Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. К. Ишкин, Критерий расщепления спектра, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 5, 670–681

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm455>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 11:22:26

УДК 517.927.25

КРИТЕРИЙ РАСЩЕПЛЕНИЯ СПЕКТРА

Х. К. Ишкин

В работе получено необходимое и достаточное условие расщепления спектра для произвольного несимметричного потенциала, наименьшее значение которого достигается в конечном числе точек.

Библиография: 6 названий.

1. Формулировка основного результата. Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля

$$l(k)y = -k^{-2}y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0; 1), \quad (1)$$

$$y(0) = y(1) = 0. \quad (2)$$

Здесь k – положительный параметр, q – вещественнозначная, дважды непрерывно дифференцируемая на $[0; 1]$ функция.

В работе [1] доказано, что если $q(x)$ – четная дважды непрерывно дифференцируемая на $[-1; 1]$ функция и имеет изолированный локальный максимум в точке $x = 0$ (потенциальный барьер), то собственные значения задачи (1)–(2), расположенные ниже потенциального барьера, группируются парами λ_n^+ и λ_n^- , причем их разность при $k \rightarrow \infty$ экспоненциально мала – происходит так называемое расщепление спектра. Метод этой работы существенно связан с четностью потенциала.

В предлагаемой работе получено необходимое и достаточное условие расщепления спектра для произвольного несимметричного потенциала, наименьшее значение которого достигается в конечном числе точек.

Введем обозначения. Без ограничения общности можно считать, что наименьшее значение функции $q(x)$ равно 0. Пусть функция $q(x)$ обращается в нуль в точках $0 \leq a_1 < \dots < a_n \leq 1$ и положительна вне этих точек. В дальнейшем при выполнении этих условий будем говорить, что q имеет n потенциальных ям. Пусть $b_i \in (a_i; a_{i+1})$ ($i = 1, \dots, n$), $b_0 = 0$, $b_{n+1} = 1$. Обозначим через $L_i(k)$ самосопряженные операторы, порожденные в $L^2[b_i; b_{i+1}]$ дифференциальным выражением $l(k)$ и краевыми условиями $y(b_i) = y(b_{i+1}) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Через $L(k)$ обозначим оператор, соответствующий задаче (1)–(2). Далее, пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ и $\{\mu_j^i\}_{j=1}^\infty$ – собственные значения операторов $L(k)$ и $L_i(k)$, пронумерованные в порядке возрастания.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция q дважды непрерывно дифференцируема на $[0; 1]$ и имеет n потенциальных ям. Тогда оператор $L(k)$ имеет n экспоненциально близких при $k \rightarrow \infty$ собственных значений $\lambda_m(k), \dots, \lambda_{m+n-1}(k)$, т.е. $\lambda_i(k) - \lambda_j(k) = O(e^{-\delta k})$, $i, j = m, \dots, m+n-1$, с некоторым $\delta > 0$, тогда и только тогда, когда у операторов $L_1(k), \dots, L_n(k)$ существуют собственные значения $\mu_{j_1}^1(k), \dots, \mu_{j_n}^n(k)$, где $j_1, \dots, j_n$ не зависят от k , также экспоненциально близкие при $k \rightarrow \infty$.

Следующие 2 пункта подготавливают доказательство теоремы, которое будет дано в п. 4. При этом в пп. 2 и 3 попутно устанавливаются и другие свойства оператора $L(k)$, представляющие самостоятельный интерес.

2. Некоторые свойства оператора $L(k)$ с одной потенциальной ямой. В этом пункте мы покажем, что экспоненциально малое расщепление возможно лишь при наличии более одной ямы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть q имеет одну потенциальную яму и пусть $\lambda_1(k), \lambda_2(k), \dots$ – собственные значения оператора $L(k)$, занумерованные в порядке возрастания. Тогда при любом фиксированном $i \in \mathbb{N}$

$$(\lambda_{i+1}(k) - \lambda_i(k))e^{\delta k} \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty,$$

для всякого положительного δ .

Доказательство теоремы будет разбито на несколько лемм. Но прежде мы докажем один результат, справедливый для произвольного (даже бесконечного) числа ям.

ЛЕММА 1. а) Пусть q непрерывна на $[0; 1]$. Тогда $k^2 \cdot \lambda_i(k)$ и соответствующая нормированная собственная функция $f_i(x, k)$ при каждом фиксированном $x \in [0; 1]$ аналитичны в некоторой окрестности вещественной прямой. При $k \rightarrow \infty$ $\lambda_i(k)$ монотонно убывает до 0.

б) Если $q \in C^2[0; 1]$ и существует точка $a \in [0; 1]$ такая, что $q(a) = q'(a) = 0$, то $\lambda_i(k) = O(k^{-1})$, $k \rightarrow \infty$. Если же такой точки не существует¹, то $\lambda_i(k) = O(k^{-2/3})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Положим $M(k) = k^2 L(k)$. Тогда $M(k) = L_0 + k^2 Q$, где L_0 – дифференциальный оператор, порожденный в $L^2[0; 1]$ дифференциальным выражением $-d^2/dx^2$ и краевыми условиями (2), Q – оператор умножения на функцию q . Так как Q бесконечно мал относительно L_0 , то $M(k)$ – целое семейство в смысле Като [2, § XII.2, лемма 2]. Отсюда в силу невырожденности $\mu_i(k)$ (собственных значений $M(k)$) при каждом $k > 0$ по теореме XII.9 из [2] заключаем, что $\mu_i(k)$ и $f_i(x, k)$ при фиксированных $x \in [0; 1]$ аналитичны в некоторой окрестности вещественной прямой. Но $\lambda_i(k) = k^{-2} \mu_i(k)$, откуда следует первая часть утверждения а).

