Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Вакарчук, Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 5, 665–669

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm454>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 17:34:56

УДК 517.5

ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ И НАИЛУЧШИЕ ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ

С.Б. Вакарчук

В пространстве Харди $H_{p,\rho}$ ($p \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$, $H_{p,1} \equiv H_p$) построены наилучшие линейные методы приближения для классов $W(r, \Phi, \mu)$ аналитических в единичном круге функций, изучавшихся Л.В. Тайковым и Н. Айнуллоевым. Вычислены точные значения линейного, гильбертовского и информационного n -поперечников указанных классов.

Библиография: 11 названий.

1. В пространстве Харди H_p ($p \geq 1$) вопросы вычисления точных значений поперечников некоторых классов аналитических в единичном круге функций и построения в ряде случаев наилучших линейных методов приближения рассматривались, например, в работах [1]–[8]. В данном сообщении, продолжающем указанную тематику, найдены точные значения гильбертовского, информационного и линейного n -поперечников классов функций, изучавшихся ранее Л.В. Тайковым и Н. Айнуллоевым [4].

Напомним, что аналитическая в круге $|z| < 1$ функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

принадлежит пространству Харди H_p ($p \geq 1$), если

$$\|f\|_p = \lim\{M_p(f, \rho) : \rho \rightarrow 1 - 0\} < \infty, \quad M_p(f, \rho) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p dt \right\}^{1/p}.$$

При этом ее норма реализуется на угловых граничных значениях $f(e^{it})$.

Обозначим через $f_a^{(r)}(z)$ ($|z| < 1$, $r \in \mathbb{N}$) производную r -го порядка аналитической функции $f(z)$ по аргументу t комплексного переменного $z = \rho e^{it}$, т.е.

$$f_a^{(1)}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f(z)}{\partial t} = \frac{df(z)}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} = f^{(1)}(z) z i$$

и $f_a^{(r)}(z) = \{f_a^{(r-1)}(z)\}_a^{(1)}$ ($r \geq 2$). Под $H_{p,a}^r$ понимаем класс аналитических в круге $|z| < 1$ функций, для которых $f_a^{(r)}(z) \in H_p$. Структурные свойства функции $f(z) \in H_{p,a}^r$ характеризуем скоростью стремления к нулю модуля непрерывности

$$\omega(f_a^{(r)}, x)_p = \sup\{\|f_a^{(r)}(e^{i(\cdot + h/2)}) - f_a^{(r)}(e^{i(\cdot - h/2)})\|_p : |h| \leq x\}$$

границных значений $f_a^{(r)}(e^{it})$, задавая эту скорость посредством мажоранты некоторой усредненной величины $\omega(f_a^{(r)}, x)_p$.

Пусть $\Phi(x)$ ($x \geq 0$) есть произвольная возрастающая непрерывная функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Используя $\Phi(x)$ в качестве мажоранты, в [4] были рассмотрены классы аналитических функций

$$W(r, \Phi, \mu) = \left\{ f(z) \in H_{p,a}^r : \right. \\ \left. \frac{1}{2} \int_0^x \omega(f_a^{(r)}, 2t)_p \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin\left(\frac{\pi t}{2x}\right) \right] dt \leq \Phi(x), 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

где $r \in \mathbb{N}$ и $\mu \in \mathbb{R}$ ($\mu \geq 1$) – произвольные фиксированные числа.

Под $d_n(\mathcal{M}, X)$, $b_n(\mathcal{M}, X)$, $d^n(\mathcal{M}, X)$, $\delta_n(\mathcal{M}, X)$, $i_n(\mathcal{M}, X)$ понимаем соответственно колмогоровский, бернштейновский, гельфандовский, линейный и информационный n -поперечники выпуклого центрально-симметричного компакта $\mathcal{M}$ в банаховом пространстве X (см., например, [1], [7], [9], [10]). Перечисленные n -поперечники связаны такими неравенствами:

$$b_n(\mathcal{M}, X) \leq \frac{d_n(\mathcal{M}, X)}{d^n(\mathcal{M}, X)} \leq \delta_n(\mathcal{M}, X). \quad (1)$$

Из [4] следует, что если при некотором $\mu \geq 1$ для произвольных чисел $0 < x \leq \pi/2$ и $n \in \mathbb{N}$ мажоранта $\Phi(x)$ удовлетворяет ограничению

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi(\pi/(2n\mu))} \geq xn \int_0^1 (\sin xnt)_* \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right] dt, \quad (2)$$

где

$$(\sin x)_* \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sin x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{если } x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

то при $r \geq 2$

$$b_n(W(r, \Phi, \mu); H_p) = d_n(W(r, \Phi, \mu); H_p) = \frac{1}{n^{r-1}} \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right). \quad (3)$$

Там же показано, что одним из примеров мажоранты, для которой справедливо неравенство (2), является функция $\Phi(x) = x^{\beta(\mu)}$, где

$$\beta(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^2 \int_0^1 t \cos\left(\frac{\pi t}{2\mu}\right) \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right] dt.$$

В частности, $\beta(1) = \pi/2$, $\lim\{\beta(\mu) : \mu \rightarrow \infty\} = 2$ и $\pi/2 \leq \beta(\mu) < 2 \quad \forall \mu \in [1, \infty)$.

