [15] C. Berg, *Mediterr. J. Math.*, **1**:4 (2004), 433–439. [16] С. Н. Бернштейн, *Собрание сочинений*, т. 1: Конструктивная теория функций, Изд-во АН СССР, М., 1952. [17] I. J. Shoenberg, *Ann. of Math. (2)*, **39**:4 (1938), 811–841.

А. В. Субботин

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: awsubbotin@mail.ru

Поступило

19.01.2006

Исправленный вариант

27.06.2007