То, что $\lambda_i(k)$ убывают, следует из того, что семейство операторов $L(k) = k^{-2} L_0 + Q$ убывает на $(0; \infty)$. Далее, если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i(k) = \lambda_0 > 0,$$

¹В этом случае q имеет одну или две точки минимума на концах отрезка $[0; 1]$.

то найдется некоторый отрезок, содержащий точку минимума функции q , в котором в соответствии с теоремой сравнения Штурма (см., [3, гл. XI, теорема 3.1]) функция $f_i(x, k)$ имеет неограниченное по k число нулей, что невозможно.

б) Если $q(a) = q'(a) = 0$, то найдется некоторое положительное число α такое, что $q(x) \leq \alpha^2(x-a)^2$ для всех $x \in [0; 1]$. Пусть $H(k)$ – оператор, который получается из $L(k)$ заменой q на $\alpha^2(x-a)^2$. Поскольку $L(k) \leq H(k)$, то $\lambda_i(k) \leq \mu_i(k)$, $i = 1, 2, \dots$, где $\mu_i(k)$ – собственные значения оператора $H(k)$. Докажем, что $\mu_i(k) = O(k^{-1})$, $k \rightarrow \infty$.

Рассмотрим сначала случай $a \in (0; 1)$. Введем в рассмотрение гармонический осциллятор $H_\infty(k)$, порожденный в $L^2(-\infty; +\infty)$ дифференциальным выражением $k^{-2}d^2/dx^2 + \alpha^2(x-a)^2$. Собственные значения $H_\infty(k)$ вычисляются точно (см., например, [4, § 24, п. 6(д)]): $\nu_i(k) = (2i+1)\alpha/k$, а соответствующие нормированные собственные функции имеют вид

$$\psi_i(x, k) = C_i e^{-\alpha k(x-a)^2/2} H_i(\sqrt{\alpha k}(x-a)), \quad C_i = \sqrt[4]{\frac{k}{\pi \alpha}} \frac{1}{\sqrt{2^i i!}},$$

где H_i – полиномы Эрмита.

Покажем, что для любого i найдутся $c_i > 0$, $d_i > 0$ такие, что для всех $k > 0$

$$\mu_i(k) \leq \nu_i(k) + c_i e^{-d_i k}. \quad (3)$$

Выберем положительное число ε так, чтобы $[a - \varepsilon; a + \varepsilon] \in (0; 1)$ и введем гладкую функцию $\chi(x)$, равную 1 на $[a - \varepsilon/2; a + \varepsilon/2]$ и 0 вне $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Далее положим $\phi_j = \psi_j \chi / \|\psi_j \chi\|$, $j = 1, \dots, i$. Тогда $\phi_j \in D(H(k))$, $[H(k) - \nu_j(k)]\phi_j = O(e^{-d_i k})$, $(\phi_l, \phi_j) = \delta_{lj} + O(e^{-d_i k})$, $l, j = 1, \dots, i$, $k \rightarrow \infty$, равномерно по $x \in [0; 1]$ с некоторым $d_i > 0$. Отсюда, применяя принцип минимакса [2, с. 91], получим (3), что доказывает лемму при $a \neq 0, 1$. Если же $a = 0$ или 1, то в качестве $H_\infty(k)$ выберем гармонический осциллятор на полуоси $(0; \infty)$ или $(-\infty; 1]$ с условиями Дирихле в 0 или 1. Все остальные рассуждения почти дословно совпадают с рассмотренным выше случаем.

Пусть теперь $q(0) = 0$, $q'(0) \neq 0$. Тогда $q(x) \leq \alpha x$, $x \in [0; 1]$ при некотором $\alpha > 0$. Введя по аналогии с предыдущим оператор $H_\infty(k)$, порожденный в $L^2[0; \infty)$ дифференциальным выражением $k^{-2}d^2/dx^2 + \alpha x$ и краевым условием $y(0) = 0$, будем иметь

$$\nu_i(k) = \xi_i \alpha^{-1/3} k^{-2/3}, \quad \psi_i(x, k) = c_i Ai(k^{2/3} \alpha^{1/3} x),$$

где $Ai(\xi)$ – функция Эйри [5, гл. IV, п. 2], $-\xi_i < 0$ – корни функции Эйри. Отсюда, воспользовавшись асимптотикой [5, гл. IV, § 1, п. 2.2]

$$Ai(\xi) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \xi^{-1/4} e^{-2\xi^{3/2}/3}, \quad \xi \rightarrow +\infty,$$

и повторяя рассуждения, проведенные для гармонического осциллятора, получим утверждение леммы.