Символом $H_{p,\rho}$ ($0 < \rho \leq 1$, $H_{p,1} \equiv H_p$) обозначим пространство Харди аналитических в круге $|z| < \rho$ функций $f(z)$, для которых $\|f(z)\|_{p,\rho} \stackrel{\text{def}}{=} \|f(\rho z)\|_p < \infty$. На основе изложенных в [7, с. 32] соображений результат (3) можно распространить на более общий случай

$$b_n(W(r, \Phi, \mu); H_{p,\rho}) = d_n(W(r, \Phi, \mu); H_{p,\rho}) = \frac{\rho^n}{n^{r-1}} \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right). \quad (4)$$

2. ТЕОРЕМА. Если при заданном $\mu \geq 1$ и любых $0 < x \leq \pi/2$ и $n \in \mathbb{N}$ мажоранта $\Phi(x)$ удовлетворяет ограничению (2), то для произвольного натурального числа n

$$\Pi_n(W(r, \Phi, \mu); H_{p, \rho}) = \frac{\rho^n}{n^{r-1}} \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right). \quad (5)$$

Здесь $r = 2, 3, \dots$, $0 < \rho \leq 1$, $\Pi_n(\cdot)$ есть любой из следующих n -поперечников: $d^n(\cdot)$, $i_n(\cdot)$ или $\delta_n(\cdot)$. При этом

$$\mathcal{L}_{n-1, r-1, \rho}(f, z) \stackrel{\text{def}}{=} c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 + \left(\frac{k}{2n-k} \right)^{r-1} \rho^{2(n-k)} \left[\gamma_k \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right) - 1 \right] \right\} c_k z^k,$$

где

$$\gamma_k \stackrel{\text{def}}{=} n\mu \int_0^{\pi/(2n\mu)} \cos(kt) \cos(n\mu t) dt$$

является наилучшим линейным методом приближения класса $W(r, \Phi, \mu)$ в метрике пространства $H_{p, \rho}$, а коэффициенты Тейлора $c_k = c_k(f)$ ($k = 0, \dots, n-1$) являются оптимальными функционалами для информационного n -поперечника i_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующие обозначения:

$$V_{n-1, m, \rho}(f, z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k, m} c_k z^k,$$

где

$$\lambda_{k, m} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, \\ 1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^m \rho^{2(n-k)}, & \text{если } k = 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

и

$$G_{n-1, m}(\rho, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2n^m} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho^{k-n} \frac{\cos(k-n)t}{k^m},$$

где $m \in \mathbb{N}$. Учитывая выпуклость вниз числовой последовательности $\{\rho^k / (n+k)^m\}_{k=0}^{\infty}$ и то, что ее общий член стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, в силу [11, с. 294] заключаем, что функция $G_{n-1, m}(\rho, t)$ является неотрицательной и интегрируемой. Полагая $m = r-1$, для произвольного элемента $f(z) \in W(r, \Phi, \mu)$ запишем равенство [7]

$$f(\rho z) - V_{n-1, r-1, \rho}(f, \rho z) = \frac{\rho^n}{\pi i^{r-1}} \int_0^{2\pi} f_a^{(r-1)}(ze^{-it}) e^{int} G_{n-1, r-1}(\rho, t) dt, \quad (6)$$

где $|z| < 1$. Воспользуемся далее функцией

$$\mathcal{F}_u(f, z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{4u} \int_0^u (f(ze^{it}) + f(ze^{-it})) \cos\left(\frac{\pi t}{2u}\right) dt,$$

примененной в [4] в качестве промежуточного приближения. Конкретизируя $u = u^* \stackrel{\text{def}}{=} \pi/(2n\mu)$, имеем

$$\mathcal{F}(f, z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_{u^*}(f, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k c_k z^k = \frac{n\mu}{2} \int_0^{\pi/(2n\mu)} (f(ze^{it}) + f(ze^{-it})) \cos(n\mu t) dt. \quad (7)$$

Очевидно, что

$$\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (ik)^{r-1} c_k z^k.$$

Обозначим

$$\mathcal{L}_{n-1, r-1, \rho}(f, z) \stackrel{\text{def}}{=} V_{n-1, r-1, \rho}(f, z) + \Lambda_{n-1, r-1, \rho}(f, z),$$

где

$$\Lambda_{n-1, r-1, \rho}(f, z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \rho^{2(n-k)} \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k}\right)^2\right) \left(\frac{k}{2n-k}\right)^{r-1} \gamma_k c_k z^k.$$