Обратимся теперь к случаю одной потенциальной ямы. Итак, пусть $q(a) = 0$, $q(x) > 0$, $x \neq a$. Обозначим через $T_1(k)$ и $T_2(k)$ самую левую и самую правую точки

поворота, т.е. решения уравнения $q(T) = \lambda(k)^2$. Из п. а) леммы 1 следует, что при $k \rightarrow \infty$

$$T_1(k) \rightarrow a - 0, \quad T_2(k) \rightarrow a + 0. \quad (4)$$

Обозначим через $u_i(x, k)$ и $v_i(x, k)$ решения уравнения (1) при $\lambda = \lambda_i(k)$, удовлетворяющие начальным условиям

$$u_i(T_1, k) = 1, \quad u'_i(T_1, k) = 0, \quad v_i(T_1, k) = 0, \quad v'_i(T_1, k) = 1.$$

ЛЕММА 2. *Функция u_i убывает на отрезке $[0; T_1(k)]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $u'_i < 0$ при всех $x \in [0; T_1(k)]$. Имеем

$$u_i(x, k) = 1 + k^2 \int_x^{T_1} (t - x)(q(t) - \lambda_i(k)) u_i dt, \quad (5)$$

откуда

$$u'_i(x, k) = -k^2 \int_x^{T_1} (q - \lambda_i(k)) u_i dt.$$

Так как $u_i(T_1, k) = 1$, то $u_i > 0$ в некоторой левой полукрестности точки T_1 , так что $u'_i < 0$ в этой полукрестности. Допустим, что существует точка x_0 из $[0; T_1)$, в которой u'_i обращается в 0 и $u'_i < 0$ на $(x_0; T_1)$. Но тогда $u_i > 1$ при таких x ; следовательно,

$$u'_i(x_0, k) < -k^2 \int_{x_0}^{T_1} (q - \lambda_i(k)) < 0.$$

ЛЕММА 3. *Для функций u_i и v_i при $k \rightarrow \infty$ справедливы равномерные по $x \in [T_1(k); T_2(k)]$ асимптотические оценки*

$$u_i, v_i = O(e^{o(k)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (5) при $x \in [T_1(k); T_2(k)]$ имеем

$$|u_i| \leq 1 + \lambda_i(k) k^2 (T_2(k) - T_1(k)) \int_{T_1}^x |u_i| dt.$$

Согласно п. б) леммы 1 и (4) $\lambda_i(k) k^2 (T_2(k) - T_1(k)) = o(k)$, откуда, итерируя последнее неравенство, получим доказываемую оценку для u_i .

Функция v_i удовлетворяет уравнению

$$v_i(x, k) = x - T_1 + k^2 \int_x^{T_1} (t - x)(q(t) - \lambda_i(k)) v_i dt.$$

Отсюда, повторяя проведенные выше рассуждения для v_i , получим утверждение леммы.

Пусть $f_i(x, k)$ – нормированная собственная функция оператора, соответствующая $\lambda_i(k)$. Тогда $f'_i(T_1, k) \neq 0$. Действительно, если бы $f'_i(T_1, k) = 0$, то $f_i = c u_i$ с некоторой постоянной $c \neq 0$. Тогда $f_i(0, k) \neq 0$, что невозможно. Без ограничения общности можно считать, что $f'_i(T_1, k) > 0$.

²Здесь и далее в этом пункте считаем, что $a \in (0; 1)$. В случае, когда a совпадает с одним из концов отрезка $[0; 1]$, все выкладки сохраняют силу.

ЛЕММА 4. При указанной нормировке функция $f_i(x, k)$ возрастает на $[0; T_1(k)]$ и для всех $x \in [0; T_1(k)]$ $f_i(x, k)u_i(x, k) < f'_i(T_1, k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\left(\frac{f_i}{u_i}\right)' = \frac{W(u_i, f_i)}{u_i^2} = \frac{f'_i(T_1, k)}{u_i^2}.$$

Интегрируя это равенство по $[0; x]$, получим

$$f_i(x, k) = f'_i(T_1, k)u_i(x, k) \int_0^x u_i^{-2} dt. \quad (6)$$

Отсюда согласно лемме 2 следует, что f_i положительна на $(0; T_1]$, так что $f'_i(0, k) > 0$. Но $f''_i = k^2(q - \lambda_i(k))f_i$; следовательно, $f''_i > 0$ на $(0; T_1]$. Значит, f'_i возрастает на $(0; T_1]$, откуда, учитывая положительность $f'_i(0, k)$, заключаем, что $f'_i(0, k) > 0$ на $(0; T_1]$.

Далее, из (6) вследствие убывания функции u_i имеем $f_i(x, k) < f'_i(T_1, k)u_i(x, k)$, откуда следует вторая часть утверждения леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Допустим, что существуют последовательность $k_j \rightarrow \infty$ и постоянная $\delta > 0$ такие, что $\lambda_{i+1}(k_j) - \lambda_i(k_j) \leq e^{-\delta k_j}$. Имеем

$$\begin{aligned} f_{i+1}(x, k_j) &= f_i(x, k_j) + \frac{\lambda_{i+1}(k_j) - \lambda_i(k_j)}{f'_i(T_1, k_j)} \\ &\quad \times \int_0^x (f_i(x, k_j)u_i(t, k_j) - u(x, k_j)f_i(t, k_j))f_{i+1}(t, k_j) dt. \end{aligned}$$

Тогда функция $\tilde{f}_{i+1} = f_{i+1}/f_i$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{f}_{i+1}(x, k_j) = 1 + \int_0^x G(x, t, j) \tilde{f}_{i+1}(t, k_j) dt,$$

где

$$G(x, t, j) = (\lambda_{i+1}(k_j) - \lambda_i(k_j)) \left[\frac{u_i(t, k_j)f_i(t, k_j)}{f'_i(T_1, k_j)} - \frac{u_i(x, k_j)f_i^2(t, k_j)}{f_i(x, k_j)f'_i(T_1, k_j)} \right].$$

Используя леммы 2 и 4, имеем $|G(x, t, j)| \leq 2e^{-\delta k_j}$, так что норма в $C[0; T_1(k_j)]$ интегрального оператора в правой части последнего уравнения допускает оценку $O(e^{-\delta k_j})$. Следовательно, $\tilde{f}_{i+1} = 1 + O(e^{-\delta k_j})$, $j \rightarrow \infty$, поэтому

$$f_{i+1}(x, k_j) = f_i(x, k_j)(1 + O(e^{-\delta k_j})), \quad j \rightarrow \infty, \quad (7)$$

равномерно по $x \in [0; T_1(k_j)]$. Далее, при $x \in [T_1(k_j); T_2(k_j)]$ имеем

$$\begin{aligned} f_{i+1}(x, k_j) &= f_i(x, k_j) + (\lambda_{i+1}(k_j) - \lambda_i(k_j)) \\ &\quad \times \int_{T_1(k_j)}^x (u_i(x, k_j)v_i(t, k_j) - v(x, k_j)u_i(t, k_j))f_{i+1}(t, k_j) dt. \end{aligned}$$

Повторяя предыдущие рассуждения для последнего уравнения и учитывая при этом утверждение леммы 3, будем иметь

$$f_{i+1}(x, k_j) = f_i(x, k_j) + O(e^{-\delta' k_j}), \quad j \rightarrow \infty,$$

равномерно по $x \in [T_1(k_j); T_2(k_j)]$ с некоторым $\delta' < \delta$.

Далее, замечая, что оценка (7) справедлива и для отрезка $[T_2(k_j); 1]$, получим

$$f_{i+1}(x, k_j) = f_i(x, k_j) + O(e^{-\delta' k_j}), \quad j \rightarrow \infty,$$

равномерно по $x \in [0; 1]$. Из этого соотношения видно, что

$$(f_{i+1}, f_i) = 1 + O(e^{-\delta' k_j}), \quad j \rightarrow \infty,$$

вопреки тому, что $(f_{i+1}, f_i) = 0$. Тем самым теорема доказана.

3. Оператор $L(k)$ с несколькими потенциальными ямами. При доказательстве п. б) леммы 1 мы воспользовались тем, что вне некоторой окрестности точки a собственные функции гармонического осциллятора экспоненциально малы. Это свойство справедливо для оператора с произвольным конечным числом ям.

ЛЕММА 5. Пусть функция $q(x) \in C^{(2)}[0; 1]$ и $\min_{[0; 1]} q(x) = 0$. Далее пусть $q(x) > 0$ внутри некоторого интервала $(a; b)$ из $[0; 1]$. Тогда для любой нормированной функции $f_i(x, k)$ оператора $L(k)$ и любого отрезка $[\alpha; \beta]$ из интервала $(a; b)$ найдется не зависящее от k число $\delta > 0$ такое, что

$$f_i^{(j)}(x, k) = O(e^{-\delta k}), \quad k \rightarrow \infty, \quad j = 0, 1,$$

равномерно по $x \in [\alpha; \beta]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $m = \min_{[\alpha; \beta]} q(x)$. Тогда найдется такое положительное число ε , что $q(x) > m/2$ при $x \in [\alpha - \varepsilon; \beta + \varepsilon]$. Введем в рассмотрение функцию $p(x)$, обладающую следующими свойствами:

- а) $p \in C^2[0; 1]$;
- б) $p(x) = q(x)$ при $x \in [\alpha - \varepsilon; \beta + \varepsilon]$;
- в) $p(x) \geq m/2$ для всех $x \in [0; 1]$.

Пусть $M(k)$ – оператор, который получается из $L(k)$ заменой $q(x)$ на $p(x)$. Тогда если $\lambda_i(k)$ – собственное значение $L(k)$, соответствующее $f_i(x, k)$, то

$$f_i(x, k) = (M(k) - \lambda_i(k))^{-1} V f_i, \quad (8)$$

где $V = p(x) - q(x)$. Согласно пункту б) леммы 1 $\lambda_i(k) \leq m/4$ при достаточно больших $k > 0$. Поэтому, используя ВКБ-разложения [5, гл. II, § 2], для ядра резольвенты в правой части (8) будем иметь

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} (G(x, t, k)) = O(k^{j-1} e^{-k | \int_t^x \sqrt{p - \lambda_i(k)} d\tau |}), \quad k \rightarrow \infty, \quad j = 0, 1, \quad (9)$$

равномерно по $x, t \in [0; 1]$. Подставляя (9) при $j = 0$ в (8) и учитывая, что $V = 0$ на $[\alpha - \varepsilon; \beta + \varepsilon]$, получим $f_i = O(e^{-\delta k})$, $k \rightarrow \infty$, где $\delta = \varepsilon \sqrt{m}/2$. Далее, чтобы получить оценку для $f_i'(x, k)$, продифференцируем (8) и подставим в полученное равенство (9) при $j = 1$. Лемма доказана.

Следующее утверждение позволяет свести вопрос об асимптотике собственных значений $L(k)$ с произвольным числом ям к случаю одной ямы.