Непосредственным образом можно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\Lambda_{n-1, r-1, \rho}(f, \rho z) = \frac{\rho^n}{\pi i^{r-1}} \int_0^{2\pi} V_{n-1, 2, 1}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}), z e^{-it}) e^{int} G_{n-1, r-1}(\rho, t) dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(\rho z) - \mathcal{L}_{n-1, r-1, \rho}(f, \rho z) \\ = \frac{\rho^n}{\pi i^{r-1}} \int_0^{2\pi} \{f_a^{(r-1)}(z e^{-it}) - V_{n-1, 2, 1}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}), z e^{-it})\} e^{int} G_{n-1, r-1}(\rho, t) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя обобщенное неравенство Минковского и данную выше характеристику функции G , из (8) получим

$$\begin{aligned} \|f - \mathcal{L}_{n-1, r-1, \rho}(f)\|_{p, \rho} \\ \leq \frac{\rho^n}{n^{r-1}} \{\|f_a^{(r-1)} - \mathcal{F}(f_a^{(r-1)})\|_p + \|\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}) - V_{n-1, 2, 1}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}))\|_p\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из [4, с. 343] следует оценка сверху

$$\|f_a^{(r-1)} - \mathcal{F}(f_a^{(r-1)})\|_p \leq \frac{1}{2} \int_0^{\pi/(2n\mu)} \omega(f_a^{(r)}, 2t)_p [1 - \sin(n\mu t)] dt. \quad (10)$$

Приступая к оценке второго слагаемого правой части неравенства (9), как и в [4], считаем $\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, z)$ алгебраическим полиномом $P_m(z)$ некоторого порядка m . Поскольку множество всех полиномов всюду плотно в пространстве H_p , то проводимые далее математические операции над функцией $\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, z)$ являются корректными. Используя (6), где $\rho = 1$ и в левой части равенства вместо функции $f(z)$ стоит $\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, z)$, а полиномиальный оператор имеет вид $V_{n-1, 2, 1}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}), z)$, запишем

$$\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}, z) - V_{n-1, 2, 1}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}), z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_a^{(2)}(f_a^{(r-1)}, z e^{-it}) G_{n-1, 2}(1, t) dt.$$

Применив обобщенное неравенство Минковского и воспользовавшись фактом неотрицательности и интегрируемости функции $G_{n-1,2}(1, t)$ [11], отсюда получим

$$\|\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}) - V_{n-1,2,1}(\mathcal{F}(f_a^{(r-1)}))\|_p \leq \frac{1}{n^2} \|\mathcal{F}_a^2(f_a^{(r-1)})\|_p = \frac{1}{n^2} \|\mathcal{F}_a^{(1)}(f_a^{(r)})\|_p. \quad (11)$$

Рассмотрим равенство (7), где вместо $f(z)$ записана функция $f_a^{(r)}(z)$, и продифференцируем обе его части по аргументу комплексного переменного z . Выполнив затем в правой части полученного соотношения по аналогии с [4] интегрирование по частям и применив обобщенное неравенство Минковского, продолжим оценку (11):

$$\leq \frac{\mu^2}{2} \int_0^{\pi/(2n\mu)} \omega(f_a^{(r)}, 2t)_p \sin(n\mu t) dt. \quad (12)$$

Используя (9)–(12) и определение класса $W(r, \Phi, \mu)$, имеем

$$\begin{aligned} \|f - \mathcal{L}_{n-1, r-1, \rho}(f)\|_{p, \rho} &\leq \frac{\rho^n}{2n^{r-1}} \int_0^{\pi/(2n\mu)} \omega(f_a^{(r)}, 2t)_p [1 + (\mu^2 - 1) \sin(n\mu t)] dt \\ &\leq \frac{\rho^n}{n^{r-1}} \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right). \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует оценка сверху линейного n -поперечника

$$\delta_n(W(r, \Phi, \mu); H_{p, \rho}) \leq \frac{\rho^n}{n^{r-1}} \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right).$$

Сравнив при помощи цепочки неравенств (1) полученный результат с соотношениями (4), получим требуемые равенства (5), чем и завершим доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // УМН. 1960. Т. 15. № 3. С. 81–120.
- [2] Бабенко К. И. О наилучших приближениях одного класса функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22. № 5. С. 631–640.
- [3] Тайков Л. В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 2. С. 285–295.
- [4] Айнуллоев Н., Тайков Л. В. Наилучшее приближение в смысле Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. 1986. Т. 40. № 3. С. 341–351.
- [5] Фарков Ю. А. Поперечники классов Харди и Бергмана из C^n // УМН. 1990. Т. 45. № 5. С. 197–198.
- [6] Fisher S. D., Stessin M. I. The n -width of the unit ball of H^q // J. Approx. Theory. 1991. V. 67. № 3. P. 347–356.
- [7] Вакарчук С. Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 1. С. 30–39.
- [8] Вакарчук С. Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 2. С. 186–193.
- [9] Pinkus A. n -Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer Verlag, 1985.
- [10] Осипенко К. Ю. О точных значениях n -поперечников на классах, задаваемых операторами, не увеличивающими осцилляции // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 9. С. 113–126.
- [11] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.