ЛЕММА 6. Пусть q имеет n потенциальных ям. Тогда для любого собственного значения $\lambda_j(k)$ оператора $L(k)$ найдется положительное число δ_j такое, что расстояние от $\lambda_j(k)$ до объединения спектров операторов $L_i(k)$ удовлетворяет оценке

$$d_j(k) \equiv \text{dist} \left(\lambda_j(k), \bigcup_{i=1}^n \sigma_i(k) \right) = O(e^{-\delta_j k}), \quad k \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть для некоторого фиксированного j существуют последовательности $\{k_l\}$ и $\{\gamma_l\}$ такие, что $k_l \rightarrow +\infty$, $\gamma_l \rightarrow +0$ и

$$d_j(k_l) \geq e^{-\gamma_l k_l}. \quad (10)$$

Обозначим через $f_j(x, k)$ нормированную собственную функцию, соответствующую $\lambda_j(k)$. Согласно лемме 5 для любого $i = 1, \dots, n$ существуют положительные числа ε_i и τ_i такие, что

$$f_j = O(e^{-\tau_i k})$$

при $k \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in [b_{i-1}; b_i + \varepsilon_i] \cup [b_i - \varepsilon_i; b_i]$. Пусть χ_i — гладкая функция, равная 1 на $[b_{i-1} + \varepsilon_i; b_i - \varepsilon_i]$ и 0 вне $(b_{i-1} + \varepsilon_i/2; b_i - \varepsilon_i/2)$. Положим $g_i = f_j \chi_i$, $x \in [b_{i-1}; b_i]$. Тогда $g_i \in D(L_i)$ и

$$L_i g_i = \lambda_j g_i + O(e^{-\tau_i k}), \quad k \rightarrow \infty,$$

равномерно по $x \in [b_{i-1}; b_i]$. Из (10) следует, что

$$\|(L_i(k_l) - \lambda(k_l))^{-1}\| = O(e^{\gamma_l k_l}), \quad l \rightarrow \infty.$$

Следовательно, норма функции $g_i(x, k_l)$ в пространстве $L^2[b_{i-1}; b_i]$ при больших l имеет порядок $O(e^{-\tau'_i k_l})$ с некоторым $\tau'_i \in (0; \tau_i)$. Отсюда, поскольку i любое, мы можем заключить, что $L^2[0; 1]$ -норма $f_j(x, k_l)$ при больших l удовлетворяет оценке $O(e^{-\tau k_l})$ с некоторым $\tau > 0$, что противоречит тому, что $\|f_j\| = 1$. Лемма доказана.

Подготовку доказательства теоремы 1 завершает

ЛЕММА 7. Допустим, что q имеет n потенциальных ям. Тогда если некоторые собственные значения $\lambda_1(k), \dots, \lambda_r(k)$ оператора $L(k)$ таковы, что для некоторой последовательности $k_j \rightarrow +\infty$ и положительной постоянной $\delta > 0$

$$\lambda_i(k_j) - \lambda_m(k_j) = O(e^{-\delta k_j}), \quad i, m = 1, \dots, r,$$

то $r \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по n . При $n = 1$ утверждение леммы следует из теоремы 2. Пусть для $(n - 1)$ -й ямы утверждение леммы верно. Допустим, что q имеет n потенциальных ям, а оператор $L(k)$ имеет $n + 1$ собственных значений $\lambda_1(k), \dots, \lambda_{n+1}(k)$, экспоненциально близких по некоторой последовательности $k_j \rightarrow +\infty$. Обозначим через $f_1(x, k), \dots, f_{n+1}(x, k)$ соответствующие нормированные собственные функции. Тогда для некоторой m -й ямы существует $s \geq 2$ функций $f_{i_1}(x, k), \dots, f_{i_s}(x, k)$, удовлетворяющих условию

$$\|f_{i_l}(x, k'_j)\|_m \geq e^{-\delta_j k'_j}, \quad l = 1, \dots, s, \quad (11)$$

где $\{k'_j\}$ – некоторая подпоследовательность последовательности $\{k_j\}$, $\{\delta_j\}$ не зависит от l и $\delta_j \rightarrow +0$, а $\|\cdot\|_m$ означает норму в $L^2[b_{m-1}; b_m]$. Можно считать (перенумеровав при необходимости), что условию (11) удовлетворяют функции $f_1(x, k), \dots, f_s(x, k)$. Также можно считать, что для всех остальных функций справедлива оценка

$$\|f_i(x, k'_j)\|_m \leq C e^{-\delta' k'_j}, \quad l = s + 1, \dots, n + 1, \quad (12)$$

где $C > 0$, $\delta' > 0$ не зависят от l, j .

Действительно, если для f_p ($p > s$) не выполняется (12), то f_p будет удовлетворять (11) с некоторыми $\{\delta'_j\}$ и $\{k''_j\}$ – подпоследовательностью $\{k'_j\}$. Тогда f_p можно присоединить к первой группе, заменяя при этом $\{k'_j\}$ на $\{k''_j\}$ и δ_j на $\delta'_j = \max\{\delta_j, \delta'_j\}$.

Докажем, что для функций $f_2, \dots, f_s$ (всюду в дальнейшем под f_i будем понимать $f_i(x, k'_j)$) найдется некоторое положительное число α такое, что

$$|(f_1, f_i)_m| \geq \|f_1\|_m \|f_i\|_m (1 - e^{-\alpha k'_j}), \quad i = 2, \dots, s, \quad (13)$$

где $(\cdot, \cdot)_m$ означает скалярное произведение в $L^2[b_{m-1}; b_m]$.

Предположим противное. Это означает, что для некоторой функции f_p , $2 \leq p \leq s$, найдется подпоследовательность последовательности $\{k'_j\}$, которую снова обозначим $\{k'_j\}$, и последовательность $\{\alpha_j\}: \alpha_j \rightarrow +0, j \rightarrow \infty$, удовлетворяющие условию

$$|(f_1, f_p)_m| < \|f_1\|_m \|f_p\|_m (1 - e^{-\alpha_j k'_j}). \quad (14)$$

Тогда, умножая функции

$$f_1 \text{ и } g = f_p - \frac{(f_1, f_p)_m}{\|f_1\|_m^2} f_1$$

на срезающую функцию $\chi_m(x)$, введенную при доказательстве леммы 6, пронормировав полученные функции и учитывая при этом, что согласно (11) и (14) $\|g\|_m \geq e^{-(\delta_j + \alpha_j)k'_j}$, построим две функции $\tilde{f}_1$ и $\tilde{g}$, обладающие следующими свойствами: $\tilde{f}_1$ и $\tilde{g} \in D(L_m)$, $\|\tilde{f}_1\|_m = \|\tilde{g}\|_m = 1$, $(\tilde{f}_1, \tilde{g})_m = 0$ и

$$\|(L_m(k'_j) - \lambda_1(k'_j))\tilde{f}_1\|_m \leq e^{-dk'_j}, \quad \|(L_m(k'_j) - \lambda_1(k'_j))\tilde{g}\|_m \leq e^{-dk'_j}, \quad d > 0.$$

Отсюда в силу известной вариационной теоремы (см., например, [6, гл. VI, п. 82, теорема 1] на отрезке $[\lambda_1(k'_j) - e^{-dk'_j}, \lambda_1(k'_j) + e^{-dk'_j}]$ существуют по крайней мере 2

собственных значения оператора $L(k'_j)$, что противоречит теореме 2. Тем самым (13) установлено.

Введем в рассмотрение функции $\tilde{f}_i = g_i / \|g_i\|$, $i = 2, \dots, s$, где

$$g_i = f_i - \frac{(f_1, f_i)_m}{\|f_1\|_m^2} f_1.$$

Используя (13), легко проверить, что для $\tilde{f}_i$

$$\|\tilde{f}_i\|_m \leq 2e^{-\alpha k'_j}, \quad i = 2, \dots, s. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь оператор $\tilde{L}(k)$, который получается из $L(k)$ заменой q на $\tilde{q}$, где $\tilde{q}$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, совпадающая с q вне $(b_{m-1}; b_m)$ и удовлетворяющая на $[b_{m-1}; b_m]$ неравенству $\tilde{q}(x) \geq q_0$, q_0 – положительная постоянная (“засыпали” m -тую яму). Тогда, воспользовавшись неравенствами (12) и (15), будем иметь

$$\begin{aligned} \|(\tilde{L}(k'_j) - \lambda_i(k'_j))\tilde{f}_i\|_m &\leq e^{-\beta k'_j}, \quad i = 2, \dots, s, \\ \|(\tilde{L}(k'_j) - \lambda_i(k'_j))f_i\|_m &\leq e^{-\beta k'_j}, \quad i = s+1, \dots, n+1, \end{aligned}$$

с некоторым $\beta > 0$. Отсюда, учитывая, что $\tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_s, f_{s+1}, \dots, f_{n+1}$ образуют ортонормированную систему, заключаем, что оператор $\tilde{L}(k'_j)$ с $n-1$ потенциальными ямами имеет n экспоненциально близких собственных значений, что противоречит допущению индукции. Тем самым лемма доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Достаточность. Пусть $\mu_i(k)$ – собственные значения $L_i(k)$ такие, что $\mu_i(k) - \mu_j(k) = O(e^{-\delta k})$, $k \rightarrow \infty$, $i, j = 1, \dots, n$, при некотором $\delta > 0$. Обозначим через $f_i(x, k)$ соответствующие нормированные собственные функции. Умножив f_i , как и при доказательстве леммы 6, на соответствующую срезающую функцию χ_i и продолжив ее нулем на $[0; 1] \setminus (b_{i-1}; b_i)$, а затем пронормировав, получим функцию $\tilde{f}_i$, обладающую следующими свойствами: $\|\tilde{f}_i\| = 1$, $L\tilde{f}_i = \mu_i(k)\tilde{f}_i + O(e^{-\delta_i k})$, $k \rightarrow \infty$, $\delta_i > 0$, равномерно по $x \in [0; 1]$. Отсюда, применяя вариационную теорему, заключаем, что существуют $\delta_0 > 0$ и $K > 0$ такие, что при всех $k \geq K$ в отрезке $I(k) = [\mu_1(k) - e^{-\delta_0 k}; \mu_1(k) + e^{-\delta_0 k}]$ содержится не менее n собственных значений оператора $L(k)$. Тогда согласно лемме 7 при достаточно больших k оператор $L(k)$ имеет в отрезке $I(k)$ ровно n собственных значений $\lambda_{m(k)}(k), \dots, \lambda_{m(k)+n-1}(k)$. Покажем, что при достаточно больших k номера собственных значений, попавших в отрезок $I(k)$, не зависят от k . Допустим противное. Это означает, что найдется некоторая последовательность $\{k_j\}$ такая, что $k_j \rightarrow \infty$ и $m(k)$ терпит скачок в точках k_j . Тогда поскольку собственные значения оператора $L(k)$ непрерывны при $k > 0$ (лемма 1), то $I(k_j)$ содержит ровно $n+1$ точек спектра оператора $L(k_j)$, что невозможно в силу леммы 7.

Необходимость. Пусть оператор $L(k)$ с n потенциальными ямами имеет n собственных чисел $\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k)$, экспоненциально близких на бесконечности. Сначала докажем, что для всех $m = 1, \dots, n$ найдутся положительные числа δ_m и K_m такие, что при всех $k \geq K_m$ в отрезке $I_m(k) = [\lambda_1(k) - e^{-\delta_m k}; \lambda_1(k) + e^{-\delta_m k}]$ существуют собственные значения оператора $L_m(k)$. Допустим, что это не так, т.е. существует такое $1 \leq m \leq n$, что

$$\text{dist}\{\lambda_1(k_j); \sigma_m(k_j)\} \geq C_1 e^{-\alpha_j k_j} \quad (16)$$

для некоторых последовательностей $k_j \rightarrow +\infty$ и $\alpha_j \rightarrow +0$ и положительной постоянной C_1 . Так как по условию $\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k)$ экспоненциально близки на бесконечности, соотношение (16) верно для всех $\lambda_l(k_j)$, $l = 1, \dots, n$ (возможно с другими значениями $C_l > 0$). Отсюда следует, что

$$\|(L_m(k_j) - \lambda_l(k_j))^{-1}\| = O(e^{\alpha_j k_j}), \quad j \rightarrow \infty, \quad l = 1, \dots, n.$$

Рассуждая теперь так же, как при доказательстве леммы 6, заключаем, что для нормированных собственных функций $f_l(x, k)$ справедлива равномерная по $x \in [b_{m-1}; b_m]$ оценка

$$f_l(x, k_j) = O(e^{-\delta k_j}), \quad j \rightarrow \infty, \quad l = 1, \dots, n, \quad (17)$$

с некоторым $\delta > 0$.

Рассмотрим оператор $\tilde{L}(k)$, введенный при доказательстве леммы 7. Из соотношения (17) имеем

$$\|(\tilde{L}(k_j) - \lambda_l(k_j))f_l(x, k_j)\| = O(e^{-\delta k_j}), \quad j \rightarrow \infty, \quad l = 1, \dots, n,$$

так что оператор $\tilde{L}(k_j)$ с $n-1$ потенциальными ямами имеет n собственных чисел, экспоненциально близких на бесконечности, что невозможно в силу леммы 7. Следовательно, при любом $m = 1, \dots, n$ отрезок $I_m(k)$ при достаточно больших $k > 0$ содержит хотя бы одно собственное значение оператора $L_m(k)$. Применяя теперь теорему 2, мы можем утверждать, что в $I_m(k)$ при достаточно больших $k > 0$ содержится единственная точка спектра $L_m(k)$. Обозначим ее $\mu_{m(k)}(k)$. Рассуждая далее так же, как при доказательстве достаточной части теоремы 1, получим, что номер $m(k)$ не зависит от k при достаточно больших $k > 0$. Теорема доказана.

5. Анализ условий расщепления спектра. Пример. В этом пункте мы дадим некоторое простое достаточное условие существования экспоненциально близких собственных значений операторов $L_i(k)$. В конце пункта построен пример, показывающий, что это условие не является необходимым.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $q \in C^2[0; 1]$ и в $(0; 1)$ существуют n точек $0 < a_1 < \dots < a_n < 1$, удовлетворяющих условиям 1)–2). Далее, пусть существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$q(x + a_i - a_1) \equiv q(x), \quad x \in [a_1 - \varepsilon; a_1 + \varepsilon], \quad i = 2, \dots, n. \quad (18)$$

Тогда операторы $L_1(k), \dots, L_n(k)$ имеют собственные значения $\mu_1(k), \dots, \mu_n(k)$, экспоненциально близкие на бесконечности.

Доказательству теоремы предположим две леммы.

ЛЕММА 8. Пусть $q(x) \in C^2[-1; 1]$ убывает на $[-\varepsilon; 0]$ и возрастает на $[0; \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 1$. Далее, пусть $V \in L^\infty[-1; 1]$, $V = 0$ в некоторой окрестности точки 0 и неотрицательна на остальной части $[-1; 1]$. Обозначим через $\{\lambda_i(k)\}$ и $\{\mu_i(k)\}$ собственные значения операторов $L(k)$ и $M(k) = L(k) + V$, занумерованные в порядке возрастания. Тогда

$$\lambda_i(k) - \mu_i(k) = O(e^{-\delta_i k}), \quad k \rightarrow \infty,$$

где $\delta_i > 0$ не зависят от k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $V \geq 0$, то $\mu_i(k) \geq \lambda_i(k)$. Пусть $f_i(x, k)$ – нормированная собственная функция $L(k)$, соответствующая $\lambda_i(k)$. Согласно лемме 5 имеем $(M(k)f_i, f_i) = \lambda_i(k) + (Vf_i, f_i) = \lambda_i(k) + O(e^{-\delta_i k})$, $k \rightarrow \infty$, $\delta_i > 0$. Отсюда в силу принципа минимакса [2, § XII.1, теорема XIII.1] $\mu_i(k) \leq \lambda_i(k) + C_i e^{-\delta_i k}$, где $C_i > 0$ не зависит от k .

ЛЕММА 9. Пусть $q(x) \in C^2[-1; 1]$, $q(0) = 0$, $q(x) > 0$ при $x \neq 0$, q убывает на $(-\varepsilon; 0)$ и возрастает на $(0; \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$. Далее, пусть $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$ – произвольные интервалы из $(-1; 1)$, содержащие точку 0. Обозначим $L_i(k)$, $i = 1, 2$, самосопряженные операторы, порожденные выражением $l(k)$ в $L^2(a_i; b_i)$ и краевыми условиями $y(a_i) = y(b_i) = 0$. Тогда для собственных значений $\{\lambda_j^i(k)\}$ операторов $L_i(k)$ при каждом $j = 1, 2, \dots$ имеют место асимптотические соотношения

$$\lambda_j^1(k) - \lambda_j^2(k) = O(e^{-\delta_j k}), \quad k \rightarrow \infty,$$

с некоторыми $\delta_j > 0$, не зависящими от k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $a = \min\{a_1, a_2\}$, $A = \max\{a_1, a_2\}$, $b = \max\{b_1, b_2\}$, $B = \min\{b_1, b_2\}$. Пусть $M_1(k)$ и $M_2(k)$ – операторы, соответствующие отрезкам $[a; b]$ и $[A; B]$, $\{\mu_j^1(k)\}$ и $\{\mu_j^2(k)\}$ – их спектры. Имеем $\mu_j^1(k) \leq \lambda_j^i(k) \leq \mu_j^2(k)$, $i = 1, 2$. Пусть $f_j(x, k)$ – нормированные собственные функции $M_1(k)$, соответствующие $\mu_j^1(k)$. Применяя лемму 5, так же, как и при доказательстве леммы 6, построим функции $\tilde{f}_j(x, k)$, обладающие следующими свойствами:

$$\tilde{f}_j \in D(M_2), \quad \|\tilde{f}_j\|_{[A; B]} = 1, \quad \|(M_2 - \mu_j^1)\tilde{f}_j\|_{[A; B]} = O(e^{-\delta_j k}), \quad k \rightarrow \infty, \quad \delta_j > 0,$$

где $\|\cdot\|_{[A; B]}$ означает норму в $L^2[A; B]$. Отсюда следует, что

$$\mu_j^2(k) \leq \mu_j^1(k) + C_j e^{-\delta_j k}, \quad C_j > 0,$$

что и доказывает лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из условий теоремы вытекает, что существуют функция $p(x) \in C^2[-1; 1]$ и положительная постоянная $\varepsilon' < \varepsilon$, которые удовлетворяют следующим условиям: $p(x) = q(x - a_1)$, $|x| \leq \varepsilon'$, $q(x) \geq p(x + a_i)$, $x \in [b_{i-1}; b_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Обозначим через $M_i(k)$ операторы, которые получаются из $L_i(k)$ заменой $q(x)$ на $p(x + a_i)$. Из леммы 8 следует, что собственные значения операторов $M_i(k)$ и $L_i(k)$ с одинаковыми номерами экспоненциально близки на бесконечности. Из леммы 9 следует, что операторы $M_1(k), \dots, M_n(k)$ имеют собственные значения, экспоненциально близкие на бесконечности. Отсюда получаем утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Так как задача (1)–(2) на отрезке $[-a; a]$ с четным потенциалом инвариантна относительно замены x на $-x$, утверждение теоремы 3 остается в силе, если равенства (18) при некоторых $i = 2, \dots, n$ заменить на равенства $q(x + a_i - a_1) = q(2a_1 - x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, все утверждения справедливы и в том случае, когда функция $q(x)$ имеет конечное число точек разрыва $r_1, \dots, r_s$, отличных от точек a_i , так что $q \in C^2[r_{i-1}; r_i]$, $i = 1, \dots, s + 1$, где $r_0 = 0$, $r_{s+1} = 1$.

В заключение мы рассмотрим пример, показывающий, что для существования экспоненциально близких собственных значений операторов $L_i(k)$ не обязательно, чтобы ямы были одинаковой формы.

ПРИМЕР. Пусть $a \in (0; 1)$. Положим

$$q(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq a, \\ b(1-x), & a \leq x \leq 1, \end{cases}$$

и обозначим через $L_1(k)$ и $L_2(k)$ операторы, порожденные дифференциальным выражением $-k^{-2}d^2/dx^2 + q(x)$ и нулевыми краевыми условиями в $L^2[0; a]$ и $L^2[a; 1]$ соответственно. Далее, пусть $M_{1,2}(k)$ – операторы, которые получаются из $L_{1,2}(k)$ заменой $[0; a]$ на $[0; +\infty)$ и $[a; 1]$ на $(-\infty; 1]$. Обозначим через $\nu_m^i(k)$ и $\mu_m^i(k)$, $i = 1, 2$, $m = 1, 2, \dots$, собственные значения операторов $M_i(k)$ и $L_i(k)$. Тогда, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве п. б) леммы 1, будем иметь

$$\nu_m^1(k) = \frac{\xi_m}{k^{2/3}}, \quad \nu_m^2(k) = b^{2/3}\nu_m^1(k), \quad \mu_m^{1,2}(k) = \nu_m^{1,2}(k) + O(e^{-\delta k}), \quad k \rightarrow \infty,$$

где $-\xi_m < 0$ – m -й нуль функции Эйри, $\delta > 0$. Отсюда видно, что если $b = (\xi_m/\xi_j)^{3/2}$ при некоторых $m, j \in \mathbb{N}$, то $\nu_m^2(k) = \nu_j^1(k)$; следовательно, собственные значения $\mu_j^1(k)$ и $\mu_m^2(k)$ экспоненциально близки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Аленицын А. Г. Расщепление спектра, порожденное потенциальным барьером в задачах с симметричным потенциалом // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 11. С. 1971–1975.
- [2] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982.
- [3] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
- [4] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
- [5] Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
- [6] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т. 1. Харьков: Вища школа, 1977.

Башкирский государственный университет, г. Уфа
E-mail: IshkinHK@bsu.bashedu.ru

Поступило
14.12.